UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TORINO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO

SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Le isometrie del piano affrontate in maniera innovativa per mezzo delle Klein vignettes

Relatrice: Robutti Ornella

Candidata: Belliardo Michela

2022/2023

INDICE

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa tesi è presentare materiale fruibile da insegnanti e studenti nel contesto scolastico in riferimento alla vignetta Klein intitolata "Symmetry step by step". Nel dettaglio, il lavoro che ho svolto nelle pagine seguenti è stato quello di cucire una sorta di filo rosso tra una serie di attività riguardanti le isometrie nel piano, al fine di costruire un libretto di accompagnamento che in qualche modo possa guidare ed essere utile in particolar modo agli insegnanti nell'introdurre queste attività didattiche in classe.

Il mestiere dell'insegnante è molto articolato e sicuramente non si limita all'esporre gli argomenti alla classe attraverso lezioni frontali; come affermato da Chevallard, infatti, il docente deve operare una trasposizione didattica, ovvero adattare il sapere in oggetto di insegnamento, tenendo conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale in cui agisce. Per svolgere questa operazione non è sufficiente conoscere a pieno la materia, ma è anche necessario compiere uno studio attento e puntiglioso delle tematiche in questione, nonché delle modalità e delle metodologie attraverso le quali si ha intenzione di portare tali argomenti in classe.

Dall'altro lato, poi, l'allievo ha un ruolo attivo; egli riceve e fa proprie le informazioni giungendo all'obiettivo finale: l'apprendimento. Un altro tassello importante su cui lavorare è quindi quello relativo alla partecipazione dello studente; renderlo curioso e desideroso di esplorare è fondamentale se l'obiettivo finale è la competenza e non solo la conoscenza sull'argomento.

Inoltre, in vista della futura professione di insegnante che ambisco a svolgere, questo tipo di tematica ha rappresentato per me un'occasione per arricchire le mie competenze in materia e mi ha stimolata ulteriormente per quanto riguarda la visione che ho dell'insegnamento e del modo con cui vorrò andare a lavorare con i miei futuri studenti.

La mia esperienza scolastica è stata caratterizzata in gran parte da un tipo di insegnamento frontale, raramente ho avuto modo di lavorare in maniera alternativa e devo dire che quando, negli ultimi anni e soprattutto nei corsi di Didattica, mi sono interfacciata con docenti e metodologie differenti inizialmente è stato complicato adattarsi, ma allo stesso tempo mi sono sentita sin da subito molto più spronata. Da un lato, infatti, la novità mi ha disorientata; in particolare, una delle metodologie che più mi è rimasta impressa è quella del lavoro di gruppo. Essendo abituata a lavorare per lo più in maniera individuale, non è stato facile interfacciarsi con altri studenti, con idee e modi di ragionare diversi; tuttavia, con il tempo ho avuto modo di apprezzare particolarmente questo tipo di approccio. Potrebbe sembrare una banalità, ma è incredibile quanto lavorare con altre persone nel tentativo di apprendere collettivamente possa essere stimolante, nonché un'occasione per interagire e aprire la propria mente.

In aggiunta, il fatto di toccare con mano le tematiche trattate, avere la possibilità di scoprire passo a passo, facendo un gran numero di congetture e confutandone altrettante, mi ha permesso di svolgere un lavoro sugli argomenti trattati che non fosse soltanto quello di imparare la lezione in maniera superficiale, ma di entrare nel vivo della tematica, ponendomi domande e cercando di trovare soluzioni sia a livello individuale, che con il contributo di idee altrui.

Tutto questo mi ha fatto spesso riflettere negli ultimi anni e mi sono posta molti quesiti; come voglio affrontare il mio futuro da docente? Che cosa voglio lasciare? Come posso dare il mio contributo nello smuovere la situazione attuale e dare il mio aiuto nel promuovere modalità e metodologie rivoluzionarie? Che rapporto voglio instaurare con i miei futuri allievi? Voglio renderli partecipi e farli sentire coinvolti? Come posso fare? Quest'ultima domanda più di tutte ha più volte rappresentato una sorta di rompicapo; tanti didattici di professione e studiosi si sono occupati delle possibili vie di comunicazione che un insegnante ha a disposizione e le teorie al riguardo sono innumerevoli, ma esiste una regola, un libretto di istruzioni per portare in classe queste idee così innovative? La risposta che mi sono data è che non esiste un unico percorso; ogni docente è diverso, così come ogni studente con cui ha a che fare, ogni classe ha le sue particolarità e di conseguenza necessità differenti da tutte le altre, motivo per il quale è importante a mio avviso che l'insegnante costruisca mano a mano il modo di insegnare, essendo sempre aperto a nuove idee e disposto ad imparare egli stesso a sua volta dai propri studenti.

Questa breve digressione personale credo che spieghi il perché di questo lavoro; per quanto non esista una ricetta prescritta su che tipo di metodologie e attività svolgere in classe è importante avere ampia disponibilità e scelta.

Le vignette del progetto internazionale Klein sono delle brevi storie che trattano di un argomento di matematica contemporanea e hanno un ruolo determinante in questo senso, in quanto offrono ai docenti la possibilità di cambiare le cose e affrontare le tematiche in classe in maniera originale.

Il punto di partenza del mio lavoro è stato dunque il progetto Klein, di cui tratterò in maniera più approfondita nel capitolo 1, e le relative vignette; queste ultime sono brevi scritti che illustrano uno specifico tema della matematica, nel nostro caso, le isometrie del piano. In particolare, si tratta di scritti che si inseriscono in un contesto internazionale e le varie vignette sono riportate in lingua inglese, anche se per alcune di esse sono disponibili traduzioni anche in altre lingue.

A questo punto mi sono informata riguardo alla vignetta in questione dal punto di vista nazionale; ho dapprima cercato di operare una traduzione io stessa e devo dire che non è stato semplice. Se da un lato mi ha dato modo di entrare maggiormente nel vivo della tematica e di comprendere meglio che cosa fosse una vignetta Klein, dall'altro lavorare su questo breve scritto nel tentativo di esprimerlo in lingua italiana mi ha fatto realizzare come non sia sufficiente una traduzione parola per parola per svolgere un lavoro che sia completo; di fondamentale importanza è avere chiaro l'argomento trattato e parafrasare il testo spingendosi al di sotto della superficie rappresentata dalle singole parole.

Da qui ho provveduto a leggere con attenzione la traduzione da me svolta affiancandola a quella disponibile sul sito del Liceo Matematico; questo passo è stato fondamentale, in quanto mi ha permesso di farmi un'idea sempre più chiara riguardo alle vignette Klein. Una particolarità che subito mi è saltata all'occhio per quanto riguarda la vignetta relativa alle isometrie del piano è che sin dalle prime righe non si parla di queste ultime in maniera astratta; l'argomento viene introdotto parlando di arte, architettura, ingegneria, scienze e questo filo conduttore permane per tutta la trattazione. Viene fatto uso di foto relative a pavimentazioni situate in Portogallo e altre città e questo crea immediatamente un legame tra il mondo fisico, reale e il contesto matematico, andando in qualche modo contro il misconcetto comune per cui la matematica è

qualcosa di lontano dalla realtà, caratterizzata da teoremi e dimostrazioni che non hanno nulla a che vedere con la vita di tutti i giorni.
Successivamente ho analizzato le varie attività didattiche proposte sul sito del Liceo Matematico; esse sono suddivise in 6 macroargomenti e per ognuno di essi vengono fornite più schede relative ad abilità e competenze differenti. Per ogni attività sono presentate due schede, una destinata agli studenti, contenente diversi quesiti sui quali la classe deve lavorare, e una per il docente, con una serie di indicazioni che hanno lo scopo di fornire un ausilio per l'insegnante.
Il mio compito è stato quello di esaminare le varie schede, in particolar modo quelle relative al docente, nel tentativo di trasformare il sito e la documentazione a disposizione in un testo scritto che contenga tutte le informazioni utili per usufruire del materiale suddetto in maniera ottimale. Ma non solo; nell'ottica di realizzare materiale che possa aiutare i docenti nell'introdurre ai loro studenti una serie di attività didattiche incentrate su vari temi che riguardano in generale le isometrie del piano, il mio ruolo nella stesura di questo elaborato è stato anche quello di approfondire l'argomento, inserendolo in un contesto istituzionale e culturale ben preciso. Nel dettaglio questi laboratori possono essere impiegati per diversi fini; per introdurre un argomento in maniera alternativa e stimolante, piuttosto che per permettere agli allievi di consolidare le loro competenze su argomenti già trattati in precedenza.
Un'ulteriore peculiarità della seguente trattazione è rappresentata dall'attenzione posta sulle metodologie impiegate in classe, motivo per il quale ciò che ho fatto è stato aggiungere maggiori dettagli riguardo al procedimento suggerito nello svolgere le attività presentate, sfruttando le conoscenze e competenze che ho avuto modo di acquisire durante il mio percorso scolastico riguardo al tema.
La mia trattazione si articola in 7 capitoli.
Nel primo ho mostrato in maniera argomentativa come si inserisce il progetto Klein a livello istituzionale, andando a parlare dell'impatto dei lavori dei ricercatori sulla società e in particolar modo sulla scuola. Nel dettaglio ciò che ho voluto fare è stato inquadrare questo progetto dentro il Public Engagement dell'Università di Torino, dapprima spiegando di che cosa si tratta e successivamente andando a mostrare come questo tipo di progetto si inserisca in questo ambito.
Dall'altra parte ho voluto introdurre l'argomento dal punto di vista culturale, cercando di spiegare il lavoro di sforzo che sta dietro all'inserimento delle vignette Klein nell'ambiente scolastico. In questa ottica ciò che ho fatto è stato dare una ratio di quello che si sta cercando di fare con questi brevi scritti, mettendo in luce la compatibilità del materiale in questione con quanto riportato nelle Indicazioni Nazionali.
Successivamente ho dedicato un capitolo per ognuno dei cinque argomenti sui quali sono disponibili le schede delle attività: traslazione, simmetria assiale, rotazione, glissosimmetria, composizione di isometrie e infine ho destinato un capitolo alle ultime tre attività presenti sul sito del Liceo Matematico. Queste ultime non trattano di un tema in particolare, ma riguardano vari approfondimenti e ulteriori problemi che il docente può proporre alla classe relativamente alle tematiche affrontate nelle altre schede.
Nel dettaglio ogni capitolo prevede una breve introduzione in cui analizzo brevemente l'argomento in questione, focalizzandomi sulle modalità che solitamente vengono impiegate

per introdurlo in classe, sui possibili misconcetti che si possono creare e su come l'attività in questione può agevolarne l'eliminazione.
Successivamente mi concentro su ognuno dei tre livelli di competenza in cui sono suddivise le attività: "esplora e congettura", "scopri, classifica e generalizza" e "risolvi problemi, argomenta e dimostra". Per ognuna di esse riporto la scheda relativa allo studente e, rimanendo fedele a quanto riportato nella scheda destinata al docente, descrivo, spiego e giustifico le metodologie utilizzate, andando ad arricchire e ad aggiungere spunti che possono essere utili per tutti quei docenti che hanno intenzione lavorare in classe con le vignette e le schede ad esse associate.
Dunque, qual è lo scopo ultimo di questo lavoro? Personalmente, ritengo che le vignette Klein siano un validissimo strumento da utilizzare in classe e che le attività proposte siano progettate appositamente per stimolare lo studente non solo all'apprendimento del contenuto matematico presentato nella vignetta, ma più in generale ad avere spirito di iniziativa di fronte a qualsiasi tipo di problema, anche della vita quotidiana. Per questo motivo, la mia speranza è che un numero sempre maggiore di insegnanti si cimenti nell'utilizzo di questo tipo di materiali con i propri studenti e il mio contributo in quest'ottica è stato quello di arricchire il materiale esistente, aggiungendo suggerimenti, spunti e fornendo appunto un ausilio a tutti coloro che ne vorranno fare uso.

CAPITOLO 1

IL PROGETTO KLEIN COME PROGETTO DI PUBLIC ENGAGEMENT DELL'UNIVERSITA' DI TORINO

1.1 Public Engagement: un termine nuovo e difficile da concettualizzare

Il concetto di Public Engagement è stato oggetto di analisi e studi molto diversificati tra loro nel corso degli anni; in particolare, è un termine la cui definizione risulta essere non banale. Nella letteratura si trovano diverse opinioni e caratterizzazioni di PE. Questo è dovuto principalmente al fatto che esso rappresenta un termine con diverse sfaccettature e sfumature, la cui implementazione è legata e influenzata da diversi fattori. La ricerca sul PE ha tentato in diversi modi di oltrepassare l'ostacolo rappresentato dalla mancanza di definizioni chiare relative al suddetto concetto, ma tali tentativi sembrano spesso portare all'adozione di una visione limitata del PE, che potrebbe non sempre combaciare con la realtà di coloro che lo praticano.

Questo tipo di pensiero è fortemente diffuso nella comunità accademica e in letteratura si possono riscontrare parecchie testimonianze di quanto detto poc'anzi. Hauke Riesch, Clive Potter e Linda Davies nell'articolo intitolato *"What Is Public Engagement, and What Is It for? A Study of Scientists' and Science Communicators' Views"* hanno domandato a scienziati e comunicatori scientifici quale fosse il loro punto di vista sul significato di PE e, traducendo le parole riportate dagli autori:

> "Fairly often an initial reaction to that question was that PE was difficult to define and/or that there are many different ways of doing it and different aims for what it should achieve." (Riesch, Potter & Davies, 2016, p. 182)

Nell'articolo intitolato "*Public engagement with science—Origins, motives and impact in academic literature and science policy*", Peter Weingart, Marina Joubert e Karien Connoway riflettono sulla vaghezza delle definizioni date e presenti in letteratura di PE relativo alla scienza:

> "It is apparent in the virtual absence of any clear definition of what 'engagement' is supposed to mean. […] È evidente la quasi totale assenza di una chiara definizione di cosa si suppone che significhi 'engagement'. [...] The vagueness of definitions of 'engagement' is further reflected in the virtual non-existence of specific concepts of the 'public(s)' to engage with science, other than alluding to 'citizen or stakeholder groups', or 'non-scientists'." (Weingart, Joubert & Connoway, 2021, p. 22)

Viene quindi evidenziato che, anche scomponendo il termine e analizzando singolarmente i due concetti che lo costituiscono, non è semplice riuscire a trovare una definizione che in modo univoco metta in evidenza l'essenza del PE. Traducendo letteralmente Public Engagement

significa impegno pubblico; ma cosa si intende per impegno? E a che tipo di pubblico ci si vuole rivolgere? Il PE, infatti, riguarda l'impegno della comunità accademica nel creare un legame con la società, condividendo diversi tipi di argomenti prettamente accademici anche con coloro che non hanno una relazione diretta con l'università. L'obiettivo è quello di favorire lo sviluppo di nuove competenze, il raggiungimento di idee innovative e originali, la promozione di forme di coproduzione che supportino una netta valorizzazione della ricerca.
La difficoltà nel riuscire a trovare una definizione che rispecchi a pieno la valenza di tale termine ha molteplici cause; prima fra tutte la miriade di attività e iniziative che rientrano in questo tipo di visione. Richard Watermeyer e Jamie Lewis nell'articolo dal titolo "*Public engagement in higher education: the state of the art*" sembrano essere in accordo con quanto detto poc'anzi:

> "On the surface, public engagement is a term that covers a smorgasbord of activities. From science cafés to school partnership programmes, from public lectures to public deliberations, from arts echibitions to community performances, public engagement is used to describe a variety of events aimed at bringing those outside of or unconnected to the university closer. To this end, public engagement is a promiscuous strategy, penetrating many specialisms and agendas." (Watermeyer & Lewis, 2015, p. 44)

Sebbene per molti sembri non esistere una definizione del tutto soddisfacente di PE, nella letteratura si trovano numerose caratterizzazioni di tale concetto. L'aspetto che più di altri contraddistingue il PE è rappresentato dal ruolo di connessione che esso ricopre; nel dettaglio, le iniziative e le attività di PE svolte da scienziati, docenti universitari, ricercatori e accademici sono volte a colmare un divario che negli anni è diventato sempre più evidente tra gli esperti e le loro comunità pubbliche. In questo senso il PE rappresenta un meccanismo di trasmissione per garantire che la ricerca accademica e i risultati ottenuti in tale ambito abbiano la possibilità di raggiungere un pubblico sempre più ampio e non esclusivamente accademico, in modo tale da avere un reale impatto sull'economia e sulla società. Spesso, infatti, il termine ricerca viene associato ad ambiti elevati, lontani in qualche modo dalla società civile. Chi fa ricerca sono gli studiosi, i docenti universitari e gli oggetti di studio di cui trattano questi ultimi vengono sovente visti come argomenti che poco hanno a che fare con la vita quotidiana e, in particolare, spesso si crea il misconcetto secondo il quale i temi di cui si occupano i ricercatori sono troppo difficili da apprendere e comprendere. Al contrario, per quanto possano risultare ostici tali argomenti possono e devono essere introdotti nella società.
A tale proposito Richard Watermeyer e Jamie Lewis, nell'articolo citato sopra, fanno uso di una metafora interessante e paragonano le università a delle torri d'avorio:

> "The ivory tower in the contemporary milieu is a metaphor for universities being divorced from and disinterested in the ordinary lives of people, being excessively esoteric, elitist and self-aggrandising and undertaking work that is seen to be of little value and practical worth." (Watermeyer & Lewis, 2015, p. 42)

Il ruolo del PE e delle numerose attività ad esso associate è centrale nell'ottica di eliminare questo divario e rassicurare la società riguardo all'importanza della ricerca e alle innovazioni apportate da quest'ultima. Hauke Riesch, Clive Potter e Linda Davies sostengono che:

> "PE in that sense could then be thought of as public relations for science. It was frequently thought that PE can break barriers by taking the 'mystique' out of science and that it can help the public realize that science isn't so hard or alien and that it's all around them and relevant to their lives." (Riesch, Potter & Davies, 2016, p. 183)

In questo senso, dunque, il PE rappresenta un ponte, con il quale si mira a contrastare le critiche nei confronti degli accademici e le perplessità sui temi della ricerca. È evidente l'esistenza di una barriera tra la scienza e il pubblico e molti studiosi ritengono che il PE possa essere di enorme aiuto nell'abbattimento di quest'ultima.

Una delle ragioni che potrebbero aver contribuito alla formazione di tale divario sembrerebbe essere il PE stesso. Quest'ultimo, infatti, è un concetto che si è evoluto nel tempo e la cui implementazione ha cambiato forma nel corso degli anni. Nella letteratura vi sono diverse testimonianze di un tipo di approccio al PE che ha allontanato la scienza dal suo contesto sociale e culturale. All'interno di tale modello deficitario, il pubblico viene concepito come prevalentemente analfabeta dal punto di vista scientifico e di conseguenza il PE diventa un processo di comunicazione unidirezionale tra gli scienziati e i ricercatori da un lato e il pubblico e la società dall'altro. Questa modalità viene criticata da tutti coloro che sostengono che ci sono prove che dimostrano il ruolo non passivo del pubblico e che hanno espresso preoccupazione nei confronti degli accademici che percepiscono il PE come un modo per istruire ed educare un pubblico più o meno insensibile.

Negli anni è emersa la necessità di surclassare questo tipo di approccio e di lasciare il campo a un altro tipo di modello, che incarnasse meglio l'essenza del PE e si allineasse all'obiettivo principale per cui viene implementato. In quest'ottica, il PE vuole fungere da collante tra il mondo accademico e la società e in vista di questo l'implementazione del PE deve prevedere un dialogo molto più reciproco tra esperti e pubblico. In questo senso, questi ultimi si influenzano a vicenda e il dialogo viene visto come un dare e avere, che consente l'apprendimento reciproco in un flusso di informazioni bidirezionale. È in questo tipo di visione più dialogica che il PE può concretamente essere utile nell'avvicinare il mondo accademico alla società ed è a questo tipo di caratterizzazione del PE che si dovrebbe aspirare.

Come è già stato ampiamente ribadito il termine 'Public Engagement' possiede una vasta gamma di concettualizzazioni. Questo è direttamente proporzionale al fatto che esistono più modelli per la sua implementazione, che comprendono una grande varietà di attività che hanno diversi tipi di target, tra i quali, per fare qualche esempio, troviamo il mondo della scuola, la società, tutti i cittadini, il mondo dell'industria. Peter Weingart, Marina Joubert e Karien Connoway, nell'articolo già citato in precedenza intitolato *"Public engagement with science—Origins, motives and impact in academic literature and science policy"*, eseguono un'analisi interessante; dopo aver selezionato un campione di articoli scientifici che trattano di PE, tentano di caratterizzare quest'ultimo termine andando a cercare definizioni esplicite o implicite di 'engagement' nel materiale suddetto.

Il risultato è una concettualizzazione del PE costituita da una serie di definizioni date in termini di diversi fattori; in questo senso tale caratterizzazione da un lato riprende parte del discorso fatto finora su alcune delle peculiarità del PE, dall'altro chiude il cerchio dando un quadro completo del concetto di PE. Nel dettaglio, nonostante in letteratura si trovino più definizioni del termine 'Public Engagement' e benché questo rappresenti ancora oggi un'area di dibattito tra ricercatori e scienziati, gli autori sostengono che è possibile caratterizzare il PE in modo implicito. Nell'articolo in questione tale operazione viene svolta prendendo in considerazione tre elementi strettamente legati al PE, nonché interconnessi a loro volta: gli obiettivi del PE, il ruolo del pubblico a cui ci si rivolge e infine la tipologia di attività che viene progettata per implementare il PE.

Il punto di partenza, dunque, rimane l'interrogativo: che cos'è il Public Engagement? Appurata però la difficoltà nel rispondere a tale domanda in maniera esaustiva, gli autori scelgono di non focalizzarsi sul *che cosa* sia il PE, adottando una visione più ampia del termine. Questo tipo di approccio sposta il focus su altri interrogativi: *perché* si fa PE? A *chi* è rivolto? *Come* lo si implementa?

In questo modo gli autori riescono a dare un'identità al PE, caratterizzandolo in maniera chiara e definendolo in maniera implicita come l'insieme di iniziative proposte a

> "'non-scientific' or 'individuals who are not associated with any scientific discipline or area of inquiry as part of their professional activities', 2hard to reach voices that are commonly excluded from public debates', and children." (Weingart, Joubert & Connoway, 2021, p. 12)

con l'obiettivo di raggiungere una

> "'greater visibility and transparency of academic work and increased academic accountability' or 'bringing inclusiveness, transparency, diversity and creativity into the research and innovation process." (Weingart, Joubert & Connoway, 2021, p. 11)

Le modalità di implementazione sono diverse e le attività che rientrano in quest'ottica sono tra le più disparate; tuttavia, ciò che le accomuna è l'attenzione posta sul carattere dialogico e interattivo delle azioni svolte. In questo senso si sottolinea la diversità del PE dalla semplice comprensione pubblica della scienza; al contrario, una peculiarità del PE è proprio quella di garantire una conversazione tra le parti che partecipano attivamente, in modo da creare connessioni che garantiscano il beneficio reciproco e l'abbattimento delle barriere.

Tra le azioni che si possono svolgere a tale fine figurano la partecipazione a conferenze pubbliche o nelle scuole, festival scientifici, giornate aperte, interviste rilasciate a giornali, radio o televisione, la pubblicazione di libri o articoli, la partecipazione a dibattiti pubblici, la collaborazione con organizzazioni governative (ONG), associazioni e industrie, la creazione di mezzi per la divulgazione scientifica come siti web, pubblicità o presentazioni, la progettazione di attività per le scuole. Questi sono soltanto alcuni esempi di come possa essere implementato il PE, che mette in luce l'eterogeneità delle azioni che si possono svolgere in quest'ottica.

1.2 Il coinvolgimento degli accademici e di UNITO

Nel corso degli anni un numero sempre maggiore di scienziati e docenti universitari ha scelto di dare il loro contributo impegnandosi in diverse attività di PE. Questo è direttamente legato alla crescente rilevanza che ha assunto nel tempo il concetto di PE; uno studio condotto da Martin W. Bauer e Pablo Jensen nell'articolo intitolato *"The mobilization of scientists for public engagement"* mette in luce quali sono i fattori che spingono gli scienziati ad avere un ruolo attivo nel PE e operano un'analisi sull'intensità con cui gli accademici sono coinvolti in attività di PE. A livello internazionale espongono i risultati ottenuti da uno studio svolto nel

Regno Unito, nel quale è stato chiesto agli scienziati quante volte negli ultimi 12 mesi hanno partecipato a varie iniziative di PE. I dati ottenuti permettono di concludere che il 75% degli intervistati è stato coinvolto in almeno una delle attività proposte e circa il 10% può essere considerato altamente attivo, in quanto ha partecipato a 5 o più delle iniziative elencate. In media ogni scienziato ha dichiarato di essere coinvolto in 3 attività diverse tra quelle proposte. Questi risultati mettono in evidenza il fatto che il PE rappresenta per molti accademici qualcosa di concreto e che fa parte della loro realtà quotidiana. Naturalmente non è possibile generalizzare; dall'analisi svolta risulta che ancora un gran numero di accademici mostra un atteggiamento negativo nei confronti delle attività di PE. A prova di ciò gli autori citano uno studio, condotto negli Stati Uniti, da cui emerge che il 42% degli scienziati intervistati non è impiegato in nessuna iniziativa di PE:

> "Asked why, 76 percent said they did not have time, 28 percent did not want to, and 17 percent did not care." (Bauer & Jensen, 2011, p. 5)

Risulta dunque chiaro che, al di là dell'oggettiva importanza che ricopre il PE nel rappresentare un ponte tra mondo accademico e società, un fattore che più di altri influisce sul coinvolgimento in attività di PE è l'opinione personale di scienziati ed accademici. Markus Perkmanna, Rossella Salandrab, Valentina Tartaric, Maureen McKelveyd e Alan Hughesa hanno pubblicato un articolo dal titolo *"Academic engagement: A review of the literature 2011-2019"* in cui forniscono una revisione della letteratura sul PE dal 2011 in poi. Da questo studio emerge che, a livello italiano, uno dei fattori che predice il coinvolgimento degli accademici nell'ambito del PE è dato dalla convinzione secondo la quale impegnarsi con terzi e promuovere la divulgazione e la condivisione dei risultati della ricerca fa la differenza per la società, nonché per lo sviluppo economico e la promozione dell'innovazione tecnologica.
Restringendo ulteriormente il campo e spostando l'attenzione sull'Università di Torino, essa persegue una Terza Missione accanto ai due obiettivi fondamentali della Formazione e della Ricerca. Questo tipo di focus rappresenta l'impegno per favorire la valorizzazione e l'impiego della conoscenza per contribuire allo sviluppo sociale, culturale ed economico. In altre parole, l'Università si assume il compito di diffondere i risultati della ricerca al di fuori del contesto accademico, organizzando eventi destinati ad un pubblico che non sia quello tipicamente coinvolto nell'attività universitaria. Nel farlo vengono tessute linee di comunicazione sia a livello locale che a livello nazionale e internazionale con lo scopo di divulgare conoscenza al fine di migliorare la società. Tale attività passa necessariamente anche attraverso il PE; i due termini hanno infatti molto in comune ed è evidente che in questo frangente il PE non può e non deve essere considerato come qualcosa di complementare alla Terza Missione, ma al contrario rappresenta un punto fondamentale e centrale.
Negli anni sono sempre di più i docenti dei vari dipartimenti che si coinvolgono in attività di PE e fino ad ora l'Università di Torino si è molto impegnata in questo ambito. In particolare, l'Ateneo supporta e promuove svariate iniziative legate alla cultura del PE sia a livello locale che nazionale; ciò è reso appunto possibile dalla collaborazione e dal lavoro svolto da diverse personalità. Tra queste ultime troviamo non solo docenti, ma anche membri esterni all'università, come nel caso del Comitato di Ateneo per il Public Engagement "Agorà Scienza". Il nome si ispira appunto al termine greco *agorà* che nelle polis rappresentava il luogo di incontro e di partecipazione per eccellenza; ed è proprio seguendo questo tipo di

ispirazione che Agorà Scienza crea spazi e opportunità di confronto tra il mondo della ricerca e la società, offrendo possibilità di finanziamento per progetti e formazione nell'ambito del PE. Va sottolineato che non si tratta di un ente esterno all'Università, ma che al contrario ha le sue origini e si muove proprio all'interno dell'Ateneo; nel dettaglio, sono tre le parole chiave che fanno da sfondo all'operato svolto dai membri di tale centro, ovvero conoscenza, università e comunità. È già stato più volte rimarcato il ruolo determinante della conoscenza per lo sviluppo sociale, economico e culturale, così come risulta ormai chiaro il carattere inclusivo che deve assumere. L'università, in quanto fabbrica di conoscenza, rappresenta un anello di congiunzione e ha un compito ben preciso: rendere la produzione di cultura e innovazione, e dunque la conoscenza, un processo condiviso con la comunità. Agorà Scienza lavora esattamente in questo tipo di ottica, promuovendo azioni di PE che coinvolgono ricercatori, cittadini, docenti, studenti, industrie e imprese e offrendo le proprie competenze per la progettazione di varie attività di divulgazione, di formazione e opportunità per confrontarsi con diverse tipologie di pubblico, nel tentativo di creare un rapporto di fiducia tra la società e la comunità scientifica, in cui le parti collaborano attivamente per lo sviluppo collettivo esattamente come avveniva nell'antica Grecia.
Un secondo ente che rappresenta un importante mezzo attraverso il quale UNITO implementa il PE è l'Associazione APEnet, ovvero l'Associazione "Rete italiana degli Atenei ed Enti di Ricerca per il Public Engagement". Si tratta di una vera e propria unione tra diversi Enti tra cui Università, Politecnici, Scuole Superiori ed Enti di Ricerca, chiamata a rispondere ad una sfida ben precisa: diffondere, promuovere e valorizzare la cultura e le esperienze di PE.
Vista la sempre maggiore consapevolezza del fatto che le università hanno ormai assunto un'importanza rilevante nella crescita inclusiva del Paese, APEnet nasce con lo scopo di dare spazio all'ascolto, al dialogo e alla collaborazione con la società, incentivando la progettazione di svariate azioni e strumenti di condivisione. In particolare, la Rete rappresenta un'opportunità per potenziare le conoscenze e le competenze necessarie per valorizzare le esperienze di PE e si impegna nella promozione della ricerca sul PE anche attraverso la collaborazione con altre istituzioni come, ad esempio, il Ministero dell'Università e della Ricerca (MUR), il Consiglio Universitario Nazionale (CUN) e l'Agenzia Nazionale di Valutazione del Sistema Universitario e della Ricerca (ANVUR).
L'impegno nel creare connessioni tra il mondo della ricerca e la società ha assunto un'importanza sempre maggiore negli anni e il PE viene oggi riconosciuto a livello sia internazionale che nazionale come un modo efficace di rendere concreto l'impegno di cui sopra. UNITO ha naturalmente colto il messaggio e ha mobilitato varie risorse con lo scopo di promuovere e sostenere vari progetti di PE; uno di questi è la Notte Europea delle Ricercatrici e dei Ricercatori. Essa è un'iniziativa promossa da UNITO con l'obiettivo di avvicinare i cittadini al mondo della ricerca, nell'ottica di consapevolizzare la comunità riguardo all'importanza rivestita dalla ricerca scientifica nello sviluppo comune. Il programma dell'evento prevede un gran numero di attività, quali laboratori a cielo aperto, spettacoli, giochi, dibattiti e talk. Si tratta di un'iniziativa che si svolge da diversi anni e che mano a mano ha aumentato sempre di più la sua portata e coinvolto un numero sempre maggiore di personalità; questo rappresenta un'evidente prova del fatto che il PE sta acquisendo una risonanza sempre più grande nell'ambito delle strategie adottate dall'Ateneo per concretizzare un'apertura nei confronti del pubblico e della società.

