



# Poliedri

Geometria dello spazio



# Solidi e poliedri

---

## Cos'è un solido?

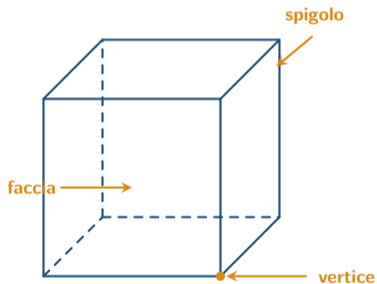
Figura geometrica tridimensionale che occupa una regione finita di spazio.

## Cos'è un poliedro?

Un solido particolare, delimitato da un numero finito di facce poligonali piane.

## Elementi costitutivi di un poliedro

- **Facce:** poligoni che delimitano il solido
- **Spigoli:** lati delle facce; ciascuno è comune a due facce
- **Vertici:** punti d'incontro di più spigoli



# Tipi classici di poliedri

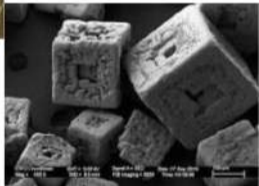
---

- **Regolari** (anche detti platonici): facce poligoni regolari congruenti — 5 solidi in tutto
- **Semi-regolari** (archimedei): facce regolari di due o più tipi — 13 solidi in tutto

# Alcuni esempi nella realtà

---

- **Cristalli di salgemma (NaCl):** struttura cubica
- **Alveoli d'ape:** prismi esagonali
- **Pallone da calcio:** icosaedro troncato (32 facce)
- **Buckminsterfullerene ( $C_{60}$ ):** icosaedro troncato a scala molecolare
- **Dadi poliedrici:** D4, D6, D8, D12, D20 corrispondono ai cinque solidi platonici
- **Piramidi di Giza:** piramidi a base quadrata



Il sale da cucina (NaCl) è un cubo.

## Esempi nella realtà II

---



**Figura:** Sulla sinistra, vari dadi poliedrici. Sulla destra, pallone da calcio e Piramide.

# Sviluppi piani

---

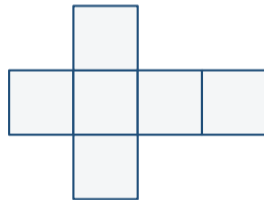
## Definizione

Si dice *sviluppo piano* di un poliedro una figura piana ottenuta tagliando lungo opportuni spigoli e distendendo la sua superficie su un piano.

## Il cubo

Lo sviluppo a croce è il più noto.

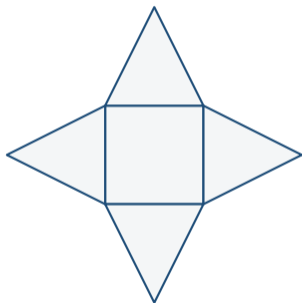
Cfr. Villani, cap. 21, Problema I, p. 271.



Sviluppo a croce del cubo (6 quadrati)

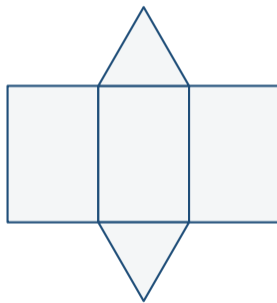
# Sviluppi della piramide e del prisma

---



**Piramide a base quadrata**

1 quadrato (base) + 4 triangoli isosceli (facce laterali)



**Prisma triangolare retto**

3 rettangoli (facce laterali) + 2 triangoli equilateri (basi)

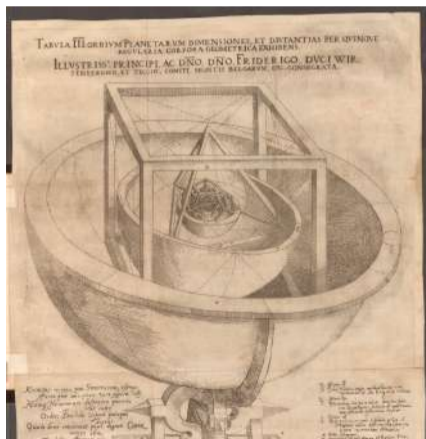
# I solidi platonici

## In sintesi

Sono i poliedri convessi le cui facce sono poligoni regolari tutti uguali fra loro, con lo stesso numero di facce in ogni vertice. *Sono esattamente cinque*: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

## Cenni storici

- **Teeteto** (417–369 A.C.): tradizionalmente ne fa una prima descrizione matematica
- **Platone**, *Timeo* 52–55 (360 A.C.): associazione con i quattro elementi e con il cosmo
- **Euclide**, *Elementi* libro XIII (300 A.C.): dimostra che i poliedri regolari sono cinque e solo cinque
- **Keplero**, *Mysterium Cosmographicum* (1596): modello cosmologico fondato sui cinque solidi inscritti uno nell'altro



# Poliedro regolare: definizione

---

Definizione (Villani, cap. 21, Proposta 6, p. 266)

Un poliedro convesso si dice **regolare** se soddisfa le tre condizioni:

1. tutte le facce sono poligoni regolari;
2. tutte le facce sono uguali tra loro;
3. in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce.