Un'altra importante risorsa che UNITO ha scelto per valorizzare, condividere e promuovere la partecipazione sui temi della ricerca e che figura tra le attività che l'Ateneo si impegna a svolgere in un'ottica di PE è FRidA, ovvero Forum della Ricerca di Ateneo. Si tratta di uno spazio web, un portale in cui vengono caricati vari contenuti da esplorare quali video, racconti e podcast; questi ultimi rappresentano un modo nuovo di comunicare il progredire della conoscenza, che sono il frutto dei percorsi e dei racconti in prima persona dei ricercatori. In quest'ottica, la ricerca viene presentata come qualcosa di continuo, fatto soprattutto di piccoli traguardi che mano a mano diventano nuovi punti di partenza, qualcosa che si costruisce gradualmente e che prende forma grazie alla collaborazione di diverse voci che lavorano in stretta sinergia.

All'interno di questo portale il materiale a disposizione è eterogeneo; si possono trovare proposte di lettura, in cui i ricercatori affrontano in maniera approfondita un determinato tema, testimonianze di incontri tra ricerca e società, come laboratori progettati per le scuole, progetti svolti in collaborazione con imprese, nascita di startup, e ancora mostre e spettacoli.

In questo frangente sono stati pubblicati sul portale 14 progetti di Terza Missione e questo concetto, come già anticipato, ha molte caratteristiche in comune con il PE; tra queste figura la volontà di valorizzare l'impatto culturale, sociale ed economico della ricerca.

Tra i progetti suddetti uno in particolare è coordinato da Ornella Robutti, docente del Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano"; si tratta del progetto SSPM (Scuole Secondarie Potenziate in Matematica).

In letteratura si trovano svariate testimonianze riguardo al PE in ambiti quali il clima, la medicina e la scienza in generale. La ricerca bibliografica si complica nel momento in cui si associa il PE a una disciplina in particolare: la matematica. È chiaro che, quando si parla di scienza si fa riferimento anche alla matematica, ma per tentare di dare una definizione, o quanto meno una caratterizzazione, del PE in ambito prettamente matematico ciò che si trova in letteratura può risultare talvolta fuorviante. Nonostante ciò, il Dipartimento di Matematica ha avviato nel corso degli anni numerosi progetti di PE volti alla realizzazione di legami tra la comunità di ricercatori in matematica e la società, le industrie e soprattutto le scuole; un paradigma di quanto detto poc'anzi è appunto rappresentato dal progetto SSPM. Quest'ultimo si articola su due piani paralleli; da un lato si vuole lavorare sulla formazione degli insegnanti, svolta dai ricercatori che collaborano a tale progetto, dall'altro ci si occupa della formazione degli studenti svolta dagli insegnanti stessi. Attraverso questo duplice operato si vuole andare a lavorare sul misconcetto comune secondo cui la matematica è fatta di calcoli, simboli, problemi complessi e dimostrazioni presentando un'immagine della disciplina del tutto diversa. Nel dettaglio, la matematica in questo progetto diventa qualcosa di strettamente legato all'indagine, alla scoperta e alla creatività; in questo modo si vuole promuovere un tipo di apprendimento attivo e inclusivo, che avvicina gli studenti al mondo della ricerca e alla quotidianità di coloro che operano in questo campo ed è proprio in vista di questo che può essere considerato a tutti gli effetti un progetto di PE.

Queste sono soltanto alcune delle numerosissime attività e iniziative avviate e sostenute da UNITO nell'ambito del PE e offrono un importante spunto di riflessione su quanto la Terza Missione e di conseguenza il PE abbiano assunto una sempre maggiore rilevanza nello scenario universitario, coinvolgendo personalità di vario genere e spingendo gli accademici ad abbattere i muri dell'università, con lo scopo di forgiare relazioni reciprocamente significative con industrie, scuole e più in generale con la comunità.

1.3 Il progetto Klein dalle origini all'idea di "vignettes"

In questa tesi mi occupo di mostrare come il progetto Klein Italia si colloca come progetto di PE che ha coinvolto due docenti dell'Università di Torino del Dipartimento di Matematica, Ornella Robutti e Ferdinando Arzarello, con una squadra di professori universitari e docenti della scuola che hanno lavorato su due vignette Klein.
Questa iniziativa prende origine da un progetto internazionale, ovvero il progetto Klein, patrocinato dall'IMU (Unione Matematica Internazionale) e dall'ICMI (Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica), nato nel 2008 con lo scopo di introdurre i docenti ai recenti sviluppi della matematica e creare un collegamento tra questi ultimi e il lavoro svolto in classe con gli studenti. Tale obiettivo viene perseguito attraverso la produzione di risorse che riguardano temi di matematica contemporanea finalizzati agli insegnanti della scuola secondaria.
Ma perchè Klein? Il progetto si ispira a tre famosi volumi redatti dal matematico tedesco intitolati *"Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore"*. Questi ultimi sono espressamente dedicati dall'autore alla formazione degli insegnanti di matematica e in essi viene rimarcata l'importanza di utilizzare strumenti e modelli nell'insegnamento della matematica.
Il tema dell'insegnamento della matematica occupa una posizione centrale all'interno degli studi di Klein; le idee che emergono dai suoi scritti e dalle conferenze tenute sono molteplici ed estremamente all'avanguardia per l'epoca. In particolare, ciò a cui ambisce il matematico tedesco è un'istruzione unificata in cui le varie discipline convivano armoniosamente l'una con l'altra. Al fine di raggiungere tale obiettivo egli focalizza i suoi studi sul miglioramento della formazione degli insegnanti e propone di favorire un'istruzione più improntata ad un approccio pratico, nel tentativo di trovare un equilibrio tra l'ideale scientifico di una formazione culturale superiore e le necessità della vita pratica. In quest'ottica, è di fondamentale importanza che la conoscenza venga introdotta nelle classi senza che si perda la logica della conoscenza stessa. In altre parole, non si deve mai perdere di vista il perché determinati argomenti vengono insegnati, la loro importanza non solo a livello teorico e astratto, ma anche e soprattutto a livello pratico e concreto, altrimenti si rischia di ottenere quella che Chevallard definisce un'educazione "monumentalistica", in cui gli studenti sono invitati a contemplare corpi di conoscenza le cui logiche sono scomparse nel tempo. Quest'ultima tipologia di insegnamento va scongiurata, al fine di impedire che nella mentalità degli studenti si instauri il paradigma "matematica = qualcosa di inutile nella vita quotidiana". Ed è proprio questo il tipo di pensiero che abbracciano i collaboratori e i partecipanti al progetto Klein. Esso nasce con lo scopo di creare un ponte tra la matematica che i docenti sono chiamati ad insegnare in classe e il mondo della ricerca insieme a tutte le applicazioni contemporanee delle scienze matematiche, e per raggiungere tale obiettivo è necessaria una totale sinergia tra matematici ed educatori.
Sebbene all'inizio il progetto nasce con l'idea di produrre una versione moderna del libro di Klein con un CD, in un secondo momento si riconosce la necessità non tanto di operare una riscrittura in chiave moderna dei volumi, quanto più di rivisitarli in qualche modo. Un gran

numero di ricercatori e insegnanti si sono uniti a questa voce nel corso degli anni e l'iniziativa si è sempre di più espansa; sono stati organizzati diversi seminari in varie parti del mondo e grazie alla collaborazione di molte personalità si è giunti all'idea di "vignettes". Queste ultime rappresentano lo strumento principale attraverso il quale opera il progetto Klein; esse sono delle storie matematiche, tipicamente brevi (meno di 10 pagine), in cui viene affrontato un singolo argomento di matematica riguardante gli ultimi 100 anni e rappresentano un modo diverso dal solito di introdurre e trattare un contenuto matematico; uno degli scopi è infatti quello di illustrare in modo stimolante e innovativo specifici temi della matematica che potrebbero trovare spazio nei programmi tradizionali. Nel dettaglio, ogni vignetta deve avere una serie di caratteristiche che riguardano tanto la struttura quanto lo stile. La classica vignetta, oltre ad essere breve, deve anche essere leggibile; il flusso narrativo deve dunque essere appropriato al contesto e ai destinatari. In altre parole, se da un lato è necessario che nella vignetta sia presente un collegamento alla ricerca, che può riguardare le applicazioni degli ultimi 100 anni piuttosto che una visione nuova sulla matematica classica, dall'altro deve essere contestualizzata all'interno della classe. Dunque, è di fondamentale importanza che all'interno della vignetta sia presente anche un legame con la matematica della classe; è questo il vero anello di congiunzione che permette l'implementazione e l'utilizzo concreto della vignetta in classe e che funge da ausilio per i docenti nel pensare alla matematica che insegnano sotto un quadro differente.
Un'altra caratteristica fondamentale della vignetta riguarda l'incipit; è di fondamentale rilevanza che ognuna di queste storie matematiche abbia un paragrafo di apertura che invogli il lettore a continuare a leggere. In particolare, all'interno di ogni vignetta c'è uno stimolo su qualcosa che sembra non c'entrare con la matematica, poi mano a mano che si procede con la lettura viene introdotto il tema matematico di interesse e lo si approfondisce. In questo senso le vignette Klein non devono essere viste come delle risorse da utilizzare in classe, bensì come delle fonti di ispirazione a cui i docenti possono attingere per rinfrescare e arricchire le proprie conoscenze matematiche. Queste storie matematiche vogliono rappresentare una sfida per gli insegnanti, spingendoli a mettere in discussione loro stessi e ciò che insegnano, favorendo lo sviluppo di un buon insegnamento in un contesto di didattica innovativa. Uno dei motivi per cui vengono prodotte le vignette Klein, infatti, è proprio quello di presentare la matematica come una disciplina dinamica e viva, nella quale l'indagine e la scoperta hanno un ruolo significativo.
L'altro messaggio che si vuole trasmettere è quello che riguarda la stretta connessione esistente tra matematica, scienza e tecnologia; solitamente, infatti, la prima viene concepita come rappresentante la parte più teorica, mentre alle altre due, in particolar modo alla tecnologia, viene associato un carattere più applicativo e pratico e questa può essere un'idea condivisa per certi versi. Ciò che però va scongiurato è la formazione di un divario tra queste due sfere, ed è importante per l'insegnante lavorare in classe in modo da far toccare con mano ai propri studenti che teoria e applicazioni sono due facce della stessa medaglia.
Le vignettes hanno inoltre lo scopo di comunicare come lavorano i matematici; nell'ottica di quanto detto poco fa è fondamentale che gli studenti comprendano come si giunge ad una teoria matematica. Diventa centrale in questo frangente il concetto di epistemologia, che ancora una volta è strettamente correlato ai lavori di Klein; infatti, il matematico tedesco ha trattato più volte delle modalità attraverso le quali avviene la produzione matematica. Secondo Klein,

l'intuizione ha un ruolo determinante nei processi di ragionamento, in quanto il suo valore euristico permette al matematico di elaborare nuove idee osservando la realtà che lo circonda:

> "I maintain that mathematical intuition […] is always far in advance of logical reasoning and covers a wider field." (Klein, 1896, p. 246)

Solo in un secondo momento subentra la necessità di dimostrazioni che giustifichino in modo rigoroso e sistemino logicamente quanto precedentemente convenuto. In altre parole, il matematico sviluppa idee ed elabora congetture analizzando ciò che gli sta intorno, operando un processo di idealizzazione per poter trattare matematicamente gli oggetti coinvolti e successivamente procede con la formalizzazione rigorosa. Nel lavoro che solitamente si svolge in classe spesso si perde la prima parte di questo processo, per questo motivo è importante far sperimentare agli alunni la scoperta, permettere loro di mettersi alla prova, procedere per prove ed errori, constatando autonomamente il potere di un'idea "furba".

Questo tipo di lavoro in classe è caratterizzato dalla riduzione al minimo dei tecnicismi, nel tentativo di portare gli alunni a ragionare in modo elastico, uscendo dagli schemi. In questo frangente l'interdisciplinarità gioca un ruolo fondamentale; il fatto di collegare contenuti matematici con argomenti riguardanti altre discipline è qualcosa che nel sistema scolastico odierno non viene sempre visto di buon occhio. Al contrario, però, questo tipo di approccio ha molteplici vantaggi; da un lato stimola ad affrontare un argomento a 360 gradi, esplorandolo da diversi punti di vista e inserendolo in diversi contesti, dall'altro rende il tema più accattivante.

Quest'ultimo aspetto riguarda gli studenti chiaramente, che si sentono maggiormente coinvolti quando un contenuto viene affrontato non solo dal punto di vista matematico, ma anche gli insegnanti stessi. Il discorrere di un tema in classe inserendolo in ambiti come ad esempio l'arte, l'architettura, la musica permette di creare un intreccio con la cultura dell'insegnante, che in questo modo ha la possibilità di andare oltre quello che già sa ed imparare egli stesso qualcosa di nuovo.

1.4 Dall'internazionale al nazionale: il progetto Klein Italia dal lavoro di traduzione a quello di trasposizione

Le vignette Klein, come visto nelle pagine precedenti, vengono progettate con lo scopo di presentare in maniera interessante un argomento matematico, in modo tale da spingere gli insegnanti ad attingere da questi materiali per creare risorse didattiche da utilizzare in classe. Sono disponibili in inglese, ma per molte è presentata anche la traduzione in altre lingue; questo è legato alla natura internazionale del progetto patrocinato dall'ICMI, ed è proprio in virtù di ciò che tale iniziativa è giunta in Italia, attirando l'attenzione di molti. In conseguenza di ciò, a livello italiano nel 2021 nasce, nell'ambito del Gruppo UMI Licei Matematici, il progetto Klien Italia, il quale si ispira fortemente al progetto Klein internazionale.

Nell'ottica di passare da un progetto internazionale a uno nazionale, l'obiettivo primario che si sono posti i collaboratori del progetto Klein Italia è stato innanzitutto quello di provvedere a rendere disponibile una traduzione in lingua italiana delle varie vignette proposte. In questo frangente è importante sottolineare che avere a che fare e interagire con materiale didattico proveniente da un altro Paese non risulta essere banale; esistono, infatti, ricerche in corso che mirano a far luce sui problemi affrontati dagli insegnanti che si confrontano con questo tipo di materiali. Dai risultati e dalle opinioni raccolte emergono difficoltà su più fronti; in particolare emerge che il processo di traduzione va oltre la semplice competenza linguistica. Tradurre risorse educative di questo genere richiede una comprensione dei contenuti matematici trattati piuttosto approfondita; non è infatti sufficiente una traduzione alla lettera, in quanto è importante che vengano mantenute la struttura, il tessuto narrativo e le immagini della vignetta. Citando le parole utilizzate da Ornella Robutti e Giulia Bini nell'articolo *"From translation to transposition: Italian mathematics teachers as interlingual and intercultural mediators"* che chiarificano particolarmente la situazione:

> "Indeed, translation in this case is not an easy task, as it requires different skills. The translator should be proficient in the source and target languages, but should also understand the scientific content in order to render it in the target language with the right lexicon." (Robutti & Bini, 2023, p. 1)

Inoltre, è noto nel campo dell'educazione matematica che le risorse didattiche, come appunto le Klein vignettes, non rappresentano semplicemente veicoli per la trasmissione di informazioni, ma sono soprattutto contenitori di significati culturali. Questi ultimi non sono costituiti soltanto dal linguaggio, ma comprendono anche tutta quella serie di approcci didattici strettamente legati alle visioni e ai punti di vista assunti nel paese di origine riguardo all'insegnamento e che sono in qualche modo incorporate all'interno di materiali come in questo caso le vignette. Si parla in questo senso di trasposizione culturale, la quale rappresenta un punto centrale nel processo di adattamento delle risorse didattiche da un Paese ad un altro. In particolare, tale termine racchiude tutti gli sforzi che gli insegnanti e i ricercatori compiono per cercare di adattare la risorsa originale, proveniente da un altro Paese, alle abitudini didattiche e ai contesti scolastici nazionali. Si tratta di un processo che non prevede solo la traduzione linguistica, ma richiede anche la capacità di adattare la risorsa tradotta per soddisfare il contesto culturale e istituzionale di arrivo. Risulta dunque essere un lavoro piuttosto complesso e che richiede un certo equilibrio tra la traduzione da un lato e gli aspetti culturali dall'altro. Nell'articolo intitolato *"Crossing cultures: exploring the influence of professional development on teachers working with foreign educational resources"*, facendo riferimento a uno studio presentato al CERME13, Giulia Bini e Ornella Robutti utilizzano le seguenti parole:

> "We found that the translation presented a challenge for teachers who had to balance translation fidelity with the demands of their specific teaching approach in their institutional context." (Robutti & Bini, 2024, p. 1)

Tale lavoro richiede dunque molta attenzione e risulta essere delicato da svolgere; in particolare coloro che fanno parte del progetto Klein Italia hanno ben chiara questa situazione e continuano ad operare il lavoro di traduzione di queste vignette, in quanto moltissime di queste mancano ancora di una versione in lingua italiana. Nel farlo naturalmente hanno ben chiaro il fatto che le risorse tradotte devono essere significative e rilevanti all'interno del contesto culturale di destinazione, pur rispettando i principi della cultura di partenza e tenendo fede alla risorsa originale.

Una volta concretizzato il trasferimento dal contesto culturale e istituzionale del Paese di origine a quello nazionale, che appunto non riguarda soltanto la traduzione, i collaboratori del progetto Klein Italia si sono resi conto del fatto che non era sufficiente svolgere questo tipo di lavoro. Ciò che è emerso a questo punto dell'operato è che era necessario adattare l'argomento matematico presentato nella vignetta al contesto scolastico di interesse. Si è dunque passati dalla fase di traduzione a quella di trasposizione didattica, nel senso di Chevallard, cioè di una trasposizione da un contesto istituzionale che è quello dell'accademia a un contesto istituzionale che è quello della scuola. Nel dettaglio Yves Chevallard definisce la trasposizione didattica come:

> "Il lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento."

Fare trasposizione didattica significa operare una vera e propria costruzione, un processo di trasformazione, interpretazione e rielaborazione di un determinato contenuto per trasformarlo in qualcosa che possa essere insegnato, tenendo conto del pubblico, dell'ambiente e delle finalità che ci si pone. Per rendere chiara l'idea, cito le parole utilizzate da Marianna Bosch e Josep Gascón nell'articolo intitolato *"Twenty-Five Years of the Didactic Transposition"*, di cui riporto la traduzione da me svolta:

> "(Didactic transposition) formulates the need to consider that what is being taught at school ('contents' or 'knowledge') is, in a certain way, an exogenous production, something generated outside school that is moved - 'transposed' – to school out of a social need of education and diffusion. For this purpose, it needs to go through a series of adapting transformations to be able to 'live' in the new environment that school offers." (Bosch & Gascón, 2006, p. 53)

Il tutto nasce dunque dalla scelta dell'argomento che si vuole trasmettere, il quale però ha origine e prende forma in un contesto accademico; esso è ciò che viene denominato *sapere matematico originale* o *scientifico* e rappresenta ciò che viene prodotto dai matematici e da coloro che si occupano di ricerca. È chiaro che, per trasferire con successo un contenuto matematico, è necessario che esso venga rimaneggiato in qualche modo; infatti, è di estrema importanza considerare il contesto nel quale si vuole andare ad introdurre l'argomento in questione e il livello di conoscenza e competenza raggiunto dal pubblico al quale lo si vuole presentare. Nel nostro caso il contesto è rappresentato dalla classe ed è naturale pensare che non avrebbe senso trasmettere agli studenti il sapere matematico originale, in quanto esso risulterebbe essere difficoltoso da recepire e a tratti incomprensibile. Ancora una volta cito le parole di Marianna Bosch e Josep Gascón, che chiarificano maggiormente il concetto:

> "Bodies of knowledge are constructed outside school as the answer to some particular needs and formulated according to some very specific conditions. There exists a process, a social construction with multiple actors and different temporalities, through which some of these bodies of knowledge have to be selected, delimited, reorganised and, thus, redefined until reaching the classroom." (Bosch & Gascón, 2006, p. 55)

Il processo suddetto prevede, nel dettaglio, che si passi dal sapere matematico originale a un *sapere matematico da insegnare*; con questo termine si intende il sapere per come viene

progettato dai curriculi ed è proprio il lavoro di trasposizione didattica operato da studiosi e ricercatori che permette il delicato passaggio tra i due tipi di conoscenza.
Questo processo, in realtà, prevede altre fasi; infatti, una volta scelto il contenuto matematico da trasmettere nella sua forma più accademica e dopo averlo reso insegnabile e accessibile anche per coloro che non fanno parte del mondo accademico, va poi analizzato cosa avviene realmente in classe e quindi va fatta una distinzione ulteriore tra il sapere che viene effettivamente insegnato dai docenti nelle classi e il sapere matematico per come viene appreso dagli studenti. Quest'ultima parte riguarda maggiormente la sperimentazione in classe e rappresenta da un lato il punto di arrivo, ma allo stesso tempo è considerato il punto di partenza per la progettazione di nuovi percorsi. Infatti, andare ad analizzare i fenomeni legati al sapere appreso e insegnato, capire quali sono le abilità e le competenze acquisite dagli studenti e comprendere in che modo il sapere matematico originale viene recepito in classe rappresenta un modo per i ricercatori di ottenere un feedback sul loro lavoro e di andare eventualmente ad agire laddove si ritiene necessario intervenire per promuovere la corretta trasmissione della conoscenza. È bene tenere a mente che, nonostante esista questa distinzione tra i vari saperi e, nonostante ciò, con cui si ha a che fare in classe non sia il sapere nella sua forma accademica, esso rimane pur sempre il punto di riferimento; la principale difficoltà nell'attuazione di tutte le fasi del processo di trasposizione didattica risiede proprio nel cercare di non snaturare la conoscenza in quanto tale e nel fare in modo che vengano mantenuti il potere e il carattere funzionale del sapere stesso.
Tornando al progetto Klein Italia, una volta scelto il sapere da trasmettere e creata la vignetta, i ricercatori e gli studiosi si sono resi conto che era necessario andare oltre e fare un passo in più. Se, da un lato, il contenuto matematico per come viene affrontato nella vignetta rappresenta uno spunto per attirare l'attenzione e stimolare gli studenti, dall'altro pone diversi vincoli dal punto di vista del concreto utilizzo in classe di questo tipo di materiali; ed è proprio qui che entra in gioco la trasposizione didattica.
Ciò su cui hanno appunto riflettuto coloro che lavorano al progetto Klein Italia è che, una volta reso il contenuto matematico più accattivante, inserendolo all'interno di una storia matematica il cui contesto potesse talvolta non riguardare la matematica stessa, era necessario rendere il contenuto stesso insegnabile e introducibile concretamente nella scuola. Questo si è tradotto in un lungo lavoro di progettazione di attività didattiche destinate agli studenti in classe, che andassero ad arricchire le vignette e le relative traduzioni. Quando si parla di scuola, però, ci si riferisce anche agli aspetti didattici e alle prasseologie didattiche che rendono le vignette fruibili per i docenti; per questo motivo le attività di cui sopra non si riferiscono soltanto alle schede con i problemi da proporre agli studenti in classe, ma anche a tutto un corredo costituito da indicazioni metodologiche e didattiche, utili all'insegnante che vuole fare uso delle Klein vignettes e delle relative attività.
È stato dunque fondamentale riflettere sull'importanza del trasferimento di competenze, che non può essere automatizzato e ridotto ad un processo di traduzione, per quanto complicato e difficoltoso possa risultare. Ciò che davvero risulta essere funzionale, nonché necessario ai fini di un progetto di questo genere, è un processo di inculturazione; quest'ultimo prevede che si svolga un adattamento, una riespressione del materiale proveniente dall'estero in forme e termini propri della cultura ricevente.

Il progetto Klein Italia si occupa proprio di questo, proponendosi come obiettivo ultimo quello di colmare il divario tra la matematica presentata nelle vignette e il loro concreto utilizzo in classe. Il lavoro che si è reso necessario compiere è stato quindi quello di adattare le Klein vignettes al contesto culturale e istituzionale della scuola italiana. Come? Attraverso un processo di trasposizione didattica operato sulle vignette, volto ad arricchirle di spunti, immagini, ma soprattutto di attività e applicazioni rivolte agli studenti e di tutta una serie di informazioni e suggerimenti riguardo agli aspetti metodologici, che rendono tali materiali direttamente fruibili dai docenti.
In questo frangente, nel gennaio 2021, sono stati costituiti due gruppi di lavoro formati sia da docenti universitari, che da insegnanti di pari grado e pari merito al fine di elaborare la trasposizione didattica per la scuola secondaria italiana di due vignette intitolate *"Symmetry step by step"* e *"Matrices and Digital Images"*. Il gruppo sulle isometrie è coordinato dalla professoressa Ornella Robutti, mentre quello sulle matrici dal professor Ferdinando Arzarello; ciò che però accomuna entrambi è il metodo di lavoro con operano. In particolare, all'interno di questi gruppi, prima la traduzione e successivamente la trasposizione didattica sono state svolte da sottogruppi più ristretti in cui accademici e insegnanti hanno lavorato a stretto contatto e in totale sinergia, lasciando totalmente da parte i ruoli gerarchici. In questo senso, il lavoro svolto dai collaboratori al progetto Klein Italia, che sfocia nella progettazione di attività destinate tanto agli studenti quanto agli insegnanti, e soprattutto le modalità con cui operano concretizzano a tutti gli effetti ciò a cui mira tale progetto: la costituzione di una comunità di apprendimento basata sui contatti tra le scuole e la ricerca contemporanea.
A questo punto, per chiudere il cerchio, la domanda che sorge spontanea è: il progetto Klein Italia può essere considerato un progetto di PE dell'Università di Torino? Si è a lungo trattato nelle pagine precedenti di questo termine e della difficoltà di definirlo in maniera esaustiva; tuttavia, si è giunti nel corso della trattazione ad una concettualizzazione del PE basata su tre elementi, che sono gli obiettivi a cui si mira in tale ambito, la categoria di pubblico a cui ci si rivolge e la tipologia di attività che vengono elaborate. Tra queste ultime troviamo in particolare la progettazione di attività per il coinvolgimento e l'interazione con il mondo della scuola, come possono essere attività laboratoriali e didattica innovativa. Le Klein vignettes e le attività che le vanno ad affiancare elaborate dai collaboratori del progetto Klein Italia sono l'esempio per antonomasia di didattica innovativa di cui sopra. Le vignette nascono per introdurre nelle classi contenuti matematici in maniera non usuale e le attività proposte prevedono metodologie che concretizzano largamente l'innovazione sopracitata.
Per quanto riguarda gli obiettivi di coloro che si occupano della progettazione delle attività suddette nel contesto del progetto Klein Italia, anche questi si allineano perfettamente agli scopi per cui si svolgono attività di PE. Nel dettaglio, l'obiettivo principale che UNITO si pone nell'implementazione del PE è quello di abbattere le barriere tra il mondo della ricerca e la società; le Klein vignettes e le attività destinate ad affiancarle nascono proprio con lo scopo di fungere da stimolo per gli insegnanti di matematica, per spingere loro a creare collegamenti tra la matematica che insegnano e quella più prettamente accademica. In questo senso, non viene mai persa di vista l'importanza di stare al passo con i tempi e tenere conto dell'evoluzione favorita dal lavoro di ricerca che viene svolto giorno dopo giorno, nel tentativo di creare un ponte tra il mondo accademico e la società.

Infine, proprio in vista di tale obiettivo il pubblico a cui si rivolgono coloro che collaborano a progetti di PE deve essere prettamente non accademico; in particolare, studenti e insegnanti, a cui sono destinate le attività elaborate nell'ambito del progetto Klein Italia, fanno parte di quella fetta di società a cui ci si riferisce quando si parla di pubblico non accademico.
Risulta chiaro quindi che obiettivi, pubblico e attività del progetto Klein Italia coincidono con quelli che possono essere considerati obiettivi, pubblico e attività relative al PE; dunque, in vista della caratterizzazione del PE basata su questi tre elementi, si può concludere che la risposta all'interrogativo di cui sopra è naturalmente affermativa e che il progetto Klein Italia può essere considerato a tutti gli effetti un progetto di PE dell'Università di Torino.

1.5 La trasposizione didattica della vignetta *"Symmetry step by step"* tra attività e aspetti metodologici innovativi

In questi anni, come già anticipato, i collaboratori del progetto Klein Italia si sono concentrati su due specifiche vignette, andando ad operare un lavoro di trasposizione didattica, il quale prevede un processo di decostruzione e ricostruzione dei temi affrontati e sfocia nella progettazione di attività che permettano tanto agli studenti, quanto agli insegnanti di approcciarsi ai due argomenti matematici trattati nelle suddette vignette.
In questa tesi mi occupo in particolare del lavoro svolto sulla vignetta intitolata *"Symmetry step by step"*, il quale, come già anticipato, è stato coordinato dalla professoressa Ornella Robutti del Dipartimento di Matematica, con l'aiuto di due colleghi. Si tratta della professoressa Antonella Montone dell'Università di Bari, e del professor Luigi Tomasi, insegnante a Ferrara. Il gruppo di lavoro è piuttosto numeroso; è già stato rimarcato uno degli aspetti peculiari di questo tipo di équipe, dato dall'eterogeneità delle personalità che la costituiscono, e anche in questo caso troviamo collaboratori che ricoprono posizioni istituzionali differenti, con età diverse che hanno lavorato a stretto contatto tra loro, portando i contributi dalle loro competenze ed expertise.
Il risultato della trasposizione didattica operata dal suddetto gruppo è una serie di schede che vanno ad affiancare la vignetta e che costituiscono un anello di congiunzione tra l'argomento presentato in quest'ultima e la sua effettiva introduzione in classe ed è presentato sul sito del Liceo Matematico (https://www.liceomatematico.it/simmetrie/) per mezzo di una tabella. In particolare, coloro che si sono occupati della vignetta in questione hanno voluto dare un ordine, una chiave di lettura per gli insegnanti che volessero approcciarsi a questo tipo di materiali e dunque hanno scelto una tabella per rendere disponibile e raccontare il lavoro svolto. Questa tipo di scelta riflette la volontà di non presentare il materiale della vignetta sotto forma di sequenza; in particolare, è verosimile che un docente in classe non abbia a disposizione il tempo di affrontare e svolgere tutte le attività progettate e, in questo senso, il formato della tabella permette al singolo insegnante di costruire il proprio percorso, operando una selezione in base alle proprie esigenze e a quelle della classe.
I ricercatori hanno lavorato su 6 nodi concettuali costituiti dai vari tipi di isometria, ovvero traslazione, simmetria assiale, rotazione, glissosimmetria, composizione di isometrie, con un ultimo argomento, dato in maniera più generale, per approfondimenti e problemi. Per ognuno di essi sono state progettate attività con 3 diversi livelli di competenza; in un primo livello sono

state elaborate attività che privilegiano l'esplorazione e la congettura, in cui si inizia a venire in contatto con un certo tipo di isometria, in un secondo livello ci si occupa di competenze relative alle isometrie che prevedono scoperte, generalizzazioni e classificazioni e, in un terzo livello, si lavora sulla risoluzione di problemi, sull'argomentazione e sulla dimostrazione, che rappresentano abilità che a livello cognitivo risultano più difficili da acquisire e il cui sviluppo richiede un lavoro più approfondito.
La tabella presentata, dunque, è costituita da 6 righe, ognuna delle quali rappresentante uno dei nodi concettuali di cui sopra, e 3 colonne, in cui sono espressi i diversi livelli di difficoltà e che vanno in un crescendo di complessità di livello e di tipo di competenza richiesta. Si ottengono in questo modo 18 sezioni, le quali sono ulteriormente suddivise in base al contesto in cui sono inserite le attività proposte nelle varie schede; nel dettaglio alcune di queste attività sono inserite in un ambito interno alla matematica, ovvero quello delle figure geometriche e delle loro trasformazioni, mentre altre riguardano un contesto esterno alla matematica, che riguarda più da vicino il mondo reale, come ad esempio l'arte, i manufatti, le tassellazioni e i fregi. Dunque, l'argomento, ovvero le isometrie del piano, viene affrontato non solo ed esclusivamente dal punto di vista matematico, ma anche inserendolo in un contesto più ampio, relativo al mondo che ci circonda, in modo da rendere il tema più interessante e andare a far toccare con mano agli studenti che la matematica non è solo pura astrazione, ma è presente ed osservabile nella realtà.
In ognuna delle sezioni sono presenti due tipologie di materiali: una scheda destinata agli studenti e una per il docente. Nella prima sono presenti una serie di quesiti che spingono lo studente a costruire passo dopo passo la propria conoscenza, dandogli così modo di costruire competenza sull'argomento. In questo frangente ciò a cui aspirano coloro che hanno lavorato alla progettazione di tali attività è lo sviluppo di abilità e conoscenze di livello più alto; le modalità di insegnamento che ancora oggi rappresentano un modus operandi all'interno del sistema scolastico italiano prediligono un apprendimento mnemonico di fatti, regole e procedure, in cui ciò che effettivamente impara a fare lo studente è riconoscere situazioni simili a quelle già viste e applicare procedimenti e tecniche senza dare una ratio dell'utilizzo di queste ultime se non il fatto di ricordare di averle già impiegate precedentemente. Per utilizzare le parole dei ricercatori Kees Hoogland e Dave Tout, che descrivono molto bene la situazione descritta poc'anzi:

> "Mathematics education – so essential for educating young people to be creative and problem solving agents in the twenty-first century – is at risk of focusing too much on assessment of lower order goals, such as the reproduction of procedural, calculation based, knowledge and skills." (Hoogland & Tout, 2018, p. 675)

Questo tipo di visione si contrappone fortemente a quella che guida il lavoro di docenti e ricercatori che fanno parte del progetto Klein Italia; questi ultimi progettano ed utilizzano le vignette e le relative attività nell'ottica di un insegnamento più costruttivista, in cui viene lasciato largo spazio all'indagine e alla scoperta. Ciò che viene proposto nelle varie schede relative alla vignetta *"Symmetry step by step"* sono problemi, in cui non basta semplicemente applicare procedure già viste per ottenere risultati; ogni quesito è stato pensato per garantire la promozione della risoluzione di problemi, nonché l'orientamento degli studenti al processo piuttosto che lasciare che si occupino esclusivamente di calcoli e abilità di routine. In questo

modo si vuole anche andare a porre l'attenzione sulla differenza esistente tra il sapere e il saper fare in matematica; nel primo caso si fa riferimento alla conoscenza in ambito matematico, mentre nel secondo caso si intende ciò che si può fare nel mondo con ciò che si sa. È chiaro che per risolvere problemi come quelli proposti nelle schede progettate dai ricercatori del progetto Klein Italia non è sufficiente conoscere nozioni e regole, cosa che potrebbe bastare se si vuole andare ad eseguire un esercizio. In questi casi è necessario ampliare gli orizzonti, sfruttare le proprie conoscenze sì, ma non applicandole in maniera meccanica, bensì utilizzandole per analizzare la situazione e cercare strade che portino alla risoluzione del problema.
Questo tipo di approccio pone dunque una forte enfasi sul ragionamento, l'interpretazione, il pensiero critico, la modellizzazione, in contrapposizione a procedure, calcoli, prodotti e competenze standard, in modo da permettere allo studente di giungere con successo all'obiettivo finale: la competenza matematica. Quest'ultima, anche denominata *mathematical literacy*, si basa, nel quadro del PISA 2021, sul coinvolgimento attivo degli studenti con la matematica e mette al centro il ragionamento matematico e il problem solving. In questo frangente lo studente ha modo di andare a sviluppare un insieme di abilità di pensiero che lo rendano capace di descrivere, spiegare e predire fenomeni, nonché di andare ad analizzare le diverse situazioni del mondo reale in maniera critica.
In aggiunta, la peculiarità delle attività elaborate rappresentata dal fatto di proporre problemi e non esercizi, rappresenta un modo efficace per coloro che lavorano al progetto Klein Italia di soddisfare la volontà di trasmettere agli studenti e, più in generale, a coloro che non fanno parte del mondo accademico come lavorano i matematici e ciò con cui hanno a che fare quotidianamente. I problemi sono caratterizzati dal fatto di non avere un'unica risposta corretta; per essere risolti è necessaria una certa elasticità mentale e una capacità di indagine che rientra tra quelle abilità richieste nel XXI secolo. Gli studiosi che si occupano di ricerca in ambito matematico hanno a che fare con problemi e quotidianamente il loro lavoro è quello di cercare strade che possano portare ad un'eventuale soluzione per risolverli; in questo senso il progetto Klein Italia e le attività proposte per le varie vignette rappresentano un anello di congiunzione per stimolare gli studenti a lavorare in classe così come si opera nei gruppi di ricerca, avvicinando così la classe alla ricerca in campo matematico e avvalorando ulteriormente la tesi per cui il progetto Klein Italia viene considerato un progetto di PE sostenuto da UNITO.
Un'altra peculiarità delle schede di attività destinate agli studenti riguarda l'interdisciplinarità. Quest'ultima, facendo riferimento ancora una volta agli obiettivi del PE, rappresenta un elemento di sviluppo non solo a livello di classe, ma anche a livello sociale. In particolare, all'interno delle vignette gli argomenti matematici vengono spesso affrontati con l'ausilio di temi che poco sembrano riguardare la matematica e i quesiti proposti sono ricchi di spunti per creare collegamenti con altre discipline. Da questo punto di vista il progetto Klein Italia si pone ancora una volta come obiettivo quello di promuovere una forma di collaborazione tra i vari campi che tenda ad un sapere più completo e avanzato e nel giungere a tale scopo favorisce lo sviluppo di mentalità elastiche, che escono dagli schemi. In questo modo gli studenti non solo arricchiranno il loro bagaglio culturale, ma soprattutto svilupperanno spirito di osservazione e di indagine; tutte abilità che risultano essere fondamentali non solo nel contesto classe e quando si parla di matematica, ma anche nella vita quotidiana e nell'ambito dello sviluppo sociale.

Per quanto riguarda le schede destinate ai docenti, invece, in esse sono presenti una serie di informazioni che guidino l'insegnante nell'utilizzo in classe delle attività pensate per la sperimentazione con gli studenti e quindi delle schede progettate per questi ultimi di cui si è trattato poco fa. Nel dettaglio vengono indicati obiettivi, prerequisiti, materiali utilizzati, tempistiche previste, destinatari e sono poi suggerite una serie di metodologie ritenute efficaci e che hanno lo scopo di avvicinare il docente alla ricerca in campo didattico. Come già detto, infatti, il progetto Klein Italia ha, tra gli altri scopi, quello di promuovere una didattica innovativa e questa serie di schede destinate ai docenti nasce proprio con l'intenzione di andare ad operare dal punto di vista della formazione degli insegnanti. In questo senso le informazioni presenti nelle suddette schede vogliono rappresentare un modo per rendere disponibili e divulgare al mondo della scuola, e in particolar modo ai docenti, le recenti scoperte in ambito didattico; si vuole così andare a promuovere l'impiego di metodologie nuove in classe, permettendo agli insegnanti stessi di farne ampio uso, sperimentandone in prima persona i vantaggi e gli eventuali svantaggi. Relativamente a quanto detto emerge nuovamente come il progetto Klein Italia possa essere considerato un progetto di PE, volto a diffondere i risultati recenti nell'ambito dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica e a permettere al lavoro dei ricercatori di avere un impatto sulla società e in particolar modo sulla scuola.
Un elemento chiave di questo tipo di materiali è rappresentato dagli aspetti metodologici; questi ultimi hanno lo scopo di guidare l'insegnante, offrendogli spunti e suggerimenti relativamente alle modalità con cui si vanno a far lavorare gli studenti con le schede di attività. In particolare, è importante che gli studenti abbiano un ruolo attivo in classe e le attività a loro destinate sono state progettate in vista di ciò; tuttavia, la funzione del docente non deve passare in secondo piano. Le attività, infatti, prevedono che gli studenti lavorino in larga parte in maniera autonoma, ma questo avviene sotto l'occhio attento dell'insegnante, che ha il compito di supervisionare, andando ad intervenire laddove ritiene doveroso farlo ponendo domande specifiche, indirizzando gli studenti nella giusta direzione e coordinando la classe scandendo a dovere le tempistiche e affiancando gli studenti, conducendoli nel corso delle varie fasi dell'attività.
Gli spunti e i suggerimenti presenti nelle schede per i docenti mirano all'adozione in classe di un approccio didattico innovativo, che coinvolge la didattica laboratoriale. Quando si parla di laboratorio di matematica, ci si riferisce all'interpretazione data dall'Unione Matematica Italiana (UMI), e si intende non uno spazio fisico, come potrebbe ad esempio essere un'aula, ma un approccio didattico. Citando nuovamente le parole utilizzate da Giulia Bini e Ornella Robutti nell'articolo *"Crossing cultures: exploring the influence of professional development on teachers working with foreign educational resources"*:

> "In the mathematics laboratory, students explore problematics situations, formulate, verify and prove conjectures, design and experiment, discuss and argue their choices. They learn to collect data and compare it with the formulated conjectures, negotiate, and construct mathematical meanings." (Robutti & Bini, 2024, p. 2)

Una prerogativa del laboratorio di matematica è data dal fatto che in questo tipo di concezione gli studenti sovente lavorano in modo sociale, in piccoli gruppi; tra le indicazioni metodologiche proposte nelle schede destinate ai docenti spicca in maniera ricorrente questo

tipo di modalità. Il lavoro di gruppo rappresenta un'alternativa alla classica lezione frontale e permette agli studenti in classe di interfacciarsi con altri allievi, con idee e modi di ragionare diversi, apprendendo collettivamente e offrendo loro un'occasione per interagire e aprire le proprie menti. In aggiunta, questo tipo di approccio spinge gli studenti ad imparare facendo, a elaborare un gran numero di ipotesi e a confutarne altrettante; in questo modo si permette loro di entrare nel vivo dell'argomento affrontato, ponendosi domande e cercando di trovare soluzioni sia a livello individuale, che con il contributo di idee altrui.
Accanto al lavoro di gruppo, tra le metodologie indicate nelle schede per i docenti, figura la discussione collettiva; essa rappresenta un altro importante strumento di coinvolgimento all'interno della classe. Uno degli obiettivi principali a cui si mira attraverso l'implementazione di tale metodologia è lo sviluppo di un pensiero argomentativo; infatti, durante la discussione collettiva, gli studenti sono spinti ad esporre i risultati a cui sono giunti individualmente o collettivamente e, nel farlo, viene richiesto loro di giustificare e portare motivazioni a sostegno delle loro tesi. In questo senso, avviare e sviluppare discussioni in classe permette agli studenti non solo di consolidare competenze argomentative, ma anche di sviluppare abilità sociali legate al confronto, all'esposizione chiara di idee, del rispetto delle opinioni altrui, promuovendo in tale modo la democrazia in classe.
In questo frangente, è importante sottolineare che il ruolo dell'insegnante diventa centrale, in quanto rappresenta quella figura che scandisce i diversi momenti e conduce la discussione in una ben determinata direzione, ponendo così le basi per le fasi successive previste dalle varie attività.
Un altro aspetto delle indicazioni metodologiche proposte nelle schede per i docenti e che allo stesso tempo, però, rappresenta un'ulteriore peculiarità del laboratorio di matematica è dato dall'utilizzo in classe di strumenti e risorse. In particolare, le attività progettate da coloro che hanno lavorato alla vignetta *"Symmetry step by step"* prevedono in larga parte l'utilizzo di determinati software, che vogliono essere un ausilio per coloro che lavorano sui vari quesiti proposti. Lo scopo è quello di promuovere un ambiente educativo in cui gli studenti esplorano le idee matematiche attraverso esperienze pratiche potenziate dall'uso di artefatti fisici e digitali.
Il sistema scolastico odierno risulta essere ancora piuttosto chiuso da questo punto di vista e riluttante all'utilizzo di questo tipo di materiali. Spesso e volentieri il motivo primario che spinge un docente ad avere questo tipo di atteggiamento è che l'impiego di questi software in classe, che necessita anche una preliminare spiegazione su come utilizzarli, rappresenta quasi una perdita di tempo. E sovente in questi casi il docente magari mostra applicazioni ed esempi di quanto visto in classe con l'ausilio di un software, ma non permette ai propri studenti di sperimentare con le proprie mani cosa significhi approcciarsi all'argomento in questione utilizzando materiali di questo tipo.
In vista di ciò, le attività progettate per affiancare la vignetta relativa alle isometrie vogliono invece andare a far avvicinare gli studenti all'utilizzo di questi software, permettendo loro di toccare con mano quanto questo tipo di strumenti possa risultare utile e importante nella risoluzione di problemi, nella costruzione di dimostrazioni e nell'elaborazione di congetture.
La mia tesi consiste nell'organizzazione dei materiali presentati nella tabella disponibile sul sito e progettati dal gruppo che ha lavorato sulla vignetta *"Symmetry step by step"*. Di seguito, viene dedicato un capitolo per ognuno dei 6 nodi concettuali presentati nella tabella:

traslazione, simmetria assiale, rotazione, glissosimmetria, composizione di isometrie, approfondimenti e problemi.
Ogni capitolo è poi suddiviso in 4 sottocapitoli, il primo dei quali è rappresentato da una breve introduzione, in cui vengono fatte alcune riflessioni sull'argomento trattato e sulle modalità con cui solitamente si usa introdurlo in classe. I rimanenti 3 sottocapitoli rispecchiano la suddivisione delle attività in 3 livelli di competenza ("esplora e congettura", "scopri, classifica e generalizza" e "risolvi problemi, argomenta e dimostra") e in ciascuno viene analizzata una specifica scheda, seguendo l'ordine crescente con cui i materiali sono disposti nella tabella. L'analisi e la descrizione delle varie attività fa riferimento a quanto riportato nelle schede destinate ai docenti e arricchisce di spunti utili a coloro che vogliono andare ad implementare questo tipo di materiali in classe. Le relative schede per gli studenti sono riportate al termine di ognuno dei sottocapitoli.

1.6 Riferimenti ai documenti istituzionali

Un altro elemento importante che è incluso nel sito del Liceo Matematico e che inserisce le attività relative alle isometrie in un determinato contesto istituzionale sono i riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida. In questo modo, si vuole mettere in luce la coerenza di questi materiali con i contenuti e gli obiettivi istituzionali ufficiali.
Per quanto riguarda i riferimenti alle Indicazioni Nazionali, comuni al primo biennio di tutti i Licei:

> "Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti." (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, 2010, p. 23)

Mentre, facendo riferimento alle Linee Guida per gli Istituti Tecnici, comuni al settore tecnologico e a quello economico:

> "Nel primo biennio il docente persegue, nella propria azione didattica ed educativa, l'obiettivo prioritario di far acquisire allo studente le competenze di base attese a conclusione dell'obbligo di istruzione, di seguito richiamate:
> **- confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.**
> Conoscenze: Teorema di Talete e sue conseguenze. Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini). Esempi di loro utilizzazione nella dimostrazione di proprietà geometriche.
> Abilità: porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie." (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, 2012, p. 45, p. 71)

Inoltre, gli argomenti trattati all'interno delle varie attività permettono di creare collegamenti tra discipline apparentemente lontane tra loro. In particolare, all'interno delle varie schede sono presenti molteplici spunti interdisciplinari, che prevedono che si lavori con le isometrie non soltanto dal punto di vista matematico, ma anche in ambiente reale e artistico. In questo

frangente, i collegamenti con l'arte sono diversi; per fare alcuni esempi, nelle attività si lavora con le trasformazioni geometriche trattate per creare e classificare fregi, tassellazioni e rosoni. Questo tipo di lavoro sulle isometrie permette lo sviluppo di abilità richieste non soltanto in ambito matematico, ma in questo caso utili anche in storia dell'arte e, in generale, nella descrizione tecnica di opere d'arte.
A questo riguardo, nelle Indicazioni Nazionali alla voce *"Linee generali e competenze"* si trova la seguente dicitura:

> "Fra le competenze acquisite ci sono necessariamente: la capacità di inquadrare correttamente gli artisti e le opere studiate nel loro specifico contesto storico; saper leggere le opere utilizzando un metodo e una terminologia appropriati; essere in grado di riconoscere e spiegare gli aspetti iconografici e simbolici, i caratteri stilistici, le funzioni, i materiali e le tecniche utilizzate. […] Fin dal primo anno e dunque necessario chiarire che esistono molti modi di osservare le opere d'arte, fornendo agli studenti gli elementi essenziali di conoscenza dei principali metodi storiografici, e sottolineare che un'opera d'arte non e solo un insieme di valori formali e simbolici, né il frutto di una generica attività creativa, ma comporta anche una specifica competenza tecnica." (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, 2010, p. 30)

Per quanto riguarda il Liceo Artistico, le attività proposte permettono di svolgere un lavoro che si inserisce in maniera continua in un percorso ben definito dai documenti istituzionali. Gli argomenti affrontati prevedono che le attività vengano proposte nel corso del primo biennio; tuttavia, l'acquisizione di competenze favorita dalle modalità previste dalle varie schede con cui le isometrie vengono introdotte in classe fornisce agli studenti requisiti essenziali per affrontare il secondo biennio. In particolare, il tema delle isometrie viene richiamato nell'ambito delle discipline progettuali:

> "Nell'esercizio di analisi di un'opera o nel processo ideativo, su un tema assegnato, lo studente verificherà i significati di modularità, simmetria, asimmetria, proporzione, riconoscendo procedure operabili sui volumi." (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, 2010, p. 71)

Un ulteriore documento istituzionale al quale è doveroso fare riferimento è il Quadro di Riferimento delle prove INVALSI, che definisce con precisione quali competenze e conoscenze devono essere misurate attraverso le prove standardizzate, che a loro volta rappresentano la base da cui gli autori hanno redatto tale documento. In questo frangente, l'attenzione viene spostata sulle abilità che necessitano di essere sviluppate durante il percorso scolastico:

> "Ciò che […] caratterizza tutti i diversi gradi scolari, dalla scuola primaria alla scuola secondaria, anche se, ovviamente, con diversa enfasi e dettaglio, sono i seguenti punti: […] la necessità di progettare percorsi che, nel conseguimento dei contenuti irrinunciabili, non perdano mai di vista lo sviluppo di competenze il cui raggiungimento è ineludibile per il possesso di quella cultura matematica che aiuti a partecipare in modo informato, consapevole e critico alle scelte sempre più delicate che la vita pubblica impone:
>
> 1. rappresentare oggetti matematici e relazioni fra essi, operare con queste rappresentazioni e passare dall'una all'altra ove opportuno;

2. argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere, prestando attenzione agli artifici retorici utili a avvalorare e spiegare le proprie argomentazioni;
3. porsi e risolvere problemi; utilizzare e costruire modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti;
4. sviluppare un atteggiamento positivo verso la Matematica, imparando a vederla come prodotto culturale fortemente unitario e operativo." (Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione, 2018, p. 10)

Le attività proposte sono ampiamente in linea con le finalità di cui sopra e il raggiungimento di queste ultime è favorito dalla suddivisione prevista in livelli di difficoltà differenti; in particolare, si potrebbe operare un accostamento tra i punti elencati sopra e le tre tipologie di competenze sul cui sviluppo sono incentrate le varie schede. Il punto 1 si allinea con il tipo di abilità su cui si vuole lavorare con le schede relative al campo "esplora e congettura", mentre i punti 2 e 3 riguardano maggiormente le competenze attese al termine delle attività relative ai campi "scopri, classifica e generalizza" e "risolvi problemi, argomenta e dimostra".
L'ultimo punto, invece, riassume in maniera perfetta il cuore di ciò che è stato fatto dai collaboratori del progetto Klein Italia nella progettazione delle attività proposte.

CAPITOLO 2

LA TRASLAZIONE

2.1 Introduzione

Il concetto di traslazione viene solitamente introdotto in classe dagli insegnanti attraverso la definizione matematica; in particolare, l'approccio didattico usuale con cui i docenti trattano in classe tale argomento è rappresentato dalla lezione frontale. Nel corso di quest'ultima, è solito rimanere fedeli al tipo di percorso previsto dal libro di testo di riferimento, che risulta essere piuttosto univoco nella maggior parte dei volumi.
Nel dettaglio, se si apre un qualsiasi manuale di geometria, il capitolo che tratta delle traslazioni si apre con un'introduzione dedicata al concetto di vettore, ricca di definizioni e termini, che solitamente finiscono con l'essere memorizzati in maniera superficiale. In un secondo momento poi si procede con la definizione del concetto di traslazione:

> "Si chiama traslazione di un vettore $\vec{v}$ la trasformazione che associa a ogni punto P del piano il punto P' tale che $\overline{PP'}$ abbia la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo di $\vec{v}$." (Sasso, 2013, p. 225)

Di fronte ad una dicitura del genere, la prima cosa che uno studente può fare è impararla mnemonicamente, senza magari comprendere il vero significato dei termini utilizzati. Questo processo è favorito dal fatto che la modalità con cui l'argomento viene esposto in classe risulta essere meccanico e ricco di concetti astratti, che a una prima lettura sembrano non avere nulla a che fare con la realtà; nella definizione riportata si parla di punti del piano, di trasformazione, di vettori con una direzione, un verso e un modulo ed è naturale che all'interno della classe si diffonda il misconcetto per cui la traslazione è qualcosa che esiste solo nel piano euclideo, anch'esso a sua volta percepito come un'entità del tutto astratta. Per non parlare poi del concetto di vettore, che viene introdotto facendo uso di classi di equivalenza; nozione la cui comprensione risulta dare spesso dei problemi e che più di altre si rivela essere poco intuitiva.
Il percorso previsto dalle attività proposte dal progetto Klein Italia permette agli studenti di fare esperienza del concetto di traslazione mediante quello di spostamento, consentendo alla classe di raggiungere un punto cruciale nell'apprendimento dell'argomento trattato: la costruzione di significati matematici e delle radici cognitive dei concetti matematici affrontati.
La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura", è stata intitolata *"Un percorso alla scoperta della traslazione"* e ha lo scopo di accompagnare gli studenti verso la comprensione di alcune delle principali caratteristiche della traslazione.
Nell'attività in questione la traslazione viene introdotta partendo dal concetto di spostamento, il quale risulta essere particolarmente intuitivo e solo in un secondo momento si arriva all'istituzionalizzazione della traslazione tramite un vettore. Il tipo di approccio che viene impiegato privilegia il ruolo della scoperta, motivando la classe ad acquisire spirito d'indagine e coinvolgendo gli studenti in prima persona. Ciò è reso possibile anche grazie all'ausilio del software GeoGebra.

La seconda attività, relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", si intitola *"Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry"*. Come si evince dal titolo della scheda, l'attività si concentra sui fregi e l'obiettivo è quello di arrivare ad una descrizione più dettagliata e autonoma possibile dei 7 gruppi di isometrie dei fregi.
La terza attività, relativa al campo "risolvi problemi, argomenta, dimostra", si intitola *"Fregi, gruppi di simmetria e attività di problem solving"* e ha lo scopo di fare un passo ulteriore rispetto alle schede precedenti, andando a consolidare le competenze e le conoscenze acquisite sui fregi. Nel farlo si spingono gli studenti a lavorare sullo sviluppo di abilità di alto livello quali il ragionamento e il problem solving.

2.2 Un percorso alla scoperta della traslazione

2.2.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione al concetto di traslazione
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** GeoGebra 5/GeoGebra Classroom
- **Prerequisiti:** conoscenza degli elementi di base della geometria euclidea e del software GeoGebra
- **Obiettivi:**
    - Conoscenza delle caratteristiche della traslazione in quanto trasformazione del piano e degli elementi che la caratterizzano
    - Applicazione della traslazione e di altre isometrie per costruire fregi
    - Realizzazione di fregi con l'ausilio del software GeoGebra
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in due fasi. Nella fase 1 si introducono gli studenti al concetto di traslazione tramite attività di esplorazione e congettura, facendo uso dell'idea di spostamento e del software GeoGebra. Si richiede agli studenti la conoscenza degli strumenti di base di tale software, con particolare attenzione al loro uso e all'ordine di esecuzione dei comandi. In questo frangente, nelle schede vengono poste agli studenti semplici domande che richiedono loro di osservare e mettere a confronto situazioni diverse.
  Si chiede, dunque, alla classe di osservare dei triangoli di colori diversi disposti nel piano e, mediante una serie di quesiti, si indirizzano gli studenti alla constatazione che ciascun insieme di triangoli si ottiene operando una traslazione secondo vettori distinti, ma che possono avere delle caratteristiche in comune, quali direzione, modulo e verso. In questa fase gli studenti lavorano a gruppi di 3\4 persone e il ruolo del docente è quello di guidare gli alunni e le alunne nell'attività di esplorazione, conducendo la classe alla costruzione del concetto di traslazione. Questa prima fase si conclude con l'istituzionalizzazione del concetto di traslazione, con le sue caratteristiche definite dai vettori.

Nella fase 2 gli alunni e le alunne lavorano alla creazione di un fregio a piacimento. In questo frangente, gli studenti possono scegliere di lavorare partendo dal motivo proposto nella scheda o da uno creato da loro stessi e in un primo momento realizzano un fregio che coinvolge soltanto la traslazione. Nel farlo vengono richiamate le azioni e le conoscenze acquisite nella fase precedente riguardo alla traslazione e alla sua realizzazione con lo strumento di GeoGebra.
In questa fase è possibile far lavorare gli studenti individualmente o a piccoli gruppi e al termine l'insegnante può scegliere, prima di procedere, di lavorare sull'approfondimento proposto nella scheda. Il quesito proposto spinge gli studenti a lavorare più in astratto, immaginando di operare la traslazione un certo numero di volte su una striscia illimitata, e ad argomentare. In questo frangente, il docente potrebbe scegliere come approccio di lavoro quello della discussione collettiva.
La scheda procede con la consegna di creare uno o più fregi a piacere, partendo da un motivo di base dato usando non solo la traslazione, ma anche trasformazioni isometriche diverse da quest'ultima. Anche in questo caso sta al docente la decisione di far lavorare gli studenti autonomamente o a gruppi.
Al termine dell'attività ciascun alunno/gruppo espone le soluzioni trovate in una discussione collettiva. In questo modo gli studenti hanno modo di confrontarsi con il lavoro svolto dal resto della classe; se da un lato questo rappresenta un'occasione per gli studenti di sviluppare le proprie abilità espositive, dall'altro è un modo per venire in contatto con risultati apparentemente diversi da quelli a cui sono pervenuti. In particolare, l'insegnante conduce la discussione e indirizza la classe a porre l'attenzione su fregi apparentemente diversi, ma che sono stati creati facendo uso delle stesse isometrie. Al termine della discussione si giunge nuovamente all'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti e la classe avrà chiaro il fatto che, indipendentemente dal motivo usato, è possibile classificare i fregi in base alle trasformazioni utilizzate nel crearli. Questo crea in qualche modo un ponte con l'attività successiva, in cui viene approfondito questo tipo di discorso, andando a lavorare sullo sviluppo di competenze maggiormente avanzate, quali ad esempio la classificazione.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

2.2.2 Attività proposte

L'attività che segue viene proposta senza aver fatto alcun tipo di discorso preliminare riguardo alla traslazione ed è suddivisa in due fasi.
Nella fase 1 la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti per circa 45 minuti. Segue una discussione collettiva, in cui ogni gruppo presenta alla classe i risultati ottenuti (tempo stimato: 30 minuti).
In un primo momento viene chiesto ai vari gruppi di utilizzare GeoGebra per disegnare un triangolo e muoverlo in vari modi, osservando ciò che accade. Si utilizza dunque l'idea intuitiva

di spostamento per introdurre la traslazione, dandone un'iniziale definizione in termini di invarianti.

LA TRASLAZIONE: Esplora e congettura
Un percorso alla scoperta della traslazione
Schede studente (a)
Scheda studenti 1(a): costruisci la traslazione

Apri GeoGebra, nascondi la vista di Algebra e gli assi cartesiani

- Con lo strumento *Poligono* disegna un triangolo ABC
- Con lo strumento *Muovi* sposta il triangolo nel piano.

Che cosa osservi?

Possibili suggerimenti: trascinando un vertice cosa succede? Trascinando un lato cosa succede? Si può trascinare tutto il triangolo in modo rigido, ossia senza modificare i lati e gli angoli del triangolo?

Suggerimento: eventualmente usare lo strumento di Geogebra *Poligono rigido*

La trasformazione geometrica che ti consente di trascinare un poligono nel piano in modo rigido (no rotazione), senza che si deformino gli angoli e la misura dei lati, si chiama **traslazione**.
Quali elementi del poligono restano invariati se si applica una traslazione?