Teorema (Euclide, *Elementi*, libro XIII)

Esistono esattamente **cinque** poliedri regolari convessi: tetraedro, cubo (esaedro), ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

# Necessità delle tre condizioni

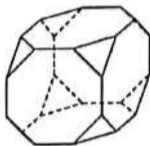
Le tre condizioni della Proposta 6 sono *tutte necessarie*: omettendone anche una sola si trovano poliedri che non sono regolari (Villani, cap. 21, p. 269).

Senza la (1)



*Tetraedro non regolare*, costruito in aula con la piegatura della carta.

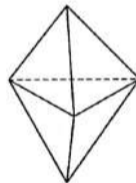
Senza la (2)



(h)

*Cubo troncato*: 6 ottagoni regolari + 8 triangoli equilateri, 3 facce per vertice.

Senza la (3)

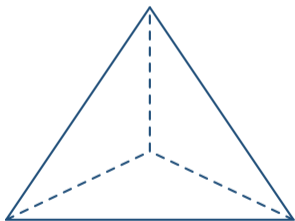


(b)

*Due tetraedri "incollati" fra loro*

# Tetraedro

---



Vertici (V)

**4**

Spigoli (S)

**6**

Facce (F)

**4 triangoli equilateri**

Per vertice

**3 facce**

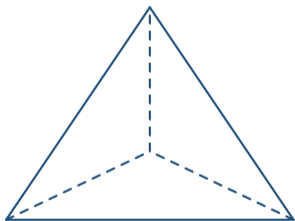
Duale

**sé stesso**

Elemento (Platone)

# Tetraedro

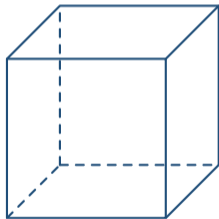
---



Vertici (V)	<b>4</b>
Spigoli (S)	<b>6</b>
Facce (F)	<b>4 triangoli equilateri</b>
Per vertice	<b>3 facce</b>
Duale	<b>sé stesso</b>
Elemento (Platone)	<b>fuoco</b>

# Cubo (esaedro)

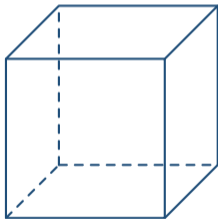
---



Vertici (V)	<b>8</b>
Spigoli (S)	<b>12</b>
Facce (F)	<b>6 quadrati</b>
Per vertice	<b>3 facce</b>
Duale	<b>ottaedro</b>
Elemento (Platone)	

# Cubo (esaedro)

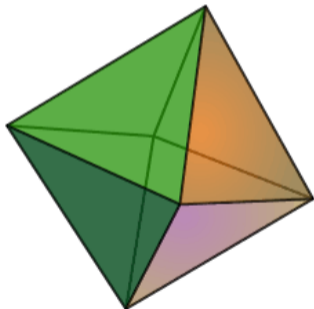
---



Vertici (V)	<b>8</b>
Spigoli (S)	<b>12</b>
Facce (F)	<b>6 quadrati</b>
Per vertice	<b>3 facce</b>
Duale	<b>ottaedro</b>
Elemento (Platone)	<b>terra</b>

# Ottaedro

---



Vertici (V)

**6**

Spigoli (S)

**12**

Facce (F)

**8 triangoli equilateri**

Per vertice

**4 facce**

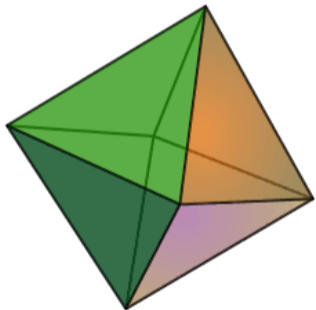
Duale

**cubo**

Elemento (Platone)

# Ottaedro

---



Vertici (V)	<b>6</b>
Spigoli (S)	<b>12</b>
Facce (F)	<b>8 triangoli equilateri</b>
Per vertice	<b>4 facce</b>
Duale	<b>cubo</b>
Elemento (Platone)	<b>aria</b>

# Dodecaedro

---



Vertici (V)	<b>20</b>
Spigoli (S)	<b>30</b>
Facce (F)	<b>12 pentagoni regolari</b>
Per vertice	<b>3 facce</b>
Duale	<b>icosaedro</b>
Elemento (Platone)	