Ripeti l'attività disegnando altri oggetti geometrici (una linea, un'immagine, un poligono, ...)

Nota bene: la traslazione non coinvolge solo alcuni oggetti, ma tutto il piano

A questo punto, si procede con una seconda parte della scheda relativa alla fase 1, in cui ogni gruppo è chiamato ad operare un confronto tra insiemi di triangoli di colori distinti. In questo modo si introduce il concetto di vettore e dei tre elementi che lo caratterizzano: direzione, modulo e verso. Si giunge dunque alla definizione di traslazione caratterizzata dal vettore $\vec{v}$.

Osserva le schede con gli insiemi di triangoli traslati ed esplora o con GeoGebra o con carta, matita, squadra e compasso.

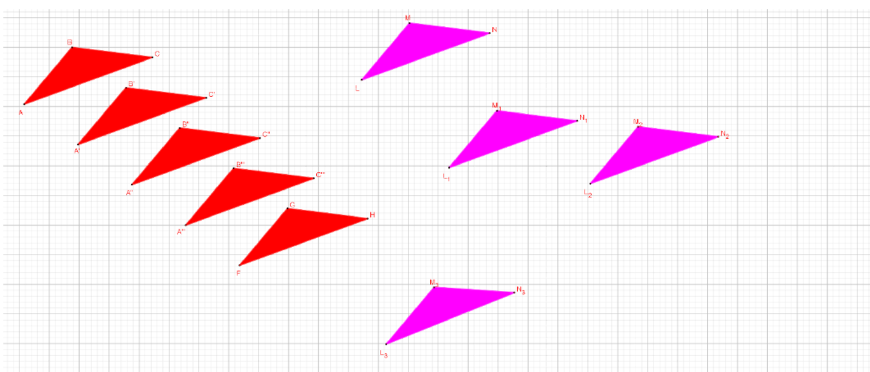


Fig. Tra_a_Scheda1_1

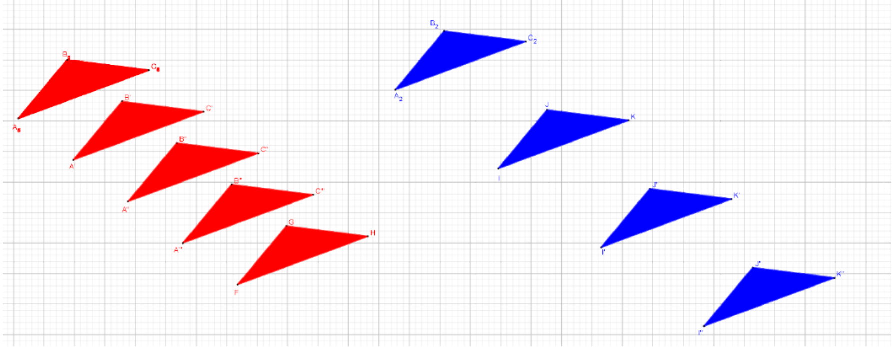


Fig. Tra_a_Scheda1_2

Che cosa osservi?

Individua i triangoli dello stesso colore. Osservi qualcosa che caratterizza le traslazioni dei triangoli di quel colore rispetto alle traslazioni degli altri insiemi di triangoli?

In che cosa si differenziano le traslazioni dei triangoli di colore rosso dalle traslazioni dei triangoli di colore blu e dei triangoli di colore fucsia?

Trovi delle analogie tra le diverse traslazioni?

Quali sono gli elementi che caratterizzano una qualsiasi traslazione tra quelle che hai analizzato?

Suggerimento: La denominazione corretta dei tre elementi è **direzione**, **verso** e **modulo** del **vettore di traslazione**. Attenzione: pur cambiando il punto di applicazione, il vettore è lo stesso.

In matematica una traslazione viene rappresentata tramite una “freccia” che si chiama **vettore**

Suggerimento: per continuare l’attività puoi utilizzare lo strumento di GeoGebra *Traslazione*
Una volta individuato il vettore $\vec{v}$ in Geogebra esiste lo strumento *Traslazione* che ti consente di traslare una figura secondo il vettore $\vec{v}$

- Con lo strumento *Poligono* disegna un triangolo ABC
- Con lo strumento *Vettore* disegna un vettore $\vec{v}$
- Con lo strumento *Traslazione* trasla il triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}$
- Partendo dal vertice A in che verso leggi i successivi 2 vertici?
- Partendo da A’, corrispondente di A nella traslazione di vettore $\vec{v}$, gli altri due vertici li leggi mantenendo l’ordine nello stesso verso?

La traslazione di vettore $\vec{v}$, se applicata a un triangolo ABC, che cosa cambia e che cosa mantiene invariato?

Una trasformazione che applicata a un triangolo ABC lo trasforma in un triangolo A’B’C’ con lo stesso verso si dice *pari*.

Nella fase 2 la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti per 20 minuti. Segue una discussione collettiva, in cui ogni gruppo presenta alla classe i risultati ottenuti (tempo stimato: 25 minuti).

Scheda studenti 2(a): realizza il tuo fregio

Apri GeoGebra, nascondi la vista di Algebra e gli assi cartesiani

- Disegna la figura seguente o una figura a tuo piacimento.

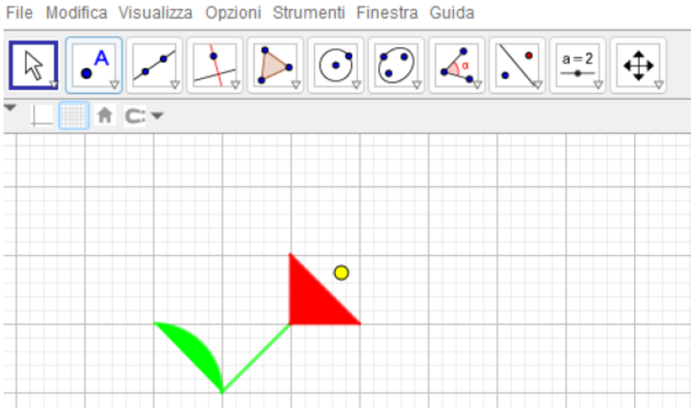


Fig. Tra_a_Scheda 2_1

- Trasla la figura in una sola direzione.
- Come scoperto nell'attività della scheda 1a è necessario disegnare un vettore (e quindi scegliere un verso, una direzione e un modulo, che indica di quanto si vuole spostare la figura). Seleziona lo strumento *Vettore* e disegna un vettore $\vec{v}$ in una posizione dell'area grafica.
- Utilizzando lo strumento *Traslazione* trasla l'oggetto secondo il vettore $\vec{v}$
- Ripeti più volte l'operazione di traslazione sull'ultima figura ottenuta sempre usando lo stesso vettore $\vec{v}$.

Quello che hai ottenuto si chiama *fregio*, ovvero la ripetizione di una stessa figura in una direzione fissata.

Approfondimento: Considera la striscia che hai appena disegnato traslando il motivo iniziale un certo numero di volte secondo il vettore $\vec{v}$; immaginandola illimitata, se la trasli secondo lo stesso vettore $\vec{v}$, che cosa ottieni? Perché?

Devi arredare la tua camera con una greca, ovvero un fregio.

Partendo dal motivo seguente prova a costruire dei fregi utilizzando traslazioni, simmetrie assiali e simmetrie centrali.

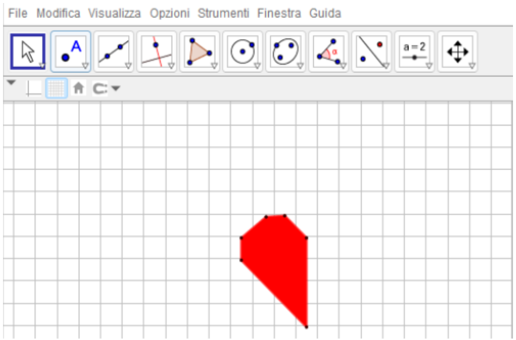


Fig. Tra_a_Scheda 2_2

Nei fregi ci sono motivi differenti che usano le stesse isometrie.

Classifica ora i fregi che hai creato con GeoGebra.

- Disegna ora tu un fregio partendo da una figura creata da te con GeoGebra

Nota: in GeoGebra per selezionare una figura costituita da più oggetti e applicare una trasformazione è necessario dapprima selezionare lo strumento che si vuole utilizzare – ad esempio in questo caso la traslazione - poi selezionare la figura avendo cura di selezionare tutti gli oggetti che la compongono, poi selezionare il vettore traslazione. In questo modo viene traslata la figura nel suo insieme.

2.3 Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry

2.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** i 7 gruppi di isometrie dei fregi
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** Frieze Symmetry
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza dei concetti di simmetria assiale e rotazione
  - svolgimento della prima attività sulla traslazione
- **Obiettivi:**
  - acquisire conoscenza e pratica operando con la traslazione e prendendo confidenza con tale concetto anche in ambiente reale e artistico
  - operare una classificazione completa, che si concilia dal punto di vista qualitativo a quella a cui aspira il percorso globale delle attività in questione
  - richiamare e lavorare con le proprietà della simmetria assiale e centrale
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede che gli studenti lavorino sulla classificazione di 7 fregi. La classe lavora a gruppi di 3\4 studenti e l'obiettivo è quello di giungere ad una spiegazione il più possibile formale di ciò che avviene nei 7 casi proposti. In questo modo, si permette agli studenti di andare a descrivere i vari gruppi di isometrie dei fregi prima ancora che questi vengano introdotti in maniera ufficiale dal docente. Al contrario di ciò che avverrebbe nel corso di una lezione frontale, la classe prende confidenza con le trasformazioni coinvolte, nel tentativo di far sì che siano gli studenti stessi a descrivere e dare significato per iscritto ai vari gruppi di isometrie dei fregi. L'attività risulta dunque essere complessa, in quanto spinge la classe ad adottare spirito d'indagine, immergendo gli studenti e le studentesse in un'esperienza di ricerca a cui probabilmente non sono abituati.
  In questo frangente, il lavoro di gruppo risulta essere fondamentale; se da un lato, fornisce agli studenti la possibilità di venire in contatto con le idee altrui e di collaborare

per la costruzione collettiva di conoscenza e competenza, dall'altro aiuta a superare momenti di scoraggiamento. In questo senso, cooperare con gli altri studenti può rappresentare un valido ausilio nel superamento di eventuali momenti di stallo, che individualmente potrebbero rappresentare ostacoli più difficilmente sormontabili. Naturalmente, un ruolo centrale è quello dell'insegnante, il quale è coinvolto e interagisce con i vari gruppi, dando consigli, proponendo riflessioni e indirizzando gli studenti nella giusta strada. È importante, tuttavia, che tale operazione venga svolta senza mai fornire agli studenti la risposta alle domande poste; lo scopo primario, infatti, è che siano gli studenti in prima persona a costruire significati riguardo ai saperi coinvolti. L'istituzionalizzazione di questi ultimi è necessaria, ma avviene sempre in un secondo momento, una volta che gli studenti avranno terminato il lavoro.

Durante lo svolgimento dell'attività, gli studenti hanno a disposizione Frieze Symmetry, un software online in cui è possibile visualizzare i 7 gruppi di isometrie. In particolare, questi ultimi sono indicati per mezzo di 7 sigle; selezionando una sigla e facendo un qualsiasi disegno sulla striscia, questo viene riprodotto automaticamente secondo le isometrie del gruppo scelto, creando così un fregio. La descrizione completa di questi gruppi e delle relative sigle si trova in Catalogo Fregi | TALES GAME (oiler.education) ed è a disposizione dell'insegnante, il quale può decidere di farne uso per guidare l'intuizione della classe nel corso dell'attività.

Ciò che risulta essere importante durante lo svolgimento del lavoro riguarda la qualità delle trasformazioni descritte, piuttosto che la quantità. In particolare, il docente ha il compito di sottolineare questo fatto agli studenti, spingendo ogni gruppo a lavorare in maniera approfondita. È meglio, infatti, soffermarsi su determinate questioni se lo si ritiene necessario e fermarsi a tre o quattro gruppi di trasformazioni che siano ben compresi dalla classe, piuttosto che descrivere superficialmente e in modo confuso tutti i gruppi di isometrie.

In questo senso, si suggerisce a circa metà dell'attività, di far presentare ad ogni gruppo lo stato di avanzamento della ricerca. Questo tipo di approccio è utile in primo luogo all'insegnante, che ha modo di fare un quadro della situazione, andando ad intervenire laddove lo ritiene necessario, facendo domande e proponendo riflessioni. Dall'altro lato, questa prassi rappresenta per gli studenti e per i vari gruppi un'occasione di crescita e di confronto, permettendo loro di venire in contatto con intuizioni e idee potenzialmente utili e differenti dalle proprie. Inoltre, non è da sottovalutare l'aspetto di chiarificazione per il gruppo stesso che espone, il quale ha modo di riflettere sui risultati ottenuti e di metterli eventualmente in discussione.

In questo frangente, emerge la difficoltà dell'attività; nell'esposizione dei progressi svolti, viene richiesto agli studenti di tradurre l'intuizione visiva riguardo all'effetto delle varie trasformazioni in un discorso chiaro e il più possibile formale.

L'attività termina con l'istituzionalizzazione dei gruppi di isometrie dei fregi; agli studenti viene proposto il catalogo dei fregi, nel quale viene presentata la classificazione dei vari gruppi utilizzando la nomenclatura cristallografica, che non corrisponde a quella utilizzata dal software Frieze Symmetry.

In questa attività, si vuole andare a lavorare in primo luogo sulla capacità degli studenti di classificare una serie di fregi. Nel farlo però ci si concentra anche sullo sviluppo di altre competenze; in particolare, l'esposizione in classe permette agli studenti di acquisire capacità di argomentazione, andando a giustificare le proprie tesi e ad esprimerle in maniera esaustiva. Inoltre, nella consegna dell'attività viene richiesto di classificare 7 fregi; questi rappresentano casi particolari di alcuni dei 7 gruppi di isometrie dei fregi e il passo ulteriore che deve essere fatto dagli studenti riguarda la generalizzazione di questo discorso. L'acquisizione di questo tipo di competenza non risulta essere semplice e, in questo caso, è agevolato dall'utilizzo del software Frieze Symmetry. Quest'ultimo permette di creare fregi a partire da motivi differenti, ma utilizzando lo stesso tipo di trasformazioni, spingendo così la classe a non fossilizzarsi sulle 7 casistiche proposte.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2-3 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

2.3.2 Attività proposte e soluzioni

Il tempo dedicato a tale scheda è di 150 minuti, nel corso dei quali la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti. I rimanenti 30 minuti vengono impiegati nella discussione collettiva da svolgere preferibilmente a circa metà dell'attività, in cui ogni gruppo presenta alla classe i risultati ottenuti.

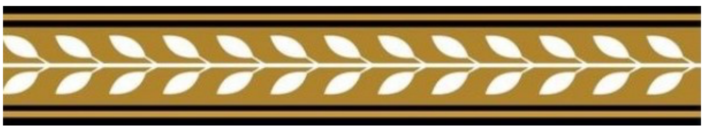
LA TRASLAZIONE: Scopri, classifica e generalizza
Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry
Scheda studente (b)

1 - Classifica i seguenti fregi.

Fregio 1

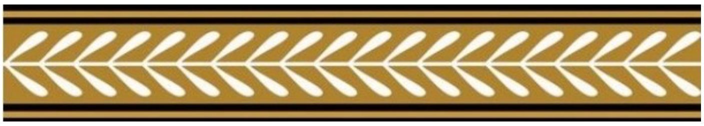
Fregio 2

Fregio 3

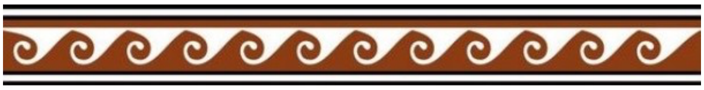


Fregio 4

Fregio 5



Fregio 6



Fregio 7

Nel fregio 1, la figura di base presenta un asse di simmetria perpendicolare ai lati della striscia e viene glissoriflessa. Ciò che accade può essere verosimilmente rappresentato nel modo seguente:

Figura 1 Motivo di base, simmetria con asse perpendicolare ai lati del fregio, glissosimmetria

Dove nell'ultima rappresentazione i colori diversi sono stati utilizzati unicamente per evidenziare la glissosimmetria ed è di per sé imprecisa, in quanto la colorazione dovrebbe rispettare la simmetria. Quindi, utilizzando la nomenclatura cristallografica, il gruppo di isometrie utilizzato corrisponde al p2mg (nel software pma2).
Nel fregio 2, la figura di base è priva di simmetrie e viene traslata in entrambe le direzioni; quindi, il gruppo utilizzato è p1 (nel software p111).
Nel fregio 3, la figura di base presenta una simmetria rispetto ad un asse parallelo ai lati del fregio:

Figura 2 Motivo di base, simmetria con asse parallelo ai lati del fregio

A questo punto la figura viene traslata in entrambe le direzioni. Il gruppo utilizzato corrisponde quindi a p11m (nel software p1m1).
Nel fregio 4, la figura di base presenta una simmetria centrale. Una rappresentazione di ciò che accade è la seguente:

Figura 3 Motivo di base, simmetria centrale

Il gruppo utilizzato corrisponde a p2 (nel software p112). Da notare che anche in questo caso nell'ultima rappresentazione è presente l'imprecisione legata alla colorazione come nel caso del fregio 1.
Nel fregio 5, come per il fregio 3, la figura presenta una simmetria con asse parallelo ai lati del fregio. Dunque, il gruppo utilizzato è p11m.
Nel fregio 6, la figura non presenta simmetrie interne e viene traslata nelle due direzioni. Non si può parlare di simmetria centrale a causa della diversa colorazione delle due parti. Dunque, il gruppo corrisponde a p1.
Infine, nel fregio 7, la figura disegnata presenta una simmetria centrale illustrata come segue (vengono nuovamente utilizzati colori diversi al fine di mettere in evidenza la simmetria, ma quest'ultima nel fregio è rispettata dalla colorazione):

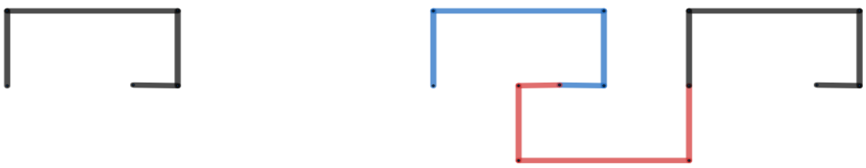


Figura 4 Motivo di base, simmetria centrale

Al termine dell'attività, ai vari gruppi viene fornito il catalogo dei fregi, in cui sono presentati tutti i gruppi con annessa spiegazione delle trasformazioni coinvolte. In questo modo, da un lato avviene l'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti, dall'altro viene fornito agli studenti un importante strumento di confronto, di cui ogni gruppo può fare uso in un eventuale momento dedicato all'autovalutazione dei risultati ottenuti.

CATALOGO FREGI

Software usato: *Frieze Symmetry* (http://math.hws.edu/eck/js/symmetry/frieze.html)

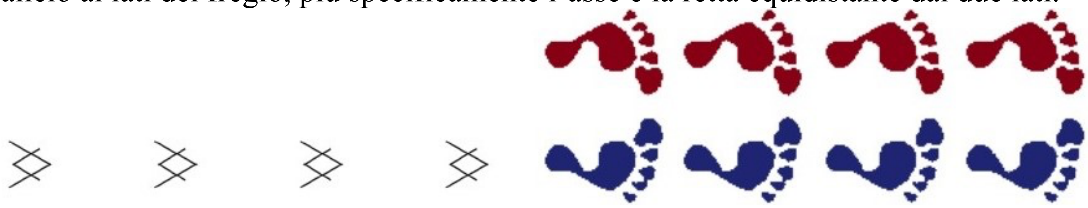
La nomenclatura indicata dal software non corrisponde sempre a quella usuale cristallografica, consigliamo di fornire le equivalenze solo a posteriori per non confondere la classe

p1 (nel software indicato con p111): la figura disegnata, priva di simmetrie, viene traslata in entrambe le direzioni.

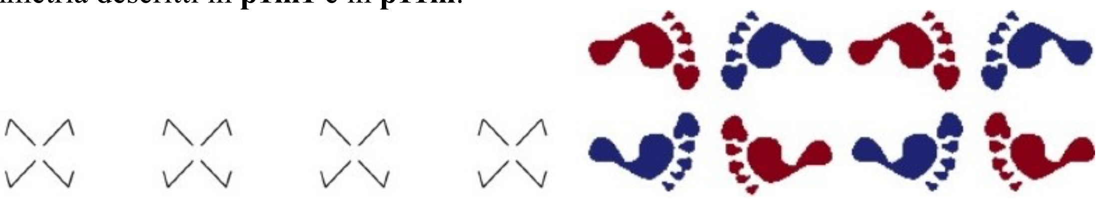
p1m1 (nel software indicato con p1m1): la figura disegnata ha un asse di simmetria perpendicolare rispetto ai lati del fregio e al solito viene traslata in entrambe le direzioni.

La colorazione differente dei piedi è solamente per chiarire la simmetria, di per sé è imprecisa perché la colorazione deve rispettare la simmetria.

p11m (nel software indicato con pm11): la figura disegnata ha un asse di simmetria parallelo ai lati del fregio, più specificamente l’asse è la retta equidistante dai due lati.



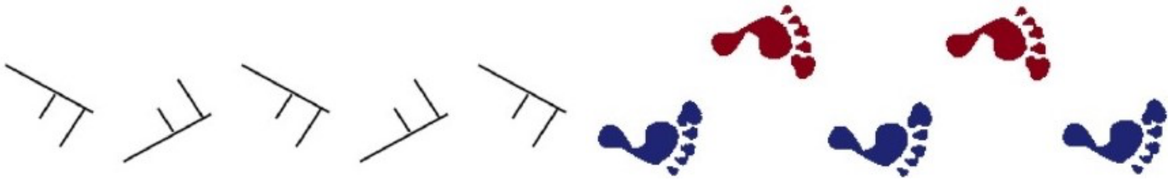
p2mm (nel software indicato con pmm2): la figura disegnata ammette entrambi gli assi di simmetria descritti in **p1m1** e in **p11m**.



p2 (nel software indicato con p112): la figura disegnata ammette una simmetria centrale, ossia è invariante per rotazione di un angolo piatto.

*I due ultimi gruppi (**p1a1** e* **pma2***) presentano le* ***glissosimmetrie*** *e quindi la descrizione risulterà più difficile.*

p11g (nel software p1a1): la figura disegnata non presenta simmetrie interne e viene glissoriflessa nel senso più puro del termine (glissare deriva dal francese *glisser*, ossia scivolare). La "F" viene specchiata rispetto ad un asse orizzontale (lo stesso di **p11m**) ma in seguito viene anche traslata in avanti secondo la direzione della striscia. Pur sembrando la descrizione difficile, la trasformazione è in realtà una di quelle di cui facciamo più esperienza nella vita quotidiana: *quando camminiamo*!



p2mg (nel software pma2): la figura che viene glissoriflessa presenta un asse di simmetria perpendicolare ai lati della striscia.

2.4 Fregi, gruppi di simmetria e attività di problem solving

2.4.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** attività di problem solving riguardo i 7 gruppi di simmetria dei fregi
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** Tales Game, GeoGebra5, Google Classroom
- **Prerequisiti:** conoscenza degli elementi di base della geometria euclidea e del software GeoGebra
- **Obiettivi:** riconoscere che i possibili gruppi di simmetria dei fregi sono soltanto 7
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività si compone di due fasi. Nella fase 1 la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti con il software Tales Game. Inizialmente è prevista una fase di esplorazione libera, in cui ogni gruppo crea la propria configurazione a piacere, con il tassello a forma di quadrato, di rettangolo, di triangolo o di rombo, e dispone il tassello in maniera libera dopo aver selezionato l'opzione *FREGIO*. Questo permette alla classe di entrare nella logica del software e di prendere confidenza con i comandi e le azioni da svolgere per creare un fregio a piacimento.
  In un secondo momento, si sceglie un particolare gruppo di isometrie e si chiede ai vari gruppi di creare un fregio a piacere utilizzando il gruppo scelto. In questa fase gli studenti hanno a disposizione il Catalogo dei Fregi, nel quale sono presentati i vari gruppi e le trasformazioni coinvolte in ognuno di essi. In aggiunta al catalogo proposto

sul software, se l'attività *"Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry"*, ovvero la scheda sulla traslazione relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", è stata svolta, gli studenti possono fare uso della descrizione dei 7 gruppi di isometria dei fregi a cui sono giunti al termine di tale scheda come ausilio in più.
Successivamente, si fa un passo ulteriore, e si chiede ai vari gruppi di scegliere un fregio online o tra quelli proposti nell'attività *"Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry"* e di riprodurlo con Tales Game. Si lavora, dunque, all'inverso rispetto a quanto detto poc'anzi; se prima si partiva scegliendo un determinato gruppo di isometrie e si creava un fregio utilizzandolo, adesso si parte da un fregio qualsiasi e si richiede di individuare il gruppo con cui è stato creato. In questo frangente, la difficoltà è maggiore, in quanto gli studenti devono individuare un possibile tassello base, che corrisponde alla figura da selezionare sul software, per poi andare a ricreare il tassello e disporlo in maniera corretta lungo il fregio. A questo punto si chiede ai vari gruppi di classificare il fregio. Nel caso in cui il fregio scelto dagli studenti faccia parte dell'attività *"Scopriamo i fregi con Frieze Symmetry"* e se tale scheda è stata svolta in classe, la classificazione richiesta, essendo già stata eseguita, diventa uno strumento di verifica addizionale, utile agli studenti per consolidare le conoscenze acquisite precedentemente.
Nella fase 2 si propone alla classe un diagramma di flusso, mediante il quale si vuole costruire la dimostrazione dell'esistenza di solo 7 gruppi di isometrie per i fregi. Questo passo rappresenta una naturale conclusione del percorso sulla traslazione ed è ritenuto indispensabile ai fini di una trattazione completa dell'argomento, in quanto richiama e ri-contestualizza tutti i 7 gruppi di isometrie dei fregi.
L'elaborazione di una dimostrazione risulta essere piuttosto difficoltosa e richiede agli studenti un livello di linguaggio specifico formale non facilmente accessibile; per questo motivo si utilizza lo strumento del diagramma di flusso, andando a costruire un'attività di tipo logico-argomentativo che conduce la classe verso la scoperta di tale dimostrazione. A diagramma completo, infatti, gli studenti, analizzandolo, dovrebbero giungere alla consapevolezza dell'esistenza di soli 7 gruppi di isometria dei fregi.
La classe lavora nuovamente a gruppi di 3\4 studenti e ogni gruppo è chiamato a completare il diagramma. Insieme a quest'ultimo, ai gruppi viene fornita una serie di fregi; ognuno di essi fa riferimento a un gruppo di isometrie e gli studenti devono compilare il diagramma con la corretta classificazione e con il fregio relativo. Il diagramma di flusso può essere proposto alla classe tramite una Google Classroom.
Una volta terminato il completamento del diagramma, il docente potrebbe domandare ad ogni gruppo di esporre i risultati ottenuti di fronte alla classe; in questo modo, si procede con una valutazione collettiva del lavoro svolto, in cui gli studenti giungono alla soluzione confrontando le proprie idee e guidati dall'insegnante che conduce il dibattito.
L'ultimo quesito proposto nella scheda si può ritenere un approfondimento; in particolare, viene proposto alla classe un menù e viene chiesto agli studenti di creare diverse combinazioni di ordini dato un budget da spendere. In questo frangente, si vuole creare un ponte tra le decorazioni lineari e le tassellazioni del piano, in modo che la classe possa ritrovare algebricamente i 7 gruppi di isometrie dei fregi. Nel farlo si crea una connessione tra l'argomento affrontato e la realtà quotidiana, analogamente a

quello che avviene nella vignetta *"Symmetry step by step"*, da cui sono nate le attività proposte. Inoltre, l'obiettivo è anche quello di avvicinare gli studenti alla matematica, rendendola meno astratta e meno monotona, e ben inserita in un contesto di didattica innovativa.
Anche in quest'ultima fase gli studenti lavorano a piccoli gruppi e al termine dell'attività il docente guida la classe in una discussione collettiva.

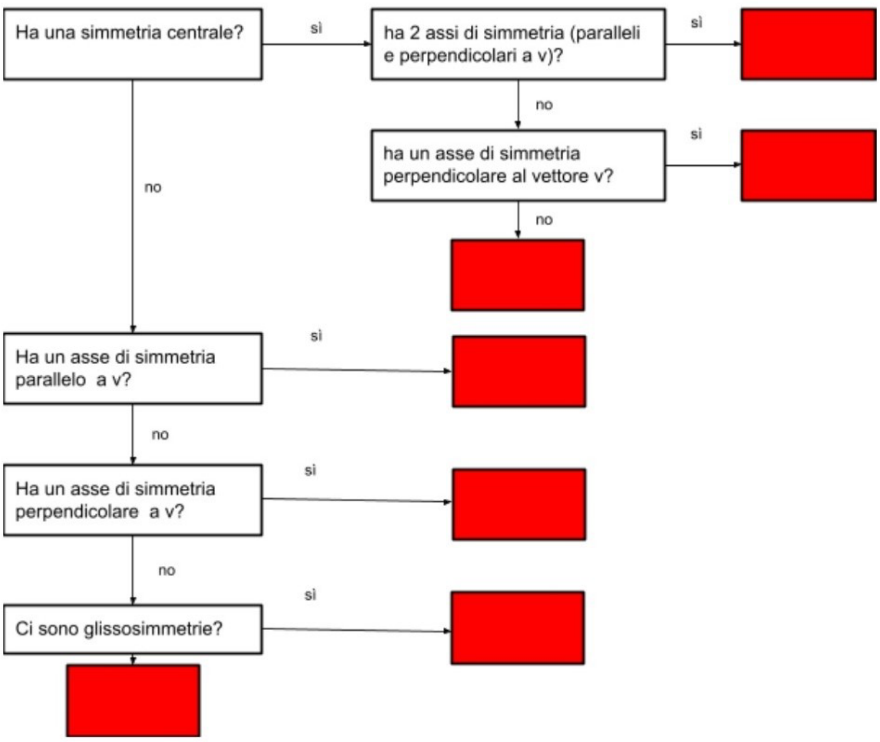
- **Tempo di svolgimento previsto:** 1 ora
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

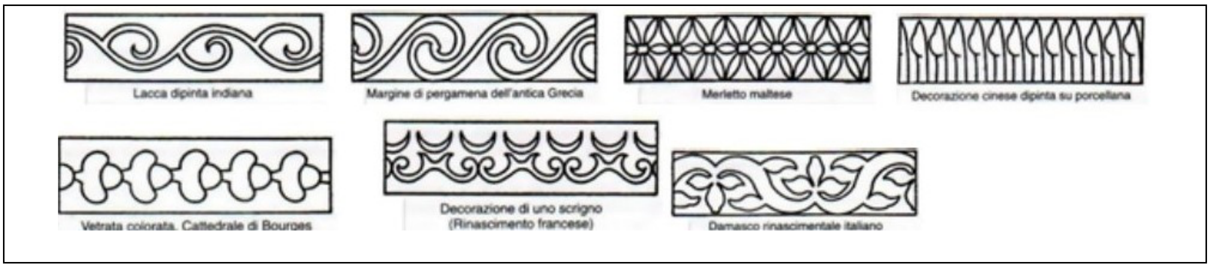
2.4.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività è suddivisa in 2 fasi. Nella fase 1 la classe lavora a gruppi con lo strumento Tales Game per circa 20 minuti.
Alla fase 2 si dedicano 30 minuti e gli studenti procedono con il completamento del diagramma di flusso. Quest'ultimo rappresenta infatti il punto centrale dell'attività ed è importante che ogni gruppo si soffermi su di esso per tutto il tempo necessario.

LA TRASLAZIONE: Risolvi problemi, argomenta, dimostra
Fregi, gruppi di simmetria e attività di problem solving
Scheda studente 1(c): problemi di classificazione dei fregi

Completa il diagramma di flusso inserendo la corretta classificazione nei rettangoli rossi e abbinando il fregio corrispondente tra quelli proposti di seguito. Il vettore $\vec{v}$, richiamato nel diagramma, è il vettore traslazione che genera il fregio.





Avendo a disposizione il Catalogo dei Fregi disponibile sul software Tales Game, è semplice completare il diagramma.
I casi che prevedono una simmetria centrale sono 3. È possibile visualizzarlo utilizzando gli esempi proposti sul catalogo ed escludendo i casi in cui non si può parlare di simmetria centrale restano p2, p2mg e p2mm.

Figura 5 Esempi di fregi costruiti utilizzando rispettivamente p2, p2mg, p2mm

Tra questi, l'unico in cui sono presenti due assi di simmetria, uno parallelo e l'altro perpendicolare ai lati del fregio, è p2mm. Negli altri due casi, è evidente che in p2mg è presente un asse di simmetria perpendicolare ai lati del fregio, mentre in p2 non sono presenti assi di simmetria paralleli o perpendicolari a $\vec{v}$.
A questo punto è naturale escludere questi 3 gruppi nel completamento del diagramma relativo al caso in cui non sono presenti simmetrie centrali. I gruppi che restano in questo frangente sono 4: p1, p11g, p11m e p1m1.
Andando nuovamente ad utilizzare gli esempi proposti sul catalogo è intuitivo visualizzare che l'unico ad avere una simmetria con asse parallelo al vettore $\vec{v}$ risulta essere il gruppo p11m. Nel caso di p11g, infatti, non si può parlare di simmetria, in quanto la figura è traslata.

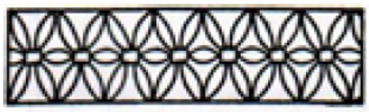
Figura 6 Esempi di fregi costruiti utilizzando rispettivamente p11g e p11m

Nel caso in cui non sia presente una simmetria ad asse parallelo a $\vec{v}$ restano da inserire p1, p11g e p1m1. Tra questi l'unico in cui è presente una simmetria ad asse perpendicolare rispetto a $\vec{v}$ è p1m1.

Figura 7 Esempio di fregio costruito con p1m1

A questo punto restano due casi: p1 e p11g. Tra questi uno prevede una glissosimmetria ed è semplice visualizzarlo se si osserva la figura 6. Nel caso di p11g, infatti, la figura viene

glissoriflessa, mentre in p1 il motivo di base non presenta simmetrie e viene semplicemente traslato nelle due direzioni.
Analizzando il diagramma si osserva che mancano 2 casi. Il primo che sembra non essere preso in considerazione è il caso in cui la figura presenta una simmetria centrale e una simmetria con asse parallelo a $\vec{v}$. Tuttavia, è semplice notare che in realtà questa possibilità rientra in una di quelle presenti nel diagramma. Infatti, si nota che una figura che possiede queste due tipologie di simmetrie, automaticamente presenta anche una simmetria con asse perpendicolare a $\vec{v}$.
L'altro caso che non viene considerato è quello in cui la figura, in assenza di simmetria centrale, possiede 2 assi di simmetria, uno parallelo e uno perpendicolare a $\vec{v}$. Tuttavia, si nota che una figura di questo tipo dovrebbe presentare anche una simmetria centrale, andando contro l'ipotesi di assenza di quest'ultima.
Dunque, risulta chiaro che nel diagramma vengono prese in considerazione tutte e sole le possibilità, mettendo in evidenza l'esistenza di soli 7 gruppi di isometrie per i fregi.
Per quanto riguarda la classificazione dei fregi proposti nella scheda, la corrispondenza è la seguente:



Merletto maltese

p2mm, in quanto la figura presenta una simmetria centrale e simmetrie sia con asse parallelo a $\vec{v}$, sia con asse perpendicolare a $\vec{v}$.

Lacca dipinta indiana

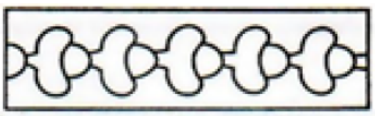
p11g, in quanto la figura non presenta né simmetrie centrali, né simmetrie con asse parallelo o perpendicolare a $\vec{v}$. La figura presenta una glissosimmetria.

Margine di pergamena dell'antica Grecia

p2, in quanto la figura ha una simmetria centrale, ma non possiede simmetrie né con asse parallelo, né con asse perpendicolare a $\vec{v}$.

Decorazione cinese dipinta su porcellana

p1, in quanto la figura non ha simmetrie e viene traslata in entrambe le direzioni.



Vetrata colorata, Cattedrale di Bourges

p11m, in quanto la figura non presenta simmetrie centrali, ma ha una simmetria con asse parallelo al vettore $\vec{v}$.

Decorazione di uno scrigno
(Rinascimento francese)

p1m1, in quanto la figura non ha simmetrie centrali, ma presenta una simmetria con asse perpendicolare a $\vec{v}$.

Damasco rinascimentale italiano

p2mg, in quanto la figura presenta una simmetria centrale e una simmetria con asse perpendicolare a $\vec{v}$.

Solo dopo aver analizzato a fondo il diagramma, il gruppo può procedere con l'ultimo quesito proposto nell'attività, che può essere considerato un approfondimento. Il tempo rimanente viene utilizzato per la discussione prevista al termine dell'attività, in cui ogni gruppo espone il lavoro svolto.

Scheda studente 2(c): combina i menù

UN MENÙ UN PO' BIZZARRO

Il ristorante Mc Symmetry propone il seguente menu

PIATTI DEL GIORNO	PREZZO	SCONTO 50%!
∞	1	1/2 (se a destra di *)
*	1	
2	1/2	¼ (se a destra di *)
X	1	

Se dovessi spendere esattamente 2 euro, quanti e quali menù diversi potresti ordinare?

Ritrovi qualche analogia con i gruppi di simmetria dei fregi?

Una volta create le combinazioni ed eseguito il confronto con i gruppi di isometrie dei fregi, si giunge a una possibile interpretazione dei vari simboli:
∞ traslazione
2 rotazione di 180°
X glissosimmetria
* simmetria assiale
Tra le osservazioni che possono condurre a tale interpretazione vi sono le seguenti:

- ∞ compare in 7 delle combinazioni totali e, trattandosi di fregi, la traslazione è presente in ognuno dei 7 gruppi di isometria. Lo stesso vale per *, ma se si interpretasse come la traslazione, ma in questo caso non si troverebbero equivalenti per la simmetria assiale, in quanto nessuno degli altri tre simboli compare 5 volte nei menù in cui è presente *.

- Si osserva facilmente che i gruppi che coinvolgono la simmetria assiale sono 5 e * compare in 5 dei 7 menù in cui è presente anche ∞.
- Tra i gruppi di isometrie sono 3 quelli che contengono una simmetria centrale; tra i menù contenenti ∞, il 2 compare 3 volte.

A questo punto, in base all'interpretazione data, le combinazioni possibili sono 7 e corrispondono ai 7 gruppi di isometria dei fregi:

∞∞	1+1=2	p1	traslazione
∞*	1+1=2	p11m	simmetria con asse parallelo a $\underline{v}$
∞X	1+1=2	p11g	glissosimmetria
22∞	1+½+½=2	p2	rotazione di 180°
*∞∞	1+½+½=2	p1m1	simmetria con asse perpendicolare a $\vec{v}$
*22∞	1+¼+¼+½=2	p2mm	simmetria con asse a assi, uno parallelo e uno perpendicolare a $\vec{v}$
2*∞	½+1+½=2	p2mg	simmetria centrale + simmetria con asse perpendicolare a $\vec{v}$

CAPITOLO 3

LA SIMMETRIA ASSIALE

3.1 Introduzione

La simmetria assiale viene solitamente introdotta in classe mediante definizioni matematiche. Nella grande maggioranza dei casi il docente fa riferimento al libro di testo, nel quale, prima di andare a definire rigorosamente la simmetria assiale, è usuale introdurre il concetto di *simmetrico di un punto rispetto a una retta*:

> "Considerato nel piano un punto P e una retta r, si dice simmetrico di P rispetto a r il punto P', tale che l'asse PP' sia r, se $P \notin r$, il punto P stesso, se $P \in r$." (Sasso, 2013, p. 215)

Tale definizione risulta essere poco intuitiva ad una prima lettura e la costruzione del punto P' potrebbe non risultare banale per la classe. A questo punto si introduce la simmetria assiale:

> "Si chiama simmetria assiale rispetto a una data retta r la trasformazione che associa a ogni punto P del piano il punto P', simmetrico di P rispetto a r."

Gli enti coinvolti sono punti e rette del piano euclideo, i quali vengono percepiti come astratti e lontani dalla realtà quotidiana. Inoltre, la simmetria assiale e più in generale le trasformazioni geometriche hanno un forte legame con il concetto di corrispondenza e possiedono un ben determinato significato analitico. La trattazione prevista dai libri di testo non mette in evidenza tale legame, in quanto spesso accade che lo studio delle trasformazioni venga visto semplicemente come lo studio delle trasformate delle figure. Questo non favorisce l'acquisizione di una visione analitica della simmetria assiale, che risulta invece essere molto importante.

Le attività proposte sul sito del Liceo Matematico mirano a non dare per scontato il suddetto legame e, inoltre, sono strutturate in maniera tale che si arrivi alla definizione e alla formalizzazione del concetto di simmetria assiale solo al termine di un processo in cui gli studenti familiarizzano con i contenuti e apprendono facendo.

La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura", si intitola *"Alla scoperta della simmetria assiale"* e ha lo scopo di condurre la classe, attraverso un approccio di scoperta, verso la comprensione delle principali caratteristiche della simmetria assiale. Al contrario di quanto previsto dai libri di testo, nella scheda si costruisce passo a passo il concetto di simmetria assiale, utilizzando come ausilio un foglio di carta e uno spillo. Questi ultimi offrono la possibilità di avvicinare l'argomento alla realtà fisica, mettendo in luce il fatto che la simmetria assiale non è un concetto che esiste soltanto nel piano euclideo, ma è osservabile negli oggetti che ci circondano. Inoltre, rende molto più intuitivo il processo alla base della trasformazione in questione, che gli studenti hanno modo di osservare concretamente.

La seconda attività, relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", si intitola *"Simmetrie assiali con il software Tales Game"* ed è elaborata sotto forma di gioco da proporre alla classe attraverso il software Tales Game. Questo è un elemento importante, in quanto rende l'attività

particolarmente stimolante, attirando l'attenzione degli studenti e stimolando la loro creatività. L'obiettivo è quello di far esplorare il concetto di simmetria assiale; in particolare, emergono le due forme con cui viene proposto l'argomento. Da un lato la simmetria assiale viene introdotta nella sua forma implosa, ovvero una figura ripiegata su se stessa lungo un asse di simmetria, dall'altro nella sua forma esplosa, cioè una figura duplicata rispetto a se stessa secondo un asse di simmetria. La prima delle due forme emerge maggiormente nella prima attività, nella quale gli studenti lavorano manualmente piegando in vari modi un foglio di carta alla ricerca della simmetria corretta, mentre nella seconda attività si privilegia la forma esplosa e ciò emerge piuttosto chiaramente dalla struttura data al gioco.
La terza attività, relativa al campo "risolvi problemi, argomenta, dimostra", è stata intitolata *"Problem solving usando le simmetrie assiali"* e si concentra sull'aspetto analitico della simmetria assiale. Nel dettaglio, vengono proposti una serie di esercizi guidati, attraverso i quali gli studenti vengono in contatto con la rappresentazione analitica di alcune proprietà delle simmetrie. Lo scopo è quello di consolidare l'apprendimento delle principali caratteristiche della simmetria assiale, spingendo la classe a lavorare sul problem solving e su abilità di alto livello.

3.2 Alla scoperta della simmetria assiale

3.2.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione al concetto di simmetria assiale
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** un foglio di carta A4 e uno spillo
- **Prerequisiti:**
  - capacità di piegare un foglio di carta seguendo una serie di indicazioni date
  - conoscenza delle nozioni di base di geometria euclidea
  - conoscenza del concetto di retta perpendicolare a una retta passante per un punto e relativa costruzione
- **Obiettivi:**
  - concettualizzare la simmetria assiale
  - conoscenza e comprensione delle proprietà caratteristiche della simmetria assiale (1. i punti che si corrispondono sono equidistanti dall'asse di simmetria; 2. i punti che si corrispondono giacciono sulla perpendicolare all'asse passante per essi; 3. un punto che sta sull'asse è corrispondente di se stesso)
  - saper costruire la figura simmetrica di una figura data rispetto ad un asse di simmetria
  - dare un significato all'utilizzo di un artefatto, mettendolo in relazione con la nozione geometrica di simmetria assiale
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in 2 fasi. Nella fase 1 la classe entra in contatto con il concetto di simmetria assiale operando

direttamente con esso; in particolare, nella scheda 1 e nella scheda 2 gli studenti utilizzano un foglio di carta e uno spillo per costruire simmetrie di una figura data rispetto ad assi di simmetria differenti, mentre nella scheda 3 viene proposta una serie di domande. In questo frangente, la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti e le tre schede vengono consegnate una alla volta.
Nella scheda 1 viene chiesto agli studenti, dato un foglio di carta A4 su cui sono disegnati una figura e una retta di colore rosso, di disegnare la figura simmetrica di quella data. Per farlo i gruppi hanno a disposizione uno spillo, che viene utilizzato per individuare i punti simmetrici dopo aver piegato il foglio lungo la retta data. In questo modo emerge il significato di corrispondenza puntuale nel piano implicito nel concetto di simmetria assiale. Particolare attenzione deve essere prestata anche alla colorazione corretta della figura simmetrica, che in un primo momento potrebbe essere considerato un elemento secondario e che invece è importante che rispetti la simmetria. Inoltre, l'attività manuale prevista dalla scheda, in cui si va a piegare il foglio in modo da far coincidere due figure sovrapponendole, permette ai vari gruppi di dare un significato intuitivo a uno degli elementi caratterizzanti della trasformazione: l'asse di simmetria. Quest'ultimo, dunque, non viene introdotto per mezzo di una definizione formale e rigorosa, la quale giunge solo in seguito ad un percorso improntato sull'esplorazione e la sperimentazione con gli oggetti matematici trattati.
Il docente ha un ruolo attivo e monitora il lavoro dei gruppi; in particolare, pone attenzione sul metodo utilizzato dai vari gruppi e ha il compito di dare suggerimenti impliciti facendo domande mirate e proponendo riflessioni.
La scheda 2 prevede che, in modo analogo a quanto fatto nella scheda 1 e utilizzando lo stesso foglio di carta A4, si disegni la figura simmetrica di quella data rispetto a una seconda retta di colore blu.
La scheda 3 è pensata invece per indurre la classe a ripercorrere le operazioni compiute nelle schede precedenti. Sono dunque previste alcune domande che mirano a far riflettere gli studenti sulle azioni svolte, favorendo l'emergere di segni ed espressioni che rimandano all'uso dell'artefatto. Ogni gruppo è chiamato a rispondere per iscritto alle suddette domande; questo da un lato richiede agli studenti di tradurre l'attività manuale e l'intuizione visiva in un discorso chiaro, dall'altro rappresenta un'occasione per evolvere i significati matematici che emergono durante l'attività. In particolare, le ultime due domande spingono gli studenti ad osservare e confrontare le figure ottenute, offrendo quindi uno spunto per andare a lavorare e riflettere sulle proprietà invarianti e sul ruolo dell'asse nella realizzazione delle simmetrie.
Al termine della fase 1 l'insegnante guida la classe in una discussione collettiva, in cui l'obiettivo è, in un primo momento, quello di esporre il metodo utilizzato nella ricerca della figura simmetrica a quella data. In questo modo il docente ha modo di condurre la discussione sul problema della corrispondenza tra segmenti, andando a mettere in luce un'importante proprietà delle simmetrie assiali che assicura che queste trasformino rette in rette e segmenti in segmenti di uguale lunghezza. Questo rappresenta un elemento caratterizzante della simmetria assiale al quale la classe giunge autonomamente, in seguito ad un percorso in cui ogni studente è artefice della propria conoscenza e la costruisce in prima persona, attraverso un approccio concreto dato da

un continuo confronto visivo tra i punti e i segmenti della figura di origine e quelli della figura ottenuta.
In un secondo momento l'insegnante sposta il focus sulle risposte date alle domande della scheda 3. In questo frangente, il docente orchestra la discussione in modo che la classe giunga in maniera naturale al riconoscimento di un'altra proprietà fondamentale della simmetria assiale: l'equidistanza dall'asse dei punti corrispondenti.
La discussione collettiva offre inoltre agli studenti un'opportunità di autovalutazione; confrontando i propri risultati con quelli ottenuti dagli altri gruppi emergono difficoltà e ambiguità su cui la classe ha l'opportunità di lavorare in maniera approfondita
La fase 1 si considera conclusa con tale discussione che conduce la classe verso una generalizzazione dei saperi coinvolti.
Nella fase 2 la classe lavora nuovamente a gruppi di 3\4 studenti su due ulteriori schede. Nella scheda 4 viene chiesto agli studenti, dato un foglio A4 su cui sono disegnati un punto A e una retta di colore rosso, di trovare il punto simmetrico di A rispetto alla retta data piegando il foglio di carta in maniera opportuna e utilizzando lo spillo.
A questo punto si sposta l'attenzione sul segmento congiungente i due punti corrispondenti e i gruppi sono chiamati a rispondere ad una serie di domande. In particolare, viene chiesto ai gruppi di eseguire una doppia piegatura, una lungo l'asse per individuare il punto simmetrico e una per individuare il suddetto segmento, che porta a riflettere sulla posizione reciproca tra il segmento e l'asse di simmetria. In questo modo gli studenti, osservando l'angolo che si forma come prodotto finale delle due piegature, riconoscono la sovrapponibilità di quest'ultimo a ciascuno dei quattro angoli individuati dalle due piegature, individuando così la perpendicolarità tra il segmento e l'asse.
Nella seconda parte della scheda 4, invece, si pone l'attenzione sul punto medio del segmento congiungente i due punti corrispondenti e vengono messi in relazione i due segmenti individuati da tale punto medio. In questo frangente, lo scopo è quello di mettere in luce l'equidistanza dall'asse dei punti corrispondenti, approfondendo il discorso emerso dal lavoro svolto sulle schede precedenti. Si fa dunque un passo ulteriore, chiedendo ai vari gruppi di fornire delle spiegazioni e di giustificare le congetture fatte; questo potrebbe indurre gradualmente la classe alla definizione di simmetria assiale. In questo modo, gli studenti giungono alla concettualizzazione dell'argomento trattato lavorando direttamente con quest'ultimo e sperimentandone concretamente proprietà e caratteristiche.
Infine, nella scheda 5, si richiede ai gruppi di utilizzare due delle proprietà emerse in maniera intuitiva nella fase 1 ed evidenziate più formalmente nella scheda 4. Nel dettaglio, utilizzando lo stesso foglio di carta della scheda 4, la consegna è quella di individuare il simmetrico di un punto B disegnato su tale foglio rispetto all'asse (ovvero la retta rossa), senza però usare lo spillo. Gli studenti, dunque, facendo uso delle proprietà di equidistanza e di perpendicolarità, dovranno piegare il foglio in maniera opportuna al fine di individuare il punto richiesto. Inoltre, nella scheda 5 si chiederà di rispondere ad alcune domande; tra queste viene chiesto agli studenti di spiegare per iscritto il procedimento utilizzato nella ricerca del punto simmetrico di B. Tale quesito,

insieme agli altri proposti nella scheda, offrono uno spunto per sviluppare una discussione finale, in cui ogni gruppo ha modo di condividere idee e risultati.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula o aula virtuale
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

3.2.2 Attività proposte e soluzioni

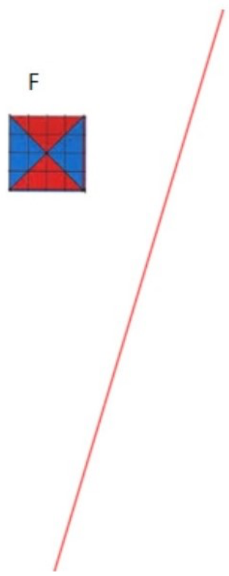
L'attività è suddivisa in due fasi e viene proposta senza che sia stato fatto alcun tipo di discorso preliminare sulla simmetria assiale.
Alla fase 1 vengono dedicati complessivamente 70 minuti, in cui la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti. Ad ogni gruppo viene consegnato un foglio di carta A4 su cui è disegnata una figura e una retta di colore rosso, uno spillo e la scheda 1, su cui gli studenti lavorano per circa 20 minuti.

LA SIMMETRIA ASSIALE: esplora e congettura
Alla scoperta della simmetria assiale
Scheda studente 1(a): la simmetria assiale con carta e spillo

Ti vengono consegnati un foglio e uno spillo. Nel foglio trovi una figura colorata F (un quadrato e le sue diagonali) e una retta di colore rosso.

Disegna la figura simmetrica F' della figura data rispetto alla retta di colore rosso con l'aiuto di uno spillo e colorala rispettando i colori della figura data.

Di seguito un suggerimento di procedura:
- piega il foglio lungo la retta di colore rosso in modo che la figura data resti visibile sulla parte esterna del foglio,
- fai dei piccoli fori puntando lo spillo,
- apri il foglio e utilizza i fori per ricostruire la figura simmetrica.



Una volta terminata la scheda 1, l'insegnante fornisce ai vari gruppi la scheda 2. Il tempo dedicato a quest'ultima è di soli 10 minuti; la consegna, infatti, è molto simile a quella della scheda precedente e l'unica differenza risiede nella scelta dell'asse di simmetria. Tuttavia, il metodo per disegnare la figura simmetrica risulta essere lo stesso.

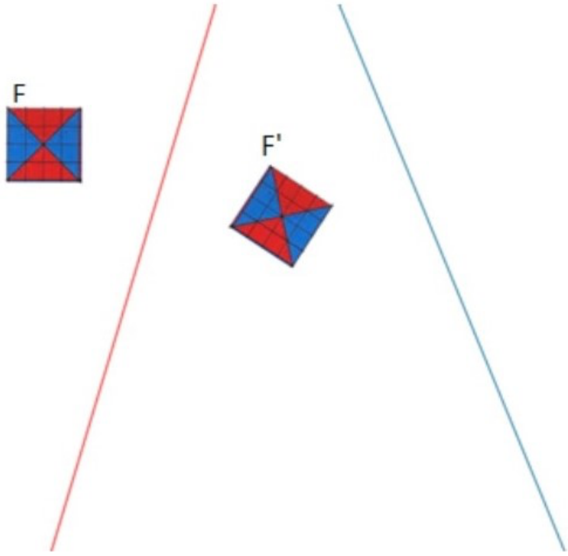
Scheda studente 2(a): figure simmetriche

Ti vengono consegnati un foglio e uno spillo. Nel foglio trovi una figura colorata (un quadrato e le sue diagonali), la sua simmetrica rispetto alla retta di colore rosso e una seconda retta di colore blu.

Disegna la figura simmetrica della figura data F rispetto alla retta di colore blu con l'aiuto di uno spillo e colorala rispettando i colori della figura data.

Di seguito un suggerimento di procedura:

- piega il foglio lungo la retta di colore blu in modo che la figura data resti visibile sulla parte esterna del foglio,
- fai dei piccoli fori puntando lo spillo,
- apri il foglio e utilizza i fori per ricostruire la figura simmetrica.



Piegando il foglio lungo l'asse di simmetria e utilizzando lo spillo per forare il foglio in corrispondenza dei vertici del quadrato si ottiene la simmetria richiesta. Infatti, l'intuizione e la sperimentazione con l'artefatto dovrebbero portare gli studenti a capire che non è necessario forare il foglio lungo i contorni della figura, né lungo le diagonali. Ciò che verosimilmente dovrebbe ottenere ogni gruppo al termine delle prime due schede è rappresentato come segue:

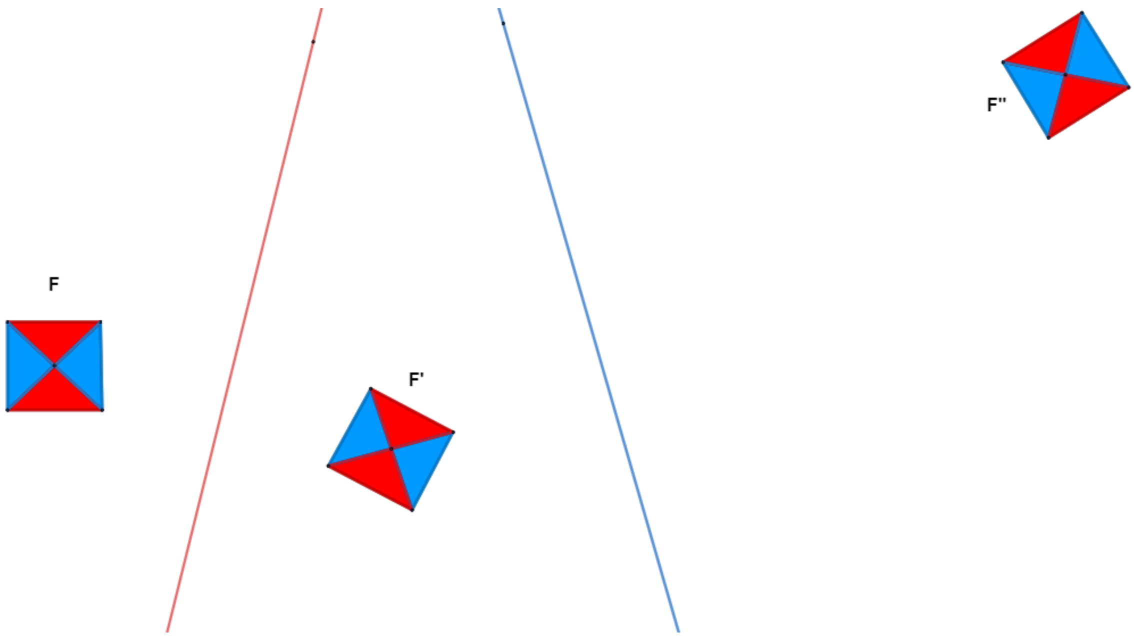


Figura 8

A questo punto il docente procede con la consegna della scheda 3, alla quale i gruppi dedicano 20 minuti.

Scheda studente 3(a): la simmetria assiale e le sue proprietà

Osserva quello che hai fatto nella scheda 2 e rispondi alle seguenti domande:

- Quante volte hai puntato lo spillo per disegnare la figura F' simmetrica di F rispetto alla retta di colore rosso?
- Dove hai puntato lo spillo?
- Quante volte hai puntato lo spillo per disegnare la figura F'' simmetrica di F rispetto alla retta di colore blu?
- Dove hai puntato lo spillo?
- Racconta come hai fatto per disegnare la figura simmetrica che si ottiene piegando il foglio lungo una retta.
- Guarda le due figure simmetriche F' ed F'' rispettivamente rispetto alla retta di colore rosso e alla retta di colore blu.
- Cosa ti sembra che abbiano di uguale? Spiega perché.
- E cosa ti sembra che abbiano di diverso? Spiega perché.

Al termine delle tre schede si conclude la fase 1 con una discussione collettiva alla quale vengono dedicati circa 20 minuti.
Nella fase 2, gli studenti lavorano nuovamente a piccoli gruppi per i restanti 50 minuti.
Il docente fornisce ad ogni gruppo un foglio di carta A4 su cui sono disegnati un punto e una retta di colore rosso, uno spillo e la scheda 4. Il tempo dedicato a quest'ultima è di 20 minuti.

Scheda studente 4(a): punti simmetrici e asse di simmetria

Ti vengono consegnati un foglio con disegnati una retta di colore rosso e un punto A e uno spillo.
Usando lo spillo, trova il simmetrico C del punto A rispetto alla retta di colore rosso.

Piega il foglio lungo la retta passante per A e C e poi riapri il foglio.
Disegna il segmento AC e osserva la sua relazione con la retta di colore rosso (tale retta si chiama asse).
Cosa puoi dire degli angoli che il segmento AC forma con l'asse?

Cosa altro puoi dire del segmento AC?

Segna con un pennarello il punto in cui il segmento AC incontra l'asse e chiamalo M.
Cosa puoi dire dei segmenti AM e MC?

Spiega perché

Dopo aver svolto le consegne della scheda 4, l'insegnante procede con la consegna della scheda 5, su cui ogni gruppo lavora per 20 minuti. In questo caso lo spillo non può più essere utilizzato per la ricerca del punto simmetrico richiesto.

Scheda studente 5(a): la simmetria assiale con la piegatura della carta

Sullo stesso foglio utilizzato nella scheda 4 (in cui è disegnata una retta e un punto A) disegna un nuovo punto B.

Senza usare lo spillo ma piegando opportunamente il foglio, costruisci il punto D simmetrico di B rispetto alla retta di colore rosso.

Racconta come hai fatto a trovare D.

Spiega perché quello che hai fatto funziona

Segna con il pennarello il punto in cui il segmento BD incontra l'asse e chiamalo N.
Cosa puoi dire degli angoli che il segmento BD forma con la retta di colore rosso?
Cosa puoi dire dei segmenti BN e ND?

Osserva ora i segmenti AC e BD.
Cosa hanno in comune?
Spiega perché
Cosa hanno di diverso?
Spiega perché

Dopo aver svolto la scheda 4, i vari gruppi evidenziano due proprietà della simmetria assiale:

- i punti corrispondenti sono equidistanti dall'asse
- il segmento congiungente due punti corrispondenti è perpendicolare all'asse

Facendo uso di tali proprietà è possibile costruire il punto D simmetrico di B rispetto alla retta rossa senza utilizzare lo spillo, ma semplicemente piegando in modo opportuno il foglio. Per rendere più semplici le operazioni è opportuno disegnare la retta e il punto anche sul retro del foglio.
Il punto D ricercato appartiene necessariamente al segmento BD, che per la proprietà di perpendicolarità forma un angolo retto con l'asse. Per visualizzare tale segmento è sufficiente piegare il foglio come segue:

1. piegare il foglio lungo l'asse
2. senza riaprirlo, piegare il foglio lungo una retta passante per B e in modo tale da riportare l'asse su se stesso.

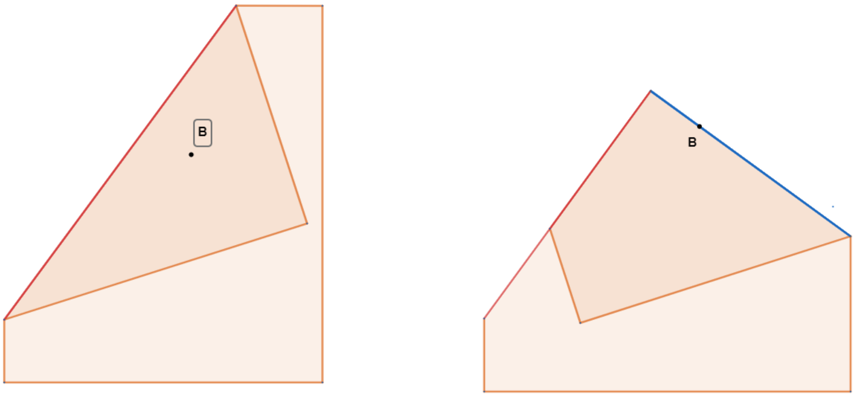


Figura 9 Piegature da eseguire sul foglio

In questo modo risulta evidente che l'angolo formato dalla seconda piega con l'asse è sovrapponibile con gli altri tre angoli individuati dalle due pieghe effettuate. I quattro angoli individuati formano coppie di angoli supplementari e congruenti, dunque sono angoli retti. A foglio riaperto, ciò che si dovrebbe ottenere è quanto segue:

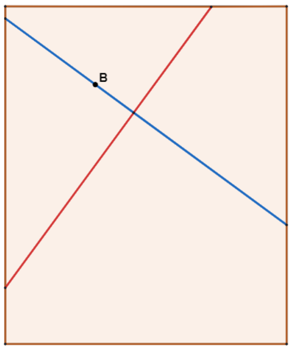


Figura 10 Configurazione del foglio dopo aver individuato la retta perpendicolare all'asse passante per B

Dato che il punto B appartiene alla piega e data l'unicità della retta perpendicolare all'asse, la seconda piegatura corrisponde alla retta su cui necessariamente si deve trovare il segmento BD, e di conseguenza D deve appartenere a tale retta.
Per individuare dove effettivamente si trova D sulla retta appartenente al semipiano individuato dalla suddetta retta a cui non appartiene B si sfrutta la proprietà di equidistanza. Le piegature da eseguire sono le seguenti:

3. piegare il foglio lungo la retta perpendicolare all'asse passante per B individuata in precedenza
4. senza riaprirlo, piegare il foglio lungo l'asse

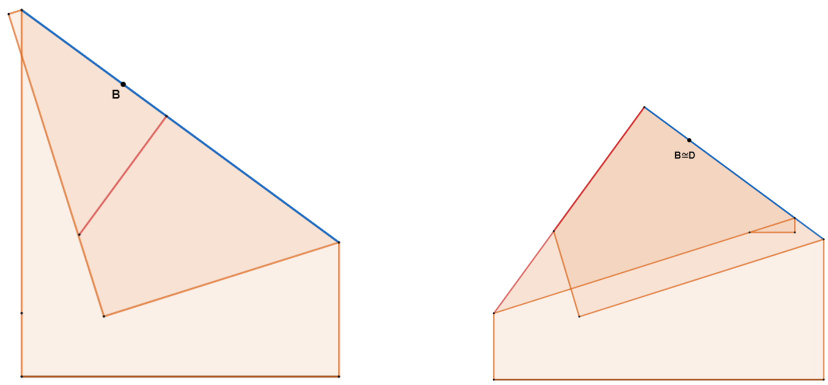


Figura 11 Piegature da eseguire sul foglio

A questo punto, il punto D è semplice da individuare per sovrapposizione di segmenti. In particolare, indicato con N il punto di intersezione tra l'asse e la retta perpendicolare passante per B, il punto D è tale che il segmento BN sia sovrapponibile, e dunque congruente, a DN.

3.3 Simmetrie assiali con il software Tales Game

3.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione parziale alle tassellazioni del piano utilizzando il concetto di simmetria assiale

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** Tales Game

- **Prerequisiti:** conoscenza di base del software Tales Game e dei comandi principali

- **Obiettivi:**
    - operare con le simmetrie assiali nel piano, facendone esperienza anche in ambiente reale e artistico
    - costruire un catalogo parziale e intuitivo delle tassellazioni del piano

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in 2 fasi. Durante la fase 1 gli studenti lavorano a coppie e ogni scheda prevede un primo momento di gioco, che permette agli studenti di operare con il concetto di simmetria assiale. Si utilizza il software Tales Game, che nella pagina iniziale prevede che si scelga una figura, un livello che corrisponde alla distanza fra i punti sul bordo della figura e un'opzione denominata *numeri*. È consigliabile selezionare "SI'" in quest'ultimo caso in modo che gli studenti possano orientarsi meglio nella costruzione delle varie simmetrie.

La prima figura con cui lavorare è il rettangolo, si traccia il segmento congiungente i punti medi dei lati minori con un colore neutro, che rappresenterà l'asse di simmetria, e lo scopo del gioco è creare una configurazione a piacere. In particolare, il giocatore 1 traccia una retta a scelta unendo due punti del bordo e a questo punto è il turno del giocatore 2 che deve tracciare la retta simmetrica a quella disegnata dal primo giocatore rispetto all'asse di simmetria disegnato in precedenza. Il giocatore 2 termina il suo turno disegnando un'altra retta a scelta, la cui simmetrica rispetto all'asse dovrà essere tracciata dal giocatore 1, che in seguito traccerà una nuova retta e così via.
Una situazione interessante che potrebbe presentarsi si ha quando uno fra i due giocatori disegna una retta perpendicolare all'asse di simmetria; in questo caso, se alcune coppie dovessero riscontrare delle difficoltà, il docente può decidere di fermare temporaneamente il gioco e coinvolgere tutta la classe nella ricerca della simmetria corretta. In questo modo la classe ha la possibilità di lavorare in maniera collaborativa e gli studenti sono spinti ad argomentare le loro idee in modo chiaro al fine di permettere al resto della classe la comprensione dei propri risultati.
Dopo 5-10 mosse ogni coppia procede con la colorazione, che può avvenire o procedendo nuovamente a turni o per comune accordo degli studenti. In questo frangente, è importante che la colorazione rispetti le simmetrie ed è compito del docente supervisionare il lavoro delle varie coppie, andando ad intervenire laddove lo ritiene necessario. Un possibile suggerimento che l'insegnante può dare agli studenti è di pensare al rettangolo come a un foglio, spingendo le coppie a riflettere su ciò che accadrebbe se lo si piegasse lungo l'asse di simmetria. Inoltre, un paragone interessante che potrebbe essere fatto è quello dello specchio, che permetterebbe agli studenti di visualizzare la simmetria assiale in un contesto di vita quotidiana.
Viene quindi consegnata ad ogni coppia la scheda 1 e gli studenti devono eseguire con il tassello ottenuto in seguito al gioco le tassellazioni PM, PMM e PMG.
Il docente può decidere di far lavorare ogni coppia con un tassello ottenuto da un'altra coppia e, prima di consegnare la scheda, chiedere agli studenti di verificare la correttezza delle simmetrie ottenute. In questo modo si offre alla classe un'ulteriore possibilità per esplorare il concetto di simmetria assiale, nonché un'importante opportunità per lavorare sull'autovalutazione.
Le schede successive prevedono modalità analoghe a quelle della scheda 1, con la differenza che la figura scelta inizialmente non è più il rettangolo. Inoltre, per aumentare la difficoltà dell'attività, il docente può suggerire agli studenti di selezionare "NO" nell'opzione *numeri*.
Viene quindi ripetuta la stessa esperienza con il quadrato, in cui l'asse di simmetria è la diagonale e successivamente viene consegnata alle coppie la scheda 2, in cui viene chiesto alla classe di riprodurre la tassellazione P4M.
Si procede poi lavorando con il triangolo equilatero, in cui l'asse è una delle altezze, e con il rombo. In quest'ultimo caso l'esperienza viene ripetuta due volte: sia con l'asse coincidente con la diagonale minore, sia con quello coincidente con la diagonale maggiore. Al termine di ognuna di queste tre esperienze vengono consegnate alla classe rispettivamente la scheda 3, in cui è richiesta l'esecuzione della tassellazione P6M, la

scheda 4, in cui si lavora su CM e P3M1, e la scheda 5, in cui gli studenti devono riprodurre le tassellazioni P31M.

La fase 1 termina con una discussione collettiva, orchestrata dal docente, che pone domande mirate alla classe al fine di spingere gli studenti a riflettere sull'eventuale presenza di regolarità nelle denominazioni delle tassellazioni eseguite. L'aspetto che dovrebbe emergere è legato alla presenza della lettera M in tutte le sigle; in particolare tale lettera sta per *mirror*, ovvero specchio in inglese. L'obiettivo della discussione è che gli studenti giungano alla consapevolezza che le tassellazioni trattate in questa attività non corrispondono alla totalità delle tassellazioni possibili. In particolare, le tassellazioni la cui denominazione contiene la M sono simmetriche rispetto ad una famiglia di assi di simmetria paralleli tra loro e costituiscono solo una parte delle tassellazioni del piano.

Nella fase 2 gli studenti lavorano individualmente su una prova di verifica proposta dall'insegnante. In questo frangente, vengono esplorate alcune delle tassellazioni ottenute durante l'attività nel caso in cui il tassello non presenti simmetrie interne. Lo scopo è quello di permettere alla classe di intuire l'elemento che risulta essere determinante nella classificazione di una tassellazione, ovvero non il tassello, ma le isometrie che mandano la tassellazione in sé. In particolare, l'osservazione degli esempi proposti nella scheda 6 e la loro riproduzione utilizzando un tassello a piacere, porta gli studenti a descrivere le tassellazioni PM, PMM e PMG in maniera più formale.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula di informatica
- **Modalità:** didattica in presenza

3.3.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività è composta da 5 schede, su cui gli studenti lavorano a coppie in seguito ad un primo momento dedicato al gioco. Il tempo dedicato al gioco e ad ogni scheda è complessivamente di circa 20 minuti. Si comincia lavorando con il rettangolo e la scheda 1.

LA SIMMETRIA ASSIALE: scopri, classifica e generalizza
Simmetrie assiali con il software Tales Game
Scheda studente 1(b): Catalogo parziale delle tassellazioni del piano; simmetrie assiali del tassello con tassello rettangolare

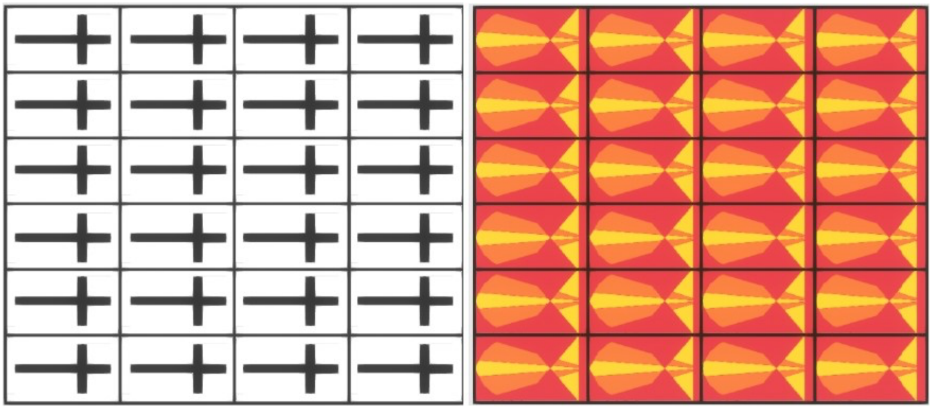
Riprodurre, con il tassello simmetrico ottenuto durante il gioco a turni, le seguenti tassellazioni.

Ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (e.g. **PM**) sia con quella **Orbifold** (e.g. ******).

PM (**)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria assiale rispetto ad una congiungente dei punti medi.*

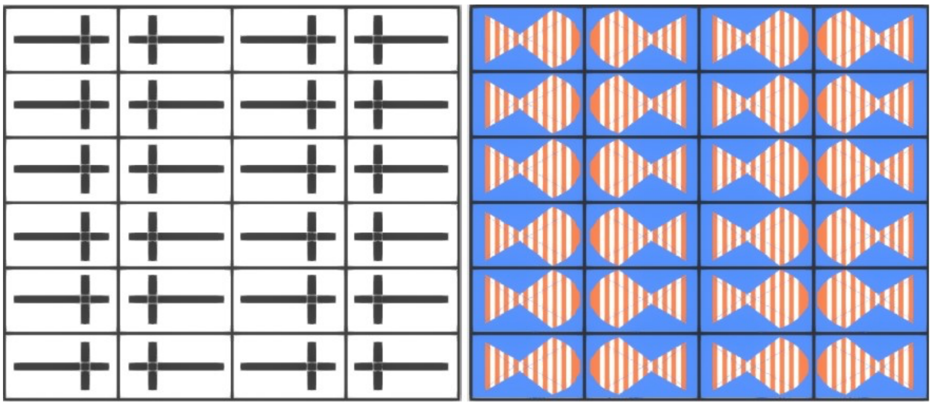
Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in entrambe le direzioni.*



PMM (*2222)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria assiale rispetto ad una congiungente dei punti medi.*

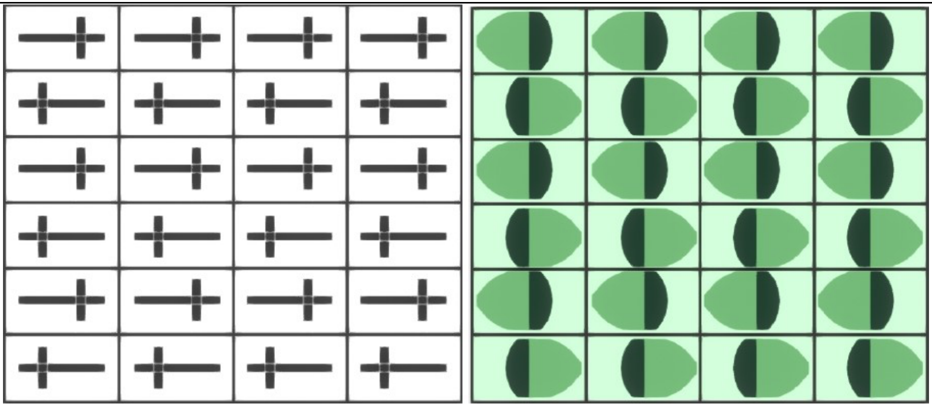
Metodo di tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in una direzione, mentre sull'altra si riflette*.



PMG (22*)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria assiale rispetto ad una congiungente dei punti medi.*

Metodo di tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in una direzione, mentre sull'altra si trasla e poi si riflette.*



Al termine della scheda 1, si ripete il gioco utilizzando il quadrato e il docente fornisce alle coppie la scheda 2.

Scheda studente 2(b): Catalogo parziale delle tassellazioni del piano, simmetrie assiali del tassello con tassello quadrato

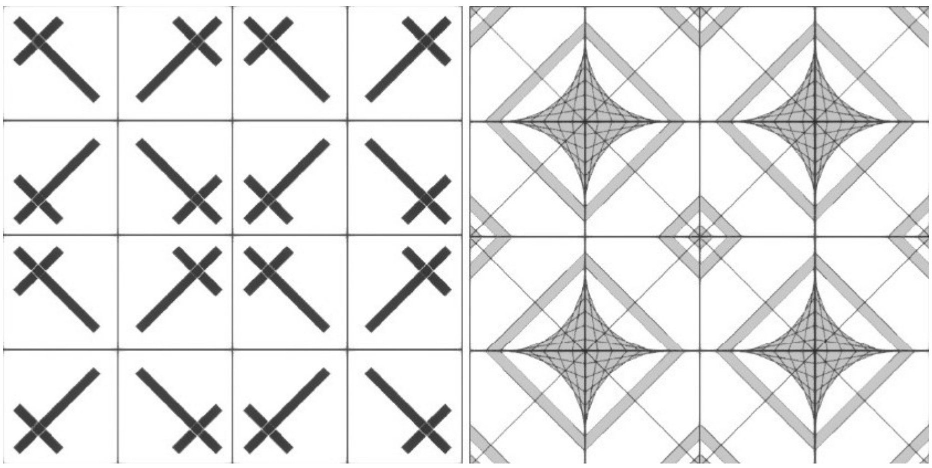
Riprodurre, con il tassello simmetrico ottenuto durante il gioco a turni, la seguente tassellazione.

Ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (e.g. **P4M**) sia con quella **Orbifold** (e.g. ***442**).

P4M (*442)

Tassello: *quadrato.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria assiale rispetto ad una diagonale.*

Tassellazione: *si procede tassellando per gruppi di quattro che si ottengono per rotazioni di 90° attorno ad un vertice del quadrato.*



A questo punto si seleziona come figura iniziale il triangolo equilatero e le coppie lavorano sulla scheda 3.

Scheda studente 3(b): Catalogo parziale delle tassellazioni del piano, simmetrie assiali del tassello con tassello triangolare

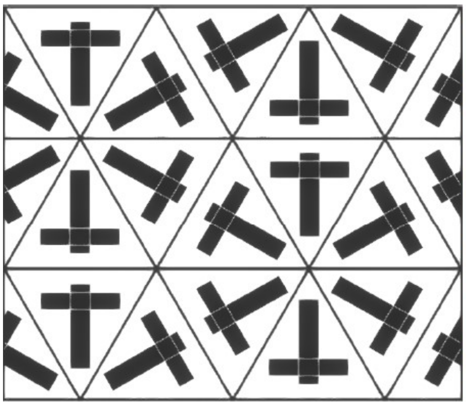
Riprodurre, con il tassello simmetrico ottenuto durante il gioco a turni, la seguente tassellazione.

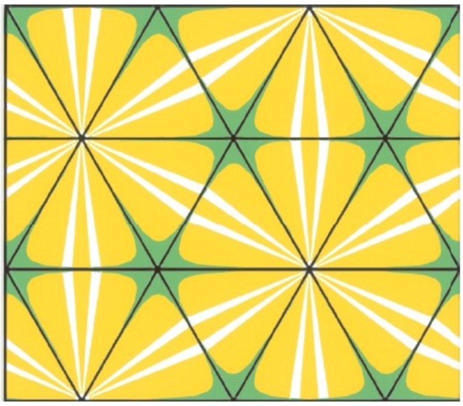
Ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (e.g. **P6M**) sia con quella **Orbifold** (e.g. ***632**).

P6M (*632)

Tassello: *triangolo equilatero.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria assiale rispetto ad un'altezza.*

Tassellazione: *sei triangoli equilateri, con rotazioni di 60°, formano un esagono regolare. Gli esagoni regolari tassellano il piano per traslazione.*





Terminata questa scheda, le coppie giocano utilizzando il rombo, dapprima considerando come asse di simmetria la diagonale minore e lavorando sulla scheda 4 e successivamente scegliendo come asse la diagonale maggiore ed eseguendo le consegne della scheda 5. L'insegnante può scegliere di consegnare le due schede insieme.

Scheda studente 4(b): Catalogo parziale delle tassellazioni del piano, simmetrie assiali del tassello con tassello romboidale - diagonale minore

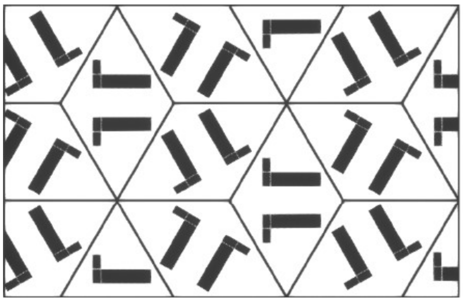
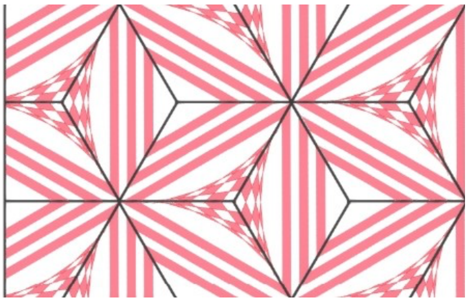
Riprodurre, con il tassello simmetrico ottenuto durante il gioco a turni, le seguenti tassellazioni.

Ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (e.g. **P3M1**) sia con quella **Orbifold** (e.g. ***333**).

P3M1 (*333)

Figura da selezionare: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *simmetria rispetto alla diagonale minore.*

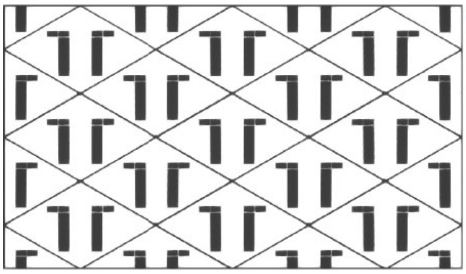
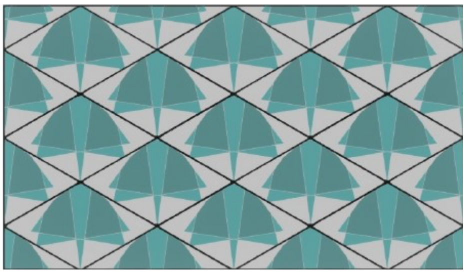
Tassellazione: *tre rombi, con rotazioni di 120°, formano un esagono regolare.*

CM (*X)

Figura da selezionare: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *simmetria rispetto ad una delle due diagonali.*

Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione.*

Scheda studente 5(b): Catalogo parziale delle tassellazioni del piano, simmetrie assiali del tassello con tassello romboidale - diagonale maggiore

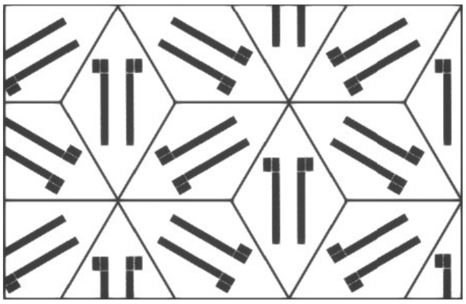
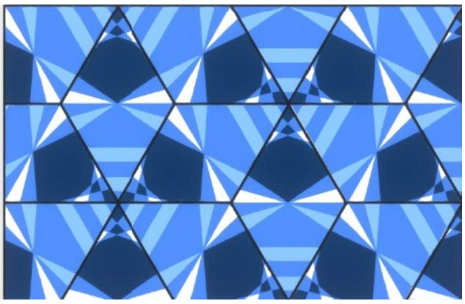
Riprodurre, con il tassello simmetrico ottenuto durante il gioco a turni, la seguente tassellazione.

Ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (e.g. **P31M**) sia con quella **Orbifold** (e.g. **3*3**).

P31M (3*3)

Figura da selezionare: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *simmetria rispetto alla diagonale maggiore.*

Tassellazione: *tre rombi, con rotazioni di 120°, formano un esagono regolare.*

Nella fase 2 dell'attività gli studenti lavorano individualmente sulla scheda 6, che è parte integrante dell'attività, ma è considerata uno strumento per la verifica delle conoscenze acquisite. Ogni studente ha 20 minuti di tempo per lavorare sulla scheda, ma il docente può scegliere di fornire più tempo se lo ritiene necessario.

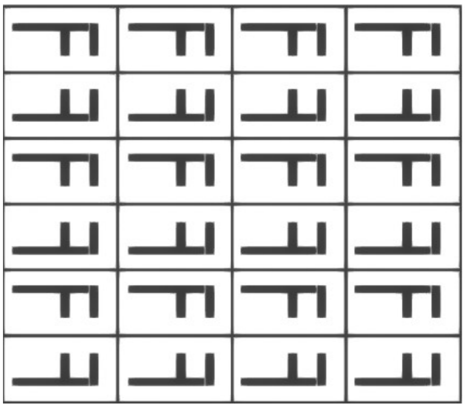
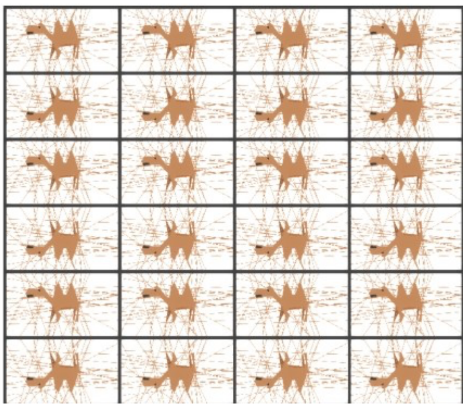
Scheda studente 6(b): Prova di verifica simmetria esplosa del tassello

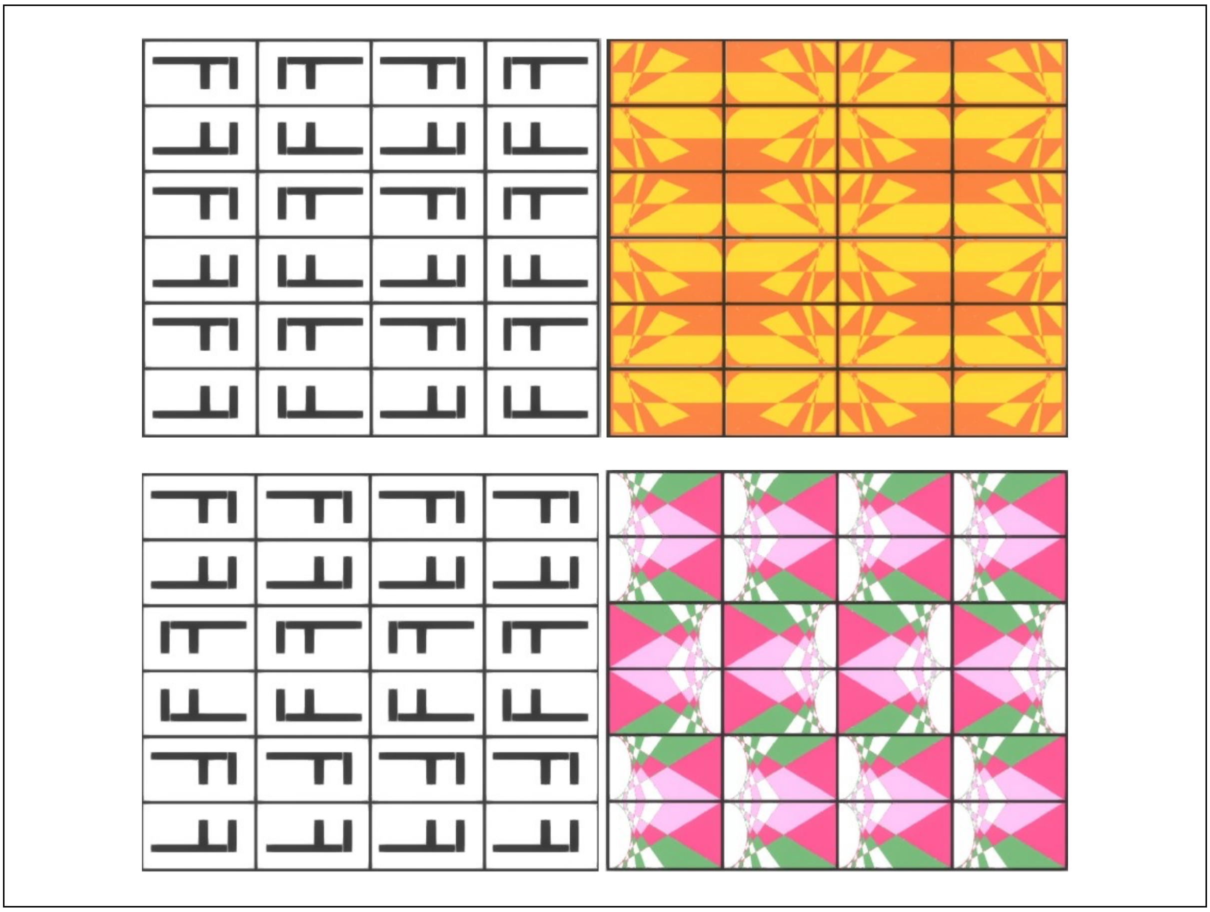
Riprodurre, con un tassello a piacere le tassellazioni **PM**, **PMM** e **PMG**.
Per riprodurre le tassellazioni, bisognerà dapprima creare una configurazione a piacere con un tassello rettangolare, per poi disporlo - uno dopo l'altro - nelle varie modalità indicate di seguito. Bisogna prestare attenzione che il tassello creato **non** presenti simmetrie interne.

PM (**)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *libera, priva di simmetrie interne.*

Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in una direzione mentre sull'altra si riflette.*



Nella prima figura viene analizzata la tassellazione PM, di cui viene riportata la descrizione. Nel secondo caso, viene presentato un esempio di tassellazione costruita con PMM. Dalle precedenti schede e dall'esempio riportato per PM, risulta intuitivo pensare di andare a lavorare nelle due direzioni. In particolare, per PMM:

- nella direzione orizzontale: il tassello si riflette
- nella direzione verticale: il tassello si riflette

Per quanto riguarda invece PMG:

- nella direzione orizzontale: il tassello si ripete uguale a se stesso per traslazione
- nella direzione verticale: si alternano una riflessione del tassello e una simmetria centrale del tassello.

3.4 Problem solving usando le simmetrie assiali

3.4.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** rappresentazione analitica di alcune proprietà della simmetria assiale
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:**
- **Prerequisiti:**

- conoscenza del piano cartesiano, dei grafici di rette e dell'equazione esplicita della retta
- conoscenza del concetto di simmetria assiale
- conoscenza della disuguaglianza triangolare

- **Obiettivi:**
  - risolvere problemi utilizzando la simmetria assiale e utilizzandola per argomentare
  - individuare simmetrie e formulare la loro espressione analitica
  - dimostrare le proprietà individuate, non solo tramite l'attività grafica, ma formalizzando adeguatamente i vari passaggi

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti su tre schede. Il docente fornisce alla classe le consegne lasciando inizialmente ad ogni gruppo il tempo di esplorare le proprietà e di verificarle in maniera autonoma. In questo frangente, l'insegnante monitora ciò che accade nei vari gruppi e in base alle necessità di ognuno e al grado di difficoltà riscontrato può scegliere di guidare gli studenti dando loro informazioni e suggerimenti per lo svolgimento dell'attività in maniera graduale utilizzando la scheda studente come canovaccio. In alternativa, l'insegnante può decidere di fornire per intero la scheda studente agli studenti così come formulata.

  Nella scheda 1 viene chiesto agli studenti di risolvere il problema di Erone e ogni gruppo lavora seguendo la strada che più ritiene opportuna. Potrebbe accadere che uno o più gruppi lavorino autonomamente per tutto lo svolgimento dell'attività, giungendo alla soluzione senza l'ausilio delle informazioni aggiuntive previste. Il docente ha tuttavia il compito di monitorare attentamente le strade intraprese dai singoli gruppi, in modo da andare ad intervenire laddove ritiene che si stia perdendo di vista l'obiettivo. In questi casi, il docente fornisce agli studenti le indicazioni necessarie anche sulla base delle sollecitazioni eventualmente richieste dalla classe.

  Le indicazioni fornite prevedono dapprima che gli studenti esplorino la situazione, facendo congetture e andando per prove ed errori mediante misurazioni successive fatte con il righello. In questa prima fase di esplorazione il compito degli studenti è di individuare un punto che possa risolvere il quesito. A questo punto, ipotizzando che tale punto sia quello cercato, le indicazioni prevedono che gli studenti osservino con attenzione la costruzione ottenuta, andando alla ricerca di elementi utili che permettano di eseguire il processo al contrario.

  Il docente ha il compito di far riflettere la classe riguardo al metodo impiegato; si comincia con una ricerca approssimativa del punto richiesto e, considerando il problema risolto, si esplora la situazione tentando di individuare relazioni e informazioni utili. In particolare, questo tipo di approccio ha un valore euristico e, sebbene sia fondamentale ai fini della risoluzione del problema, non ha valore dimostrativo. È necessario, infatti, elaborare una costruzione per individuare il punto cercato e ciò è possibile proprio grazie alle relazioni trovate nella precedente fase di esplorazione.

In questo frangente, si potrebbe proporre alla classe un'attività di tipo laboratoriale in cui si analizza la traiettoria di una pallina che, partendo da un dato punto, rimbalza su una parete. Analogamente si può utilizzare un raggio laser che si riflette su uno specchio. Tale attività ha un duplice vantaggio; da un lato pone il problema in un contesto reale, rendendolo stimolante e avvicinando la matematica alla realtà fisica, dall'altro permette alla classe di visualizzare il problema. L'osservazione di ciò che accade nei due casi potrebbe condurre gli studenti a formulare ipotesi e congetture a cui prima non erano pervenuti.
Una volta individuata una possibile costruzione del punto cercato, è necessario procedere con una dimostrazione rigorosa che provi la veridicità di quanto convenuto. In questa fase ogni gruppo deve giustificare e argomentare formalmente i passaggi eseguiti. Anche in questo caso il docente ha a disposizione una traccia della dimostrazione che può scegliere di consegnare direttamente agli studenti o dare loro indicazioni in base alle esigenze dei vari gruppi.
Nella scheda 2 viene proposto un esercizio in cui gli studenti affrontano lo studio delle simmetrie assiali più elementari nel piano cartesiano. In un primo momento viene chiesto agli studenti di determinare le equazioni di tre rette simmetriche rispetto a una retta data rispetto ad assi di simmetria differenti. In questa fase ogni gruppo lavora nel modo che ritiene più opportuno e il docente segue attentamente quanto svolto da ogni gruppo.
Nella consegna successiva viene chiesto di risolvere lo stesso problema con il vincolo di utilizzare le equazioni delle simmetrie. In questo modo, gli studenti vengono sollecitati a ricavare relazioni all'interno del piano cartesiano; questo permette alla classe di esplorare l'aspetto analitico della simmetria assiale.
In questo frangente, l'insegnante ha a disposizione una serie di indicazioni che guidano la classe alla risoluzione dell'esercizio; anche in questo caso sta al docente scegliere se fornire le informazioni tutte insieme o gradualmente. Queste ultime sono pensate per condurre per mano gli studenti nell'individuare le equazioni delle simmetrie, tenendo sempre a mente e partendo dalla definizione di simmetria assiale.
Nella scheda 3 si vuol far ipotizzare agli studenti il risultato della successiva applicazione di simmetrie assiali. In un primo momento si lascia che ogni gruppo esplori e osservi la situazione, individuando una possibile soluzione in maniera autonoma. In questo frangente, il docente ha il compito di esaminare le alternative elaborate dai vari gruppi, offrendo loro spunti di riflessione riguardo alla formalizzazione dei risultati ottenuti.
In questo senso, lo scopo dell'attività è quello di far lavorare gli studenti da un lato dal punto di vista grafico, dall'altro in maniera rigorosa e formale. Le indicazioni a disposizione del docente prevedono, infatti, che gli studenti lavorino in un primo momento disegnando le successive simmetrie e successivamente operino dal punto di vista analitico, scoprendo e toccando con mano la potenza della formalizzazione nella dimostrazione delle proprietà individuate.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore (la durata può variare in base alle nozioni da richiamare)

- **Spazi:** aula o aula virtuale
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

3.4.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti su tre schede. Inizialmente è consigliabile fornire ai gruppi soltanto la consegna, dando agli studenti il tempo di lavorarci autonomamente. Le indicazioni vengono fornite ai gruppi con modalità scelte dal docente, ma separatamente rispetto alla consegna della scheda con i quesiti proposti.
Il tempo dedicato alla scheda 1 è di 45 minuti.

LA SIMMETRIA ASSIALE: Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving usando le simmetrie assiali
Scheda studente 1(c): il problema di Erone

Figura 1

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto a una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce. (Esame di stato corso di Ordinamento 2012, quesito n. 9).

Di seguito sono riportate le indicazioni per lo svolgimento dell'attività a disposizione del docente.

1. Osserva la seguente immagine. Quale, fra i diversi punti sulla retta r, rappresenta, secondo te, quello che meglio minimizza il cammino richiesto? Se vuoi, puoi usare un righello graduato (ad esempio, calcolando quanto fa $AC + CB$, poi $AD + DB$, ecc.).

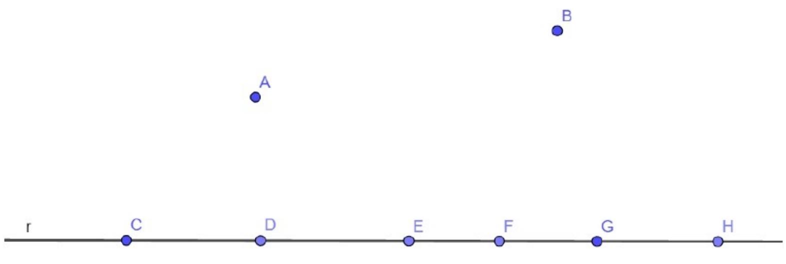


Fig. 2

2. Ora focalizza la tua attenzione sul punto che hai verificato essere quello che rende minimo il percorso. Puoi anche raffinare la ricerca provando a disegnare qualche altro punto nei paraggi di esso e calcolando la somma delle distanze di ciascuno di essi da A e B.

3. Chiamiamo con P il punto che sembra risolvere il quesito. Prova ora a prolungare il segmento BP, nel semipiano generato da r non contenente A, B, di un segmento PA' congruente a PA. Unisci A e A'.

4. Che relazione esiste fra il segmento AA' e la retta *r*?

Il punto *A*' è il simmetrico di *A* rispetto alla retta *r*. In generale, per risolvere il quesito può convenire prima di tutto disegnare il simmetrico di uno dei due punti (ad esempio si disegna il punto *A*' simmetrico di *A*), si unisce quest'ultimo con *B* e l'intersezione fra la retta *r* e il segmento $A'B$, che chiameremo *C*, rappresenta proprio il punto cercato che risolve il quesito.

5. Osserva la seguente figura. Alla luce di quanto appena scoperto, e ricordando la disuguaglianza triangolare, prova a dimostrare che la veridicità di quanto sopra affermato.

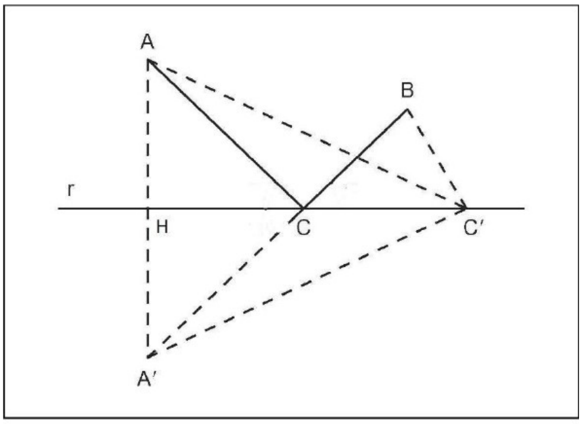


Fig. 3

1. $AC \cong \cdots\cdots$

2. $AC' \cong \cdots\cdots$

3. $AC + CB = \cdots\cdots + CB = \cdots\cdots$

4. $AC' + C'B = \cdots\cdots + C'B$

5. $A'B < \cdots\cdots + \cdots\cdots$

In un primo momento si cerca di individuare il punto P che risolve il problema in maniera approssimativa, operando misurazioni con il righello. Raffinando la ricerca si trova un punto P che ipoteticamente potrebbe risolvere il quesito. Considerandolo tale, si procede all'osservazione della figura ottenuta; in particolare, ciò che dovrebbe saltare all'occhio è la perpendicolarità del segmento AA' rispetto alla retta r e l'equidistanza di A e A' da r. Essendo queste ultime due proprietà caratterizzanti la simmetria assiale, si conclude che è quest'ultima la relazione che intercorre tra i suddetti punti.
A questo punto si utilizza questa informazione per costruire il punto C che si suppone risolvere il quesito, ottenendo quanto segue:

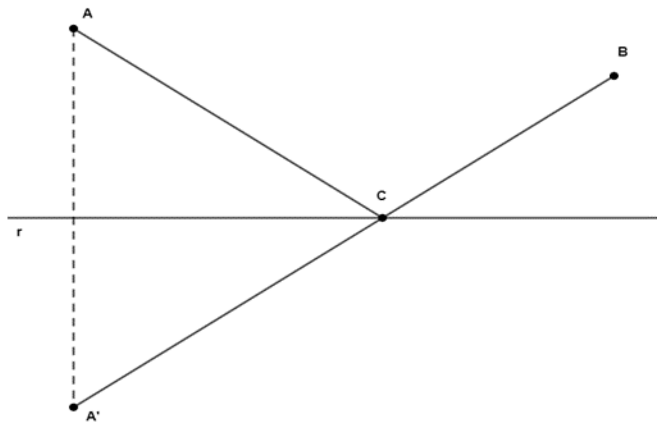


Figura 12 Costruzione di C come intersezione di r e $A'B$, con A' simmetrico di A rispetto a r

Resta da provare che effettivamente il punto C così trovato è proprio quello che risolve il problema. Per farlo è sufficiente prendere un qualsiasi punto C' sulla retta r e dimostrare che $AC + CB < AC' + C'B$. Data l'arbitrarietà di C' si può concludere che C è il punto cercato.
Si comincia dunque con il prendere un punto C' su r:

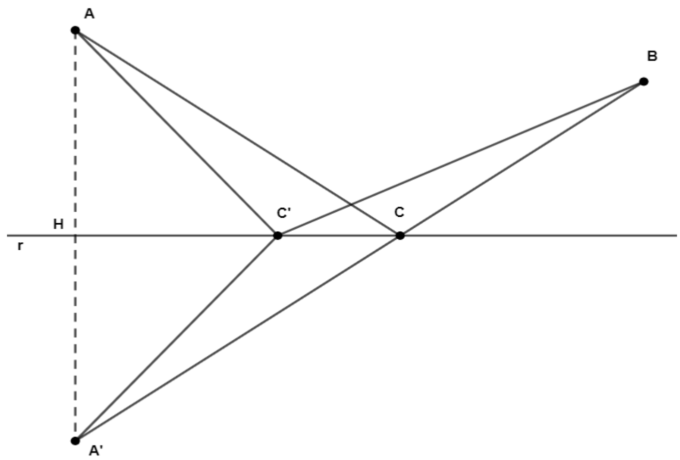


Figura 13

Dato che A e A' sono simmetrici rispetto a r per costruzione, i triangoli ACH e $A'CH$ sono congruenti perché:

- $< AHC \cong < A'HC$, per la perpendicolarità di AA' con r
- $AH \cong A'H$, per la perpendicolarità di AA' con r e l'equidistanza di A e A' da r
- hanno il lato HC in comune

Dunque, si può concludere che $AC \cong A'C$.
Per le stesse motivazioni i triangoli $AC'H$ e $A'C'H$ sono congruenti e dunque $AC' \cong A'C'$.
Quindi, $AC + CB = A'C + CB = A'B$ e $AC' + C'B = A'C' + C'B$.
Per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo $A'BC'$, $AC + CB = A'B < A'C' + C'B = AC' + C'B$. Quindi preso un qualsiasi punto C' su r, si può sempre dimostrare che il percorso minimo è $AC + CB$.
A questo punto viene consegnata ai gruppi la scheda 2 su cui lavorano per 45 minuti.

A questo punto viene consegnata ai gruppi la scheda 2 su cui lavorano per 45 minuti.

Scheda studente 2©: simmetrie nel piano cartesiano

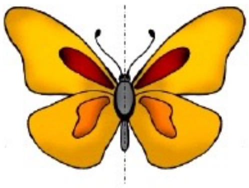


Figura 1

Nel piano cartesiano si tracci la retta r di equazione $x + 2y + 4 = 0$. Si traccino poi: la retta a simmetrica di r rispetto all'asse x, la retta b simmetrica di r rispetto all'asse y, la retta c simmetrica di r rispetto all'origine. Quali sono le equazioni delle rette a, b, c? Le rette a, b, c si corrispondono, a due a due, in opportune simmetrie?

Vengono riportate di seguito le indicazioni utili alla risoluzione dell'esercizio con le relative soluzioni.

Prova a determinare le equazioni delle rette a, b e c tracciando le rette sul piano cartesiano. Successivamente segui le indicazioni della scheda o per verificare ciò che hai trovato, o per determinare tali equazioni.

Su un foglio di carta disegna un piano cartesiano e un triangolo. Traccia una retta s parallela all'asse delle ordinate e, come avrai avuto modo di fare in precedenti attività, piega il foglio in corrispondenza di tale retta. Riproduci quindi il triangolo nella seconda metà del foglio (ad esempio, posandolo sul vetro di una finestra in modo da osservare in controluce il triangolo di partenza e poterlo ricalcare nella seconda metà vuota). Poi riapri il foglio. Dovresti ottenere un disegno analogo a quello riportato qui di seguito:

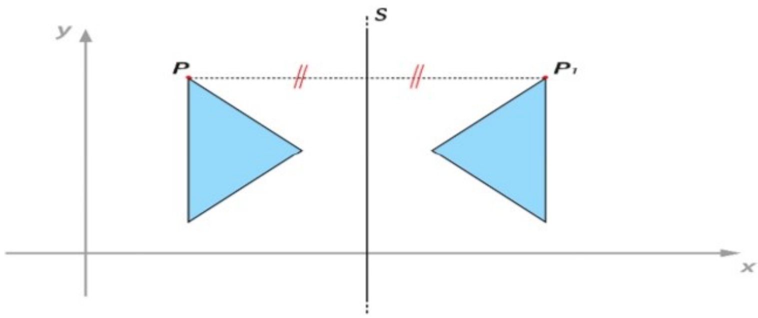


Fig. 2

Soffermati ora su un vertice del triangolo (che chiameremo P) e sul suo simmetrico P' rispetto alla retta s.

1. Se la retta s ha equazione $x = x_0$, esprimi le coordinate di $P'(x'; y')$ in funzione delle coordinate di $P(x; y)$ e di x_0.

2. Scrivi quindi le relazioni che permettono di individuare una simmetria assiale (con asse parallelo all'asse delle ordinate).

3. Nel caso particolare in cui la retta s coincide con l'asse delle y, vale a dire $x = 0$, come diventano le equazioni della simmetria?

4. Ricava x, y in quest'ultimo caso e sostituiscile nell'equazione della retta r: $x + 2y + 4 = 0$.

5. Hai ottenuto l'equazione della retta *b*! Riportala qui di seguito.

Passi 1 e 2: $x' = x + 2(x_0 - x) = 2x_0 - x$, $y' = y$
Passo 3: sostituendo $x_0 = 0$ le equazioni diventano $x' = x + 2(0 - x) = -x$, $y' = y$
Una volta ricavata la relazione che lega due punti simmetrici rispetto all'asse y, resta da imporre la condizione che i punti di partenza appartengano alla retta data.
Passo 4: $x = -x'$, $y = y'$
Passo 5: $-x' + 2y' + 4 = 0$, $x' - 2y' - 4 = 0$

Per ottenere la retta *a*, ripeti lo stesso ragionamento finora svolto disegnando in un piano cartesiano, un punto *P*, una retta *s'* e il simmetrico *P*' rispetto a *s'*.

6. Se la retta *s'* ha equazione $y = y_0$, esprimi le coordinate di $P'(x'; y')$ in funzione delle coordinate di $P(x; y)$ e di x_0.

7. Scrivi quindi le relazioni che permettono di individuare una simmetria assiale (con asse parallelo all'asse delle ascisse).

8. Nel caso particolare in cui la retta *s'* coincide con l'asse delle *x*, vale a dire $y = 0$, come diventano le equazioni della simmetria?

9. Ricava x, y in quest'ultimo caso e sostituiscile nell'equazione della retta r: $x + 2y + 4 = 0$.

10. Hai ottenuto l'equazione della retta *a*! Riportala qui di seguito.

Passo 6 e 7: $y' = y + 2(y_0 - y) = 2y_0 - y$, $x' = x$
Passo 8: sostituendo $x_0 = 0$ si ottiene $y = -y'$, $x' = x$
Passo 9 e 10: $x' - 2y' + 4 = 0$

Disegna ora un nuovo piano cartesiano, individua un punto generico $P(x; y)$ e un punto $O(x_0; y_0)$ che sarà il centro della simmetria. Costruisci il punto $P'(x'; y')$ simmetrico di *P* rispetto ad *O*.

11. Il punto *O* è il punto ……………… del segmento *PP*';

12. Sfruttando la condizione precedente, che relazione esiste fra x; x'; x_0 e y; y'; y_0?

13. Scrivi quindi le due equazioni che ti danno le nuove coordinate di *P*' in funzione delle coordinate di *P* ed *O*;

14. Ricava *x* e *y* e sostituiscili nella equazione che rappresenta la retta *r*. Considera il caso in cui il punto *O* coincida con l'origine degli assi cartesiani ($x_0 = y_0 = 0$).

15. Hai ottenuto l'equazione della retta *c*! Riportala qui di seguito.

Passo 11: il punto O è il punto *medio* del segmento PP'
Passi 12 e 13: $x' = x + 2(x_0 - x) = 2x_0 - x$, $y' = y + 2(y_0 - y) = 2y_0 - y$
Passi 14 e 15: ricavando x e y dalle equazioni precedenti si ottiene $x = 2x_0 - x'$, $y = 2y_0 - y'$ e sostituendo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ si ottiene $x = -x'$, $y = -y'$.
Sostituendo nell'equazione di r si ricava $-x' - 2y' + 4 = 0$, $x' + 2y' - 4 = 0$

Considera il seguente disegno (Fig. 3). Accanto ad ogni retta, scrivi la relativa equazione in base a quanto appena ottenuto.

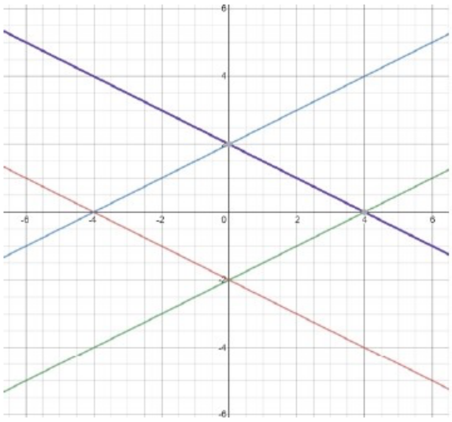


Fig. 3

Dal grafico si può osservare che:

- le rette a e b sono simmetriche rispetto all'origine
- le rette a e c sono simmetriche rispetto all'asse y e alla retta $y = 2$
- le rette b e c sono simmetriche rispetto all'asse x e alla retta $x = 4$
- le rette r e b sono simmetriche rispetto all'asse y e alla retta $y = -2$
- le rette r e a sono simmetriche rispetto all'asse x e alla retta $x = -4$

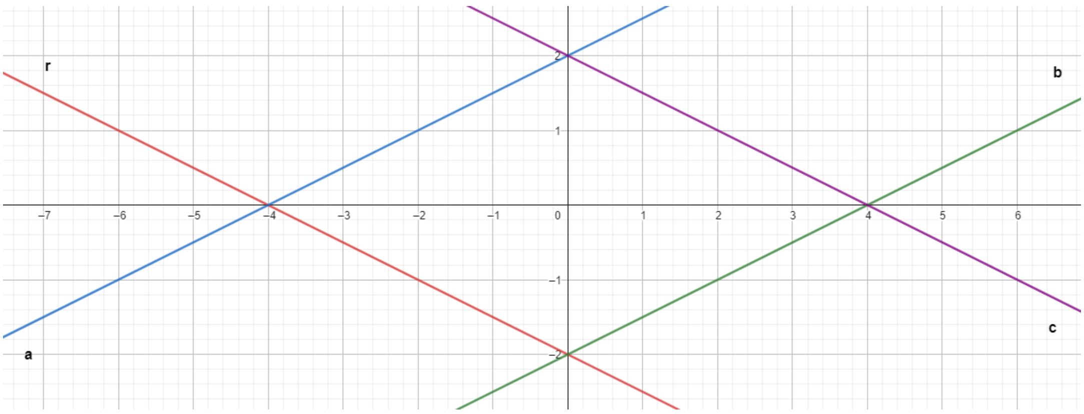


Figura 14

A questo punto si procede con la scheda 3 su cui i gruppi lavorano per 30 minuti.

Scheda studente 3(c): una simmetria dopo l'altra

a) Dato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia α la simmetria rispetto all'asse x e sia β la simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. A partire da un punto P, si applica prima la simmetria α, ottenendo così un punto P', poi si applica β a P', quindi ancora α al punto ottenuto, poi β, e così via alternando α e β. Dopo quanti passi vi è la certezza che, qualunque sia P, il punto tornerà alla posizione iniziale? Per quali punti particolari è possibile tornare alla posizione iniziale dopo 1, 2, 3, … passi?

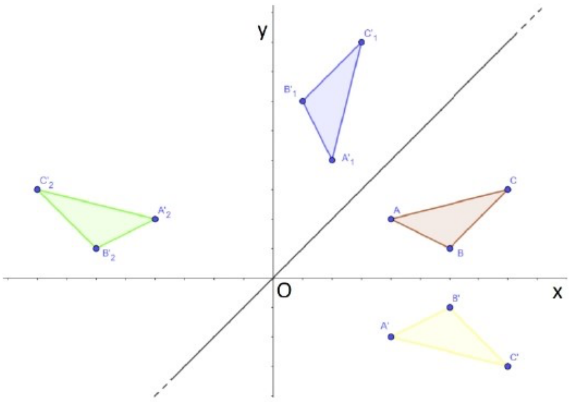


Fig. 1

b) Cosa succede se si compongono le precedenti trasformazioni anche con la simmetria di asse y?
(In altre parole, si consideri la composizione delle tre simmetrie rispetto all'asse x, alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, all'asse y).

Le indicazioni relative alla risoluzione del problema sono riportate di seguito.

1. Scegli delle coordinate a tuo piacimento per un punto P. Trova il suo simmetrico P' rispetto all'asse x; da questo punto trova il simmetrico rispetto alla bisettrice 1° e 3° quadrante per poi applicare nuovamente una simmetria rispetto all'asse x e procedi in questo modo fino ad ottenere nuovamente P. Quanti passi hai dovuto svolgere prima di tornare al punto di partenza?

2. Esegui gli stessi passaggi, questa volta a partire da delle coordinate generiche per P, ad esempio $P(x_0; y_0)$.

È necessario innanzitutto individuare le equazioni che esprimono le simmetrie α e β. Nel primo caso si tratta di una simmetria rispetto all'asse x, dunque dette (x, y) le coordinate di un generico punto, il suo simmetrico sarà il punto $(x, -y)$. Nel secondo caso, invece, il simmetrico di (x, y) rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante è il punto (y, x).
A questo punto dato il punto P di coordinate (x_0, y_0), applicando in modo alternato α e β si ottiene:

$$(x_0, y_0) \to (x_0, -y_0) \to (-y_0, x_0) \to (-y_0, -x_0) \to (-x_0, -y_0) \to (-x_0, y_0) \to (y_0, -x_0) \to (y_0, x_0) \to (x_0, y_0)$$

Dunque, dopo 8 passi si ritorna a P.

Ora considera delle posizioni particolari di P (ad esempio: coincidente con l'origine, sugli assi cartesiani, sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante o su quella del 2° e 4° quadrante) ed applica la successione delle simmetrie.

3. Per ciascuno di questi casi, quanti sono i passi necessari per tornare alla posizione di partenza?

4. Qual è il risultato della composizione delle due simmetrie α e β? Si può parlare di rotazione?
In caso affermativo, sapresti determinare l'angolo, il centro e il verso di rotazione?

Se il punto iniziale è l'origine, le sue coordinate sono (0,0), dunque applicando sia α che β il punto si trasforma in se stesso. Rappresenta quindi un punto fisso.
Se il punto iniziale appartiene all'asse x, le sue coordinate saranno $(x,0)$. Applicando le due simmetrie in modo alternato si ottiene:

$$(x,0) \to (x,0)$$

Il punto torna dunque alla posizione iniziale dopo un solo passo.
Se il punto iniziale appartiene alla bisettrice del 2° e 4° quadrante le sue coordinate sono $(x,-x)$ e applicando alternativamente α e β si ottiene:

$$(x,-x) \to (x,x) \to (x,x) \to (x,-x)$$

Dunque, il punto torna su se stesso dopo 3 passi.
Se il punto iniziale si trova sull'asse y, avrà coordinate $(0,y)$ e applicando le simmetrie si ottiene:

$$(0,y) \to (0,-y) \to (-y,0) \to (-y,0) \to (0,-y) \to (0,y)$$

Il punto torna alla posizione iniziale dopo 5 passi.
Infine, se il punto iniziale appartiene alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, le sue coordinate sono (x,x) e alternando α e β si ottiene:

$$(x,x) \to (x,-x) \to (-x,x) \to (-x,-x) \to (-x,-x) \to (-x,x) \to (x,-x) \to (x,x)$$

Quindi il punto torna su se stesso dopo 7 passi.
La composizione di α con β è una rotazione di 90° in senso antiorario attorno all'origine.

Consideriamo ora quanto richiesto al punto b) e sia γ la simmetria rispetto all'asse delle y. A partire da un generico punto $P(x_0; y_0)$, applica la prima simmetria α trovando P', poi applica la seconda simmetria β trovando P'' ed infine applica la terza simmetria γ ottenendo P'''.

5. Che relazione esiste fra il punto di partenza P e quello di arrivo P'''?

6. Alla luce della risposta data al punto precedente, quanti passi sono necessari, se si compongono nell'ordine le simmetrie α, β e γ, per partire da un punto P e tornare al punto di partenza?

Dato il punto $P(x_0,y_0)$, la trasformazione γ manda P nel punto $P'(-x_0,y_0)$. Dunque, applicando consecutivamente α, β e γ al punto P si ottiene:

$$(x_0,y_0) \to (x_0,-y_0) \to (-y_0,x_0) \to (y_0,x_0)$$

La composizione delle tre simmetrie, dunque, equivale alla simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. Alla luce di questo il punto P torna su se stesso dopo 6 passi.

CAPITOLO 4

LA ROTAZIONE

4.1 Introduzione

La rotazione è un concetto che per sua natura è presente in molteplici oggetti e situazioni della realtà fisica. Nonostante ciò, le modalità attraverso le quali tale concetto viene usualmente introdotto in classe lo rendono particolarmente astratto e lontano dalla vita quotidiana. Nella maggior parte dei libri di testo di geometria utilizzati in ambito scolastico la rotazione viene introdotta per mezzo di una definizione matematica, nella quale si richiama il concetto di angolo orientato, ovvero un angolo in cui si fissa quale dei due lati deve essere considerato come primo lato. A seconda della scelta fatta, l'angolo risulta orientato in senso orario o antiorario. Si tratta di scelte puramente convenzionali e una prima difficoltà che emerge dalla trattazione del concetto di angolo orientato riguarda proprio i possibili fraintendimenti che potrebbero svilupparsi riguardo a questo.
Una volta fatta tale premessa riguardo l'orientazione degli angoli, nei libri di testo la rotazione viene presentata come segue:

> "Dato un angolo orientato α, si dice rotazione di centro O e angolo di rotazione α la trasformazione che associa a ogni punto P il punto P' che soddisfa le seguenti condizioni:
> - l'angolo $P\hat{O}P'$, orientato in modo che OP sia il primo lato, ha la stessa ampiezza e lo stesso orientamento di α
> - $OP' \cong OP$" (Sasso, 2013, p. 227)

Tale costruzione risulta essere particolarmente macchinosa e articolata a una prima lettura e presenta la rotazione come una trasformazione che apparentemente esiste solo nel piano euclideo. In particolare, i libri di testo ai quali fanno riferimento i docenti nell'introdurre la rotazione in classe trattano l'argomento riferendosi a punti e angoli del piano euclideo, non offrendo particolari esempi o visualizzazioni legate alla realtà. Queste ultime risultano invece avere un ruolo determinante in un contesto di apprendimento volto a permettere lo sviluppo di competenze sull'argomento.
Le attività progettate mirano ad introdurre la rotazione in maniera graduale ed intuitiva, collegandola con altre isometrie del piano, quali le simmetrie assiali e le composizioni di queste ultime. Inoltre, l'argomento viene affrontato fornendo continui spunti che mettano in relazione il concetto di rotazione con gli oggetti della realtà quotidiana.
La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura", è stata intitolata *"Un percorso alla scoperta della rotazione"* e mira a guidare la classe in un percorso di scoperta delle principali caratteristiche della rotazione nel piano. In questo frangente il concetto di rotazione, oltre a non essere introdotto in modo usuale per mezzo di una definizione formale come avviene nei libri di testo, viene presentato in un'ottica specifica e in maniera non diretta. In particolare, l'attività prevede che si faccia uso di un artefatto manipolativo mediante il quale gli studenti lavorano

con il concetto di simmetria assiale e solo in un secondo momento si introduce la rotazione, che viene concettualizzata come composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti.
La seconda attività, relativa al campo “scopri, classifica e generalizza”, si intitola *“Simmetria assiale e rotazioni”* e ha lo scopo di far scoprire alla classe le proprietà della rotazione. Similmente a quanto previsto dalle attività sulla simmetria assiale, vengono esplorate le due forme con cui viene presentata la rotazione; da un lato quella implosa, in cui si considera la rotazione come una figura invariante secondo una certa rotazione, dall’altro quella esplosa, che prevede che la figura venga riprodotta ruotata di un certo angolo.
L’attività è strutturata in modo tale da prevedere un primo momento di gioco, in cui gli studenti sono chiamati ad utilizzare il software Tales Game per creare una figura applicando rotazioni su diverse rette. Questo permette agli studenti di lavorare attivamente e operare concretamente con il concetto di rotazione; in questo modo, oltre a rendere l’argomento più interessante, si dà modo alla classe di sperimentare direttamente con i saperi coinvolti, risolvendo dubbi e perplessità al riguardo.
La terza attività, relativa al campo “risolvi problemi, argomenta, dimostra”, si intitola *“Rosoni e attività di problem solving”* e ha lo scopo di consolidare le conoscenze acquisite riguardo alla rotazione. In particolare, la classe analizza due rosoni alla ricerca di simmetrie e trasformazioni note; questo permette agli studenti da un lato di creare un collegamento tra gli argomenti matematici affrontati e la realtà, dall’altro di esplorare approfonditamente le isometrie, andando a lavorare su abilità di alto livello.

4.2 Un percorso alla scoperta della rotazione

4.2.1 Descrizione dell’attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione al concetto di rotazione
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** un foglio di carta A4 e uno spillo
- **Prerequisiti:**
  - capacità di piegare un foglio di carta seguendo una serie di indicazioni date
  - conoscenza delle proprietà caratteristiche della simmetria assiale
  - saper riconoscere e applicare le proprietà della simmetria assiale attraverso le piegature di un foglio
- **Obiettivi:**
  - concettualizzare la rotazione, vista come composizione di simmetrie assiale con assi incidenti
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l’attività si compone di tre fasi sulle quali la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti. Nel caso in cui la classe abbia precedentemente svolto l’attività relativa al campo “esplora e congettura” sulla simmetria assiale, le prime due schede rappresentano in parte un richiamo delle azioni

svolte nella suddetta attività. L'insegnante, può dunque decidere di riservare minor tempo alle fasi di costruzione della figura richiesta.
In caso contrario, le presenti due schede offrono al docente uno spunto per lavorare congiuntamente prima sulle simmetrie assiali e in un secondo momento sulla composizione di queste ultime, approdando al termine al concetto di rotazione. In questo modo vengono trattati due argomenti contemporaneamente, in virtù dello stretto legame esistente tra di essi, che emerge esplicitamente dal percorso previsto. Questo elemento non va sottovalutato; è importante, infatti, sottolineare l'interdipendenza degli argomenti trattati, in quanto spesso, come nel presente caso, permettono di avere una visione approfondita di entrambi e di lavorare scegliendo metodi più convenienti di altri.
In questo secondo caso si suggerisce tuttavia di dedicare più tempo alle due schede rispetto a quello previsto dalle seguenti indicazioni, in modo da permettere agli studenti di soffermarsi su ognuno dei concetti per tutto il tempo necessario.
Nella fase 1 viene consegnato agli studenti un foglio di carta A4 su cui sono disegnate una figura (Q1) e due rette, una di colore rosso e una di colore blu. Gli studenti sono chiamati ad individuare dapprima la figura simmetrica di quella data rispetto alla retta rossa. A partire dalla figura trovata, l'insegnante chiede alla classe di realizzare la simmetrica di quest'ultima rispetto alla retta blu. In questo frangente, gli studenti lavorano piegando opportunamente il foglio e utilizzano uno spillo per individuare le simmetrie necessarie. L'artefatto "piegatura e spillo" ha un ruolo determinante nell'apprendimento delle proprietà caratterizzanti le trasformazioni geometriche coinvolte; in particolare, questo tipo di approccio risulta essere particolarmente intuitivo e fornisce al docente vari spunti per creare un collegamento con oggetti della vita quotidiana che presentano simmetrie assiali. Inoltre, l'utilizzo dello spillo per individuare i punti simmetrici richiama il significato di corrispondenza puntuale.
Dopo aver individuato le due simmetrie, i gruppi rispondono ad un questionario volto a mettere in relazione le figure ottenute precedentemente; questo permette alla classe di riflettere sulle azioni svolte e di costruire la rotazione come composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti. Inoltre, le domande proposte hanno lo scopo di permettere agli studenti di riconoscere in maniera autonoma le principali proprietà della simmetria assiale, costruendo significati matematici in prima persona.
A questo punto il docente potrebbe sviluppare una discussione collettiva, in cui i vari gruppi espongono alla classe le idee e le congetture a cui sono giunti; in questo frangente l'insegnante guida la discussione facendo domande e mettendo in luce dettagli ed elementi che conducano la classe a realizzare che la composizione delle due simmetrie eseguite corrisponde a una rotazione di 90° in senso orario attorno al vertice in basso a destra del quadrato di partenza.
Nella fase 2 si prosegue il lavoro iniziato nella fase 1 con l'obiettivo di concettualizzare l'idea di rotazione, costruendola come composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti. Nel dettaglio, l'attività ripercorre quella precedente e viene chiesto ai gruppi di realizzare nuovamente due simmetrie assiali partendo dalla figura ottenuta al termine della fase 1. In questo caso, agli studenti viene fornito un foglio di carta A4 su cui sono disegnate due rette tratteggiate, una rossa e una blu, che rappresentano le piegature

effettuate nella prima fase, due rette, una rossa e una blu, che corrispondono ai nuovi assi di simmetria di questa fase e due figure, quella da cui gli studenti sono partiti per realizzare le simmetrie della fase precedente e quella ottenuta come composizione delle suddette trasformazioni.

Al termine dell'attività gli studenti rispondono ad una serie di domande da cui sviluppare una discussione collettiva, orchestrata dal docente, volta al riconoscimento di elementi utili alla costruzione del concetto di rotazione. In particolare, l'insegnante guida la classe permettendo agli studenti di realizzare che la composizione delle due trasformazioni effettuate corrisponde ad una rotazione di 180° della figura Q1 di partenza.

In queste prime due fasi gli studenti hanno la possibilità di utilizzare un metodo differente dai soliti per lavorare con i saperi matematici coinvolti, che permette alla classe di costruire conoscenza, ma soprattutto competenza riguardo agli argomenti trattati. Da un lato, l'utilizzo dell'artefatto permette ai gruppi di operare concretamente con le simmetrie assiali, dall'altro, le domande proposte spingono gli studenti a ripercorrere quanto svolto manualmente, in modo tale che la classe rifletta e reinterpreti le azioni messe in atto sotto un altro punto di vista. Quest'ultimo aspetto favorisce lo sviluppo di pensiero critico e di mentalità elastiche, in grado di osservare un fenomeno da diverse prospettive, interpretandolo nel modo più conveniente in base agli scopi da raggiungere.

Nella fase 3 viene presentato ai gruppi un problema, che richiede agli studenti di operare in maniera più approfondita su quanto visto fino a questo punto dell'attività. In particolare, la classe deve individuare gli assi di simmetria necessari per costruire, mediante opportune piegature e utilizzando lo spillo, la figura che corrisponde a Q1 ruotata di 90° in senso antiorario.

Il livello di difficoltà cresce ulteriormente con l'ultimo quesito proposto, in cui si richiede agli studenti di utilizzare le quattro mattonelle ottenute e individuare le piegature da eseguire per ricoprire un pavimento 16x16. In questo frangente, le fasi precedenti risultano essere ricche di suggerimenti, che però gli studenti devono essere in grado di cogliere. In particolare, questo tipo di approccio spinge la classe a confrontare situazioni andando alla ricerca di elementi simili che possano essere utili ai fini della risoluzione del problema. Inoltre, il problema così formulato si colloca sia in ambito matematico, sia extra-matematico, in quanto spinge la classe ad applicare le trasformazioni geometriche trattate in una situazione reale come quella di una pavimentazione.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula o aula virtuale
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

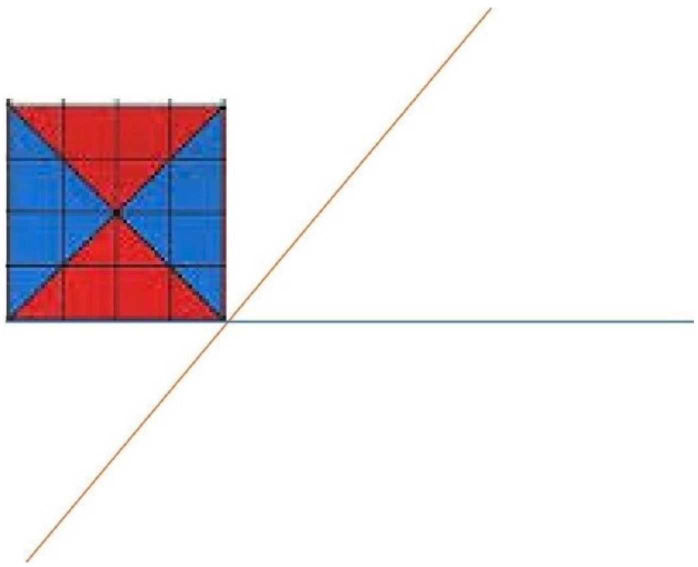
4.2.2 Attività proposte e soluzioni

L’attività è suddivisa in 3 fasi e prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti. Il tempo dedicato alla fase 1 è di 40 minuti. In particolare, ai gruppi viene fornita la scheda su cui lavorano per 20 minuti e, successivamente, i restanti 20 minuti sono dedicati alla discussione collettiva guidata dal docente.

LA ROTAZIONE: esplora e congettura
Un percorso alla scoperta della rotazione
Scheda studente 1(a): rotazione di 90°

Rotazione di 90° di Q1 (in senso orario) attorno al vertice in basso a destra

Piega il foglio lungo la retta rossa in modo che la figura data Q1 resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica rispetto alla retta rossa con l’aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama S1 la figura ottenuta.



Piega il foglio lungo la retta blu in modo che la figura S1 che hai appena creato resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica rispetto alla retta blu con l’aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama Q2 la figura ottenuta.

Questionario

Osserva le figure Q1 e S1. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Spiega perché.

Osserva le figure Q1 e Q2. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Spiega perché.

Come sono posizionati i triangoli colorati che compongono le figure Q1 e Q2? Spiega perché.

Eseguendo la simmetria di Q1 utilizzando la retta rossa come asse si ottiene:

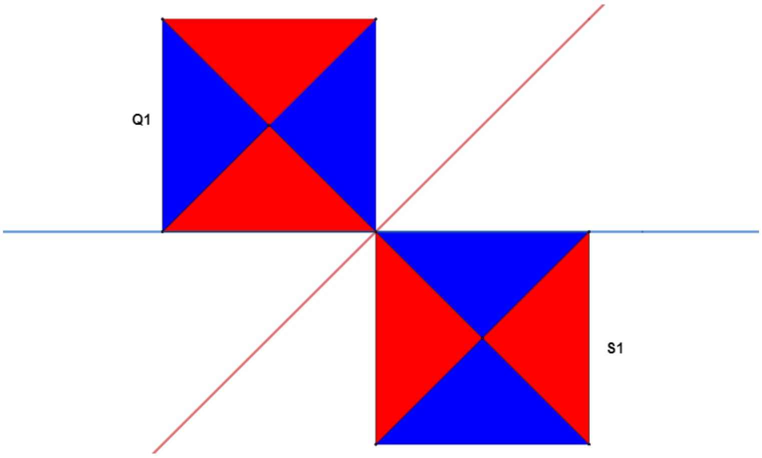


Figura 15

A questo punto si opera la simmetria di S1 rispetto alla retta blu e si ottiene Q2:

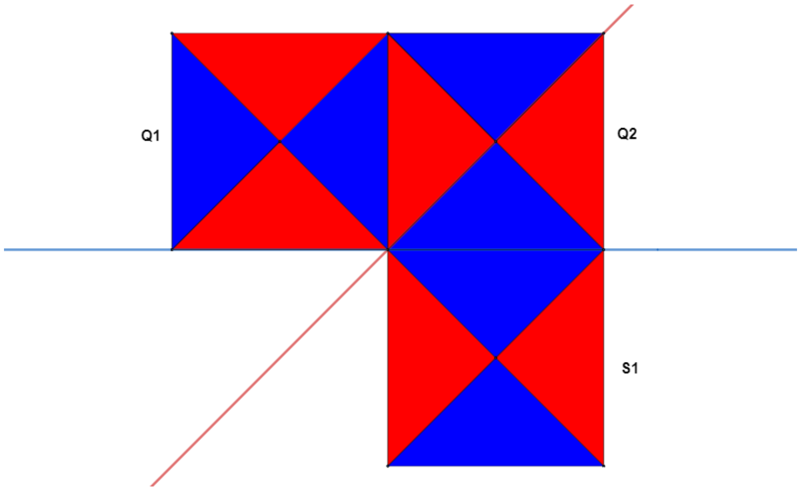


Figura 16

Osservando le figure Q1 ed S1 emergono le proprietà caratterizzanti la simmetria assiale:

1. le coppie di punti simmetrici sono equidistanti dall'asse, ovvero la retta rossa
2. i segmenti che congiungono coppie di punti simmetrici sono perpendicolari all'asse

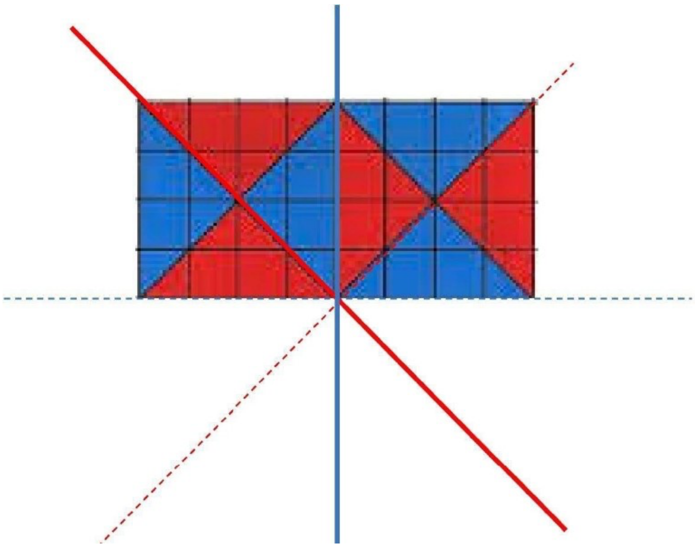
La colorazione dei triangoli che compongono le figure Q1 e Q2 permette di intuire il tipo di trasformazione che le lega, ovvero una rotazione. In particolare, componendo le due simmetrie assiali e applicando tale trasformazione ai vertici e al punto di intersezione delle due diagonali, risulta evidente che Q2 rappresenta la figura Q1 ruotata attorno al suo vertice in basso a destra di 90° in senso orario.
A questo punto il docente fornisce ai gruppi la seconda scheda alla quale vengono dedicati 20 minuti. La fase 2 termina con una discussione collettiva orchestrata dal docente della durata di circa 20 minuti.

Scheda studente 2(a): rotazione di 180°

Rotazione di 180° di Q1 (in senso orario) attorno al vertice in basso a destra.

Nell'immagine, le linee tratteggiate rappresentano le pieghe già esistenti.

Piega il foglio lungo la retta rossa in modo che la figura Q2 data resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica di Q2 rispetto alla retta rossa con l'aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama S2 la figura ottenuta.



Piega il foglio lungo la retta blu in modo che la figura S2 che hai appena creato resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica di S2 rispetto alla retta blu con l'aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama Q3 la figura ottenuta.

Questionario

Osserva le figure Q1 e S2. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Spiega perché.

Osserva le figure Q1 e Q3. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Come sono posizionate reciprocamente? Spiega perché.

Dopo aver eseguito la prima consegna si individua la figura S2 simmetrica di Q2 rispetto alla retta rossa:

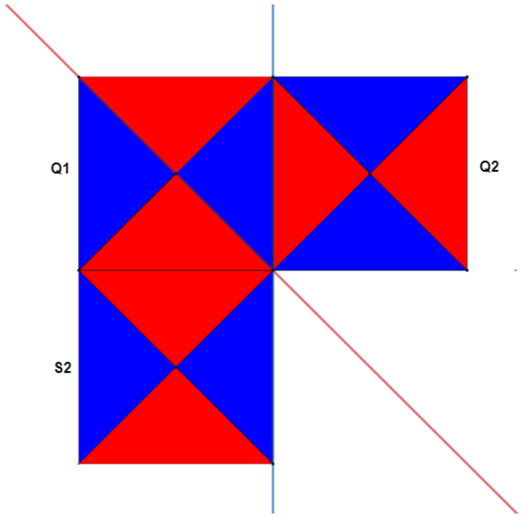


Figura 17

A questo punto si esegue la simmetria di S2 rispetto alla retta blu e si ottiene:

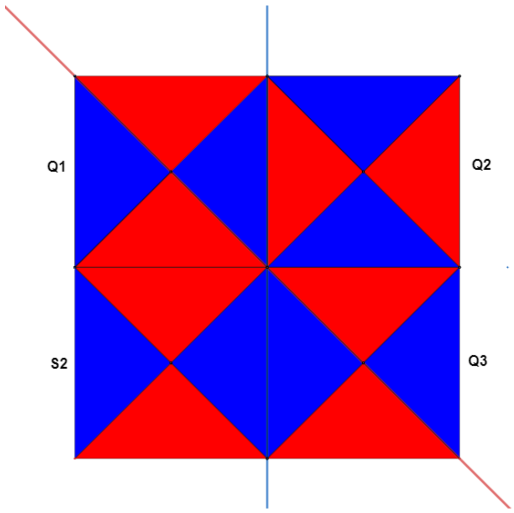


Figura 18

Da tale rappresentazione è possibile osservare che:

1. S2 è simmetrica di Q1 rispetto alla retta blu tratteggiata (quest'ultima non è presente nella figura 18, ma è disegnata sul foglio fornito agli studenti come previsto dalla scheda studente riportata)
2. Q3 è la figura che si ottiene ruotando Q2 attorno al suo vertice in basso a sinistra di 90° in senso orario
3. per quanto affermato al punto 2 e per quanto visto nella fase 1 relativamente al fatto che Q2 rappresenta la figura Q1 ruotata attorno al suo vertice in basso a destra di 90° in senso orario, si può concludere che Q3 corrisponde alla figura ottenuta ruotando Q1 attorno al suo vertice in basso a destra di 180° in senso orario.

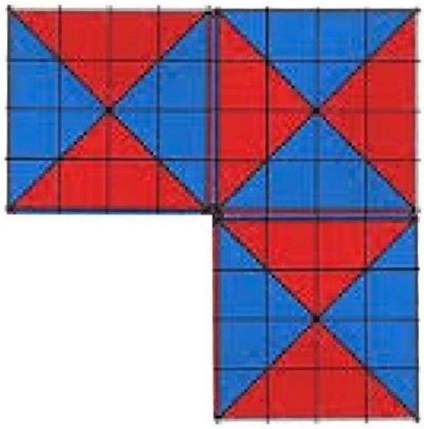
Risulta a questo punto chiaro che la rotazione può essere vista come composizione di due simmetrie aventi assi incidenti. Inoltre, osservando gli assi utilizzati per ruotare Q2 e ottenere Q3 è possibile intuire la relazione esistente tra l'angolo di rotazione e l'angolo tra i due assi. In

particolare, nel seguente caso l'angolo tra la retta rossa e quella blu è di 45°, mentre l'angolo di rotazione è di 90°, ovvero il doppio del precedente.
Lo stesso tipo di analisi può essere svolta sulla rotazione di 90° effettuata nella fase 1, osservando che l'angolo tra le rette tratteggiate, che corrispondono agli assi di simmetria utilizzati nella scheda precedente, è di 45°.
Una volta terminata la discussione collettiva si procede con la fase 3. Il docente consegna dunque agli studenti la scheda su cui lavoreranno per 40 minuti.

Scheda studente 3(a): rotazione di -90°

Rotazione di -90° di Q1 (in senso antiorario) attorno al vertice in basso a sinistra

Individua le piegature opportune che ti permetteranno di costruire la quarta mattonella in modo che sia la figura Q1 ruotata di 90° in senso antiorario.



Con le quattro mattonelle individua le piegature opportune per ricoprire un pavimento 16x16 seguendo la rappresentazione di base delle 4 mattonelle.

Per quanto svolto nelle precedenti schede è intuitivo pensare che per ottenere la quarta mattonella sia sufficiente ruotare il quadrato in basso a destra (Q3) attorno al suo vertice in alto a sinistra di 90° in senso orario. Dunque, è necessario dapprima eseguire due simmetrie con assi incidenti e formanti un angolo di 45°. In particolare, la prima simmetria da eseguire è la seguente:

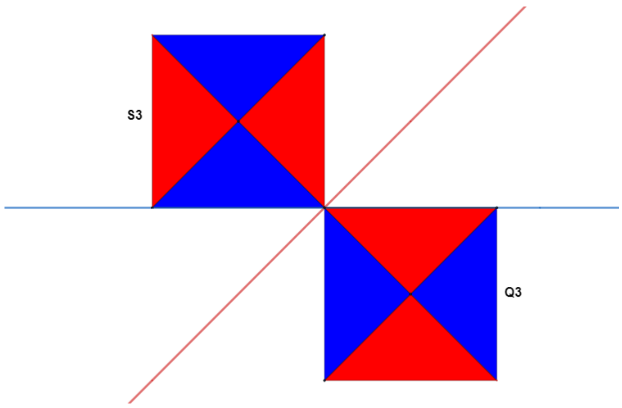


Figura 19

A questo punto si disegna la simmetrica di S3 rispetto alla retta blu e si ottiene Q4, che corrisponde alla figura ottenuta ruotando Q3 attorno al suo vertice in alto a sinistra di 90° in senso orario di 90°:

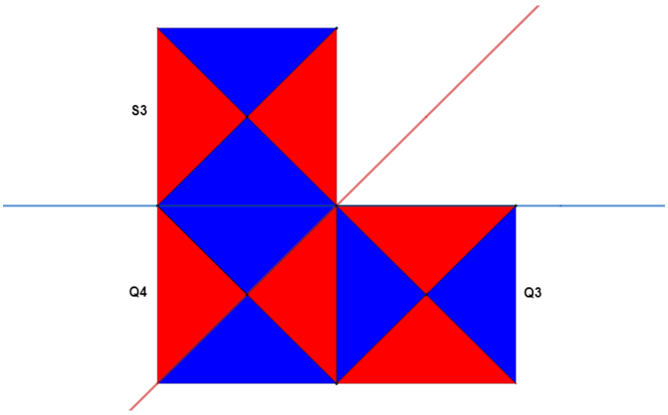


Figura 20

A questo punto la configurazione che si ottiene delle quattro mattonelle è la seguente:

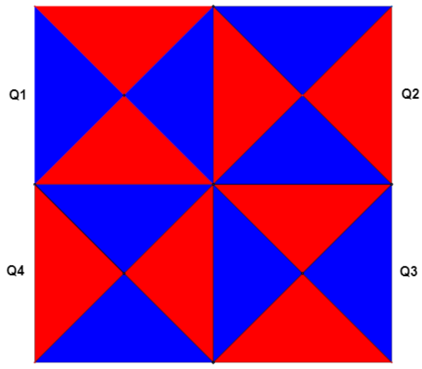


Figura 21

Osservando la figura 21 si può verificare che effettivamente Q4 corrisponde alla figura Q1 ruotata attorno al suo vertice in basso a destra di 90° in senso antiorario.
Per quanto riguarda risoluzione del quesito che chiede di utilizzare la configurazione della figura 21 per ricoprire una pavimentazione 16x16, è sufficiente eseguire le simmetrie nell'ordine in cui sono state svolte nelle fasi precedenti e utilizzando assi analoghi a quelli utilizzati nella costruzione delle quattro mattonelle incidenti nel punto attorno al quale si vuole ruotare la figura. La difficoltà è maggiore in questo caso, in quanto la figura di partenza risulta essere più articolata. Si riporta di seguito una traccia della risoluzione del problema.
Chiamando M1 la configurazione della figura 21, si opera dapprima una simmetria di quest'ultima rispetto alla retta rossa, analoga a quella utilizzata nella prima scheda, e si ottiene T1. Successivamente si opera una simmetria di T1 rispetto alla retta blu e si individua M2, che corrisponde a M1 ruotata attorno al suo vertice in basso a destra di 90° in senso orario:

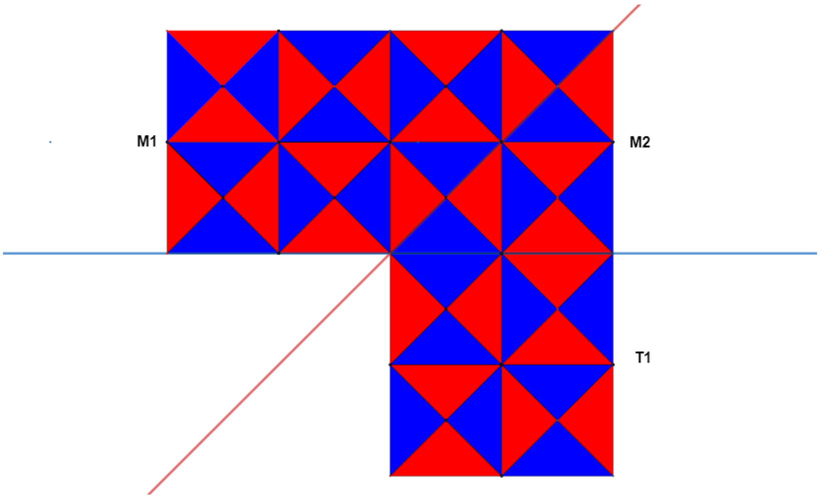


Figura 22

A questo punto, partendo da M2, si effettuano due simmetrie assiale rispetto alle due rette in figura 23:

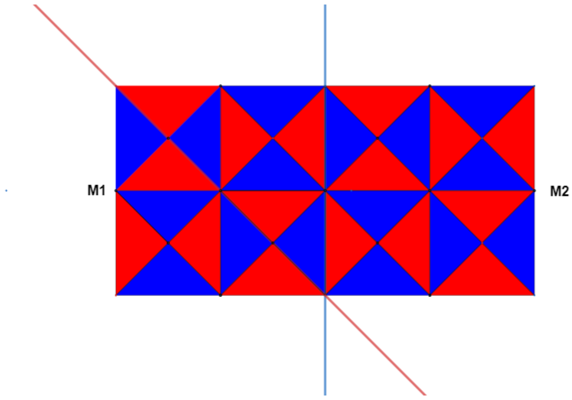


Figura 23

Dopo aver eseguito prima la simmetria di M2 rispetto alla retta rossa e poi la simmetria della figura così ottenuta rispetto alla retta blu si ottiene M3, che corrisponde a M2 ruotata attorno al suo vertice in basso a sinistra di 90° in senso orario o, analogamente, a M1 ruotata attorno al suo vertice in basso a destra di 180° in senso orario.
A questo punto si eseguono le ultime due simmetrie a partire da M3, utilizzando come assi rette analoghe a quelle individuate nella prima parte della fase 3 per trovare la quarta mattonella. Ciò che si ottiene è quanto riportato di seguito:

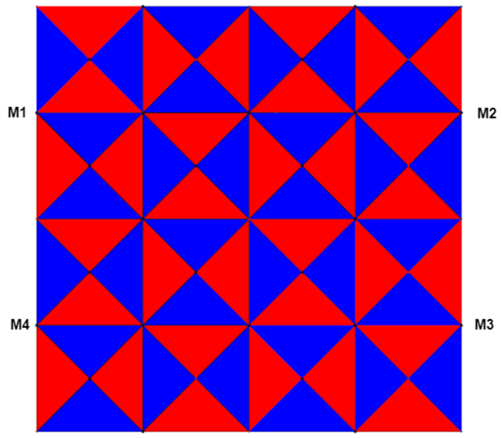


Figura 24

4.3 Simmetria assiale e rotazioni

4.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione parziale alle tassellazioni del piano utilizzando il concetto di rotazione

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** Tales Game

- **Prerequisiti:** esecuzione dell'attività sulle simmetrie assiali relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", intitolata *"Simmetrie assiali con il software Tales Game"*

- **Obiettivi:**
  - operare con le rotazioni nel piano, facendone esperienza anche in ambiente reale e artistico
  - costruire un catalogo parziale e intuitivo delle tassellazioni del piano

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede che gli studenti lavorino a coppie ed è suddivisa in 2 fasi.
  Nella fase 1 gli studenti lavorano su due schede che lasciano alla classe ampi spazi di esplorazione e di creazione personale.
  In un primo momento, mediante un gioco a turni tra i due giocatori, gli studenti creano una configurazione che costituirà il tassello da utilizzare nella scheda 1. In particolare, viene utilizzato il software Tales Game e prima di iniziare si seleziona come figura il rettangolo, un livello a piacere, che determina la distanza dei punti sul bordo della figura e si sceglie "SI'" all'opzione *numeri*. A questo punto ogni coppia traccia, utilizzando colori diversi, l'asse di simmetria orizzontale che unisce i punti medi dei lati minori e quello verticale che unisce i punti medi dei lati maggiori.
  Il gioco procede come segue: il giocatore 1 disegna una retta a scelta e il giocatore 2, partendo da tale retta, deve dapprima individuare la sua simmetrica rispetto all'asse

verticale, disegnandola con un colore neutro. A questo punto deve trovare la simmetrica di quest'ultima retta rispetto all'asse orizzontale e termina il suo turno disegnando una nuova retta a piacere. Il giocatore 1 a sua volta dovrà partire da quest'ultima per riportarle prima secondo la simmetria dell'asse verticale e quindi secondo quella dell'asse orizzontale e così via. Dopo un numero limitato di mosse (si suggerisce non più di 3 a causa dell'elevato numero di rette disegnate), ogni coppia procede con la colorazione della configurazione ottenuta.
In questo frangente il ruolo del docente è attivo e il suo compito è quello di guidare la classe e verificare quanto prodotto da ogni coppia. In particolare, durante il gioco l'insegnante fornisce consulenze personalizzate alle varie coppie, spingendo gli studenti a ragionare sulle azioni svolte e a cercare possibili legami e relazioni tra la retta di partenza e quella ottenuta al termine di ogni turno. In questo modo gli studenti giungono autonomamente al riconoscimento della trasformazione geometrica che corrisponde alla composizione delle due simmetrie assiali eseguite. Si tratta di una rotazione di 180°, anche detta simmetria centrale, e la colorazione del tassello, che deve rispettare tale trasformazione, potrebbe rappresentare un buono stimolo nella scoperta di quanto sopra, nonché un elemento che potrebbe chiarificare ulteriormente la situazione.
Una volta terminata la fase di gioco, il docente potrebbe chiedere alle