# Dodecaedro

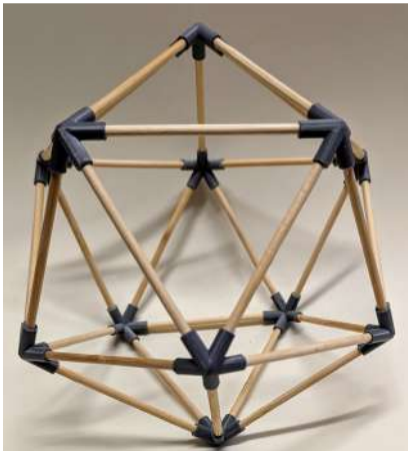
---



Vertici (V)	<b>20</b>
Spigoli (S)	<b>30</b>
Facce (F)	<b>12 pentagoni regolari</b>
Per vertice	<b>3 facce</b>
Duale	<b>icosaedro</b>
Elemento (Platone)	<b>cosmo</b>

# Icosaedro

---



Vertici (V)

**12**

Spigoli (S)

**30**

Facce (F)

**20 triangoli equilateri**

Per vertice

**5 facce**

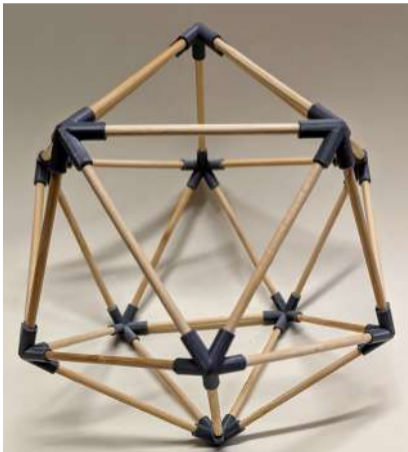
Duale

**dodecaedro**

Elemento (Platone)

# Icosaedro

---



Vertici (V)	<b>12</b>
Spigoli (S)	<b>30</b>
Facce (F)	<b>20 triangoli equilateri</b>
Per vertice	<b>5 facce</b>
Duale	<b>dodecaedro</b>
Elemento (Platone)	<b>acqua</b>

# Formula di Eulero

$$V - S + F = 2$$

Per ogni poliedro convesso la quantità  $V - S + F$  è costante e vale 2: si tratta di un *invariante* detto **caratteristica di Eulero**.

Solido	V	S	F	$V - S + F$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Ottaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

Formulata da L. Eulero (1758); anticipata da R. Cartesio in *De solidorum elementis* (c. 1630, manoscritto pubblicato nel 1860).

# Poliedri archimedei

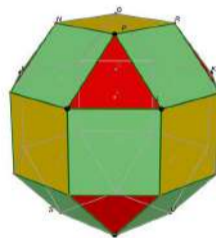
## Definizione

Poliedri convessi le cui facce sono poligoni regolari di due o più tipi e in cui ogni vertice presenta la stessa configurazione di facce. Soddisfano dunque le condizioni (1) e (3) della Proposta 6 di Villani, ma non la (2).

## Sono esattamente 13.

<i>Tetraedro troncato</i>	<b>3.6.6</b>	4 tri. + 4 esa.
<i>Cubottaedro</i>	<b>3.4.3.4</b>	8 tri. + 6 qua.
<i>Cubo troncato</i>	<b>3.8.8</b>	8 tri. + 6 ott.
<i>Ottaedro troncato</i>	<b>4.6.6</b>	6 qua. + 8 esa.
<i>Icosidodecaedro</i>	<b>3.5.3.5</b>	20 tri. + 12 pen.
<i>Icosaedro troncato</i>	<b>5.6.6</b>	12 pen. + 20 esa.

... e altri 7 (rombicubottaedro, cubo camuso, rombicoidodecaedro, dodecaedro camuso, dodecaedro troncato, icosidodecaedro troncato, cubottaedro troncato).



# Uso religioso, mistico e filosofico

---

- **Platone**, *Timeo* 52–55: associazione con i quattro elementi (tetraedro–fuoco, cubo–terra, ottaedro–aria, icosaedro–acqua) e con il cosmo (dodecaedro)
- **Keplero**, *Mysterium Cosmographicum* (1596): modello cosmologico in cui le orbite dei sei pianeti allora noti sono determinate dai cinque solidi inscritti e circoscritti l'uno nell'altro
- **Geometria sacra**: i cinque solidi compaiono in tradizioni religiose, ermetiche ed esoteriche.

# Riferimenti

---

- V. Villani, cap. 21 “Poliedri”. *Riferimento principale* per definizioni, controesempi, formula di Eulero.
- Euclide, *Elementi*, libro XIII (c. 300 A.C.).
- Platone, *Timeo* 52–55 (c. 360 A.C.).
- J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum* (1596).
- L. Euler, *Elementa doctrinae solidorum* (1758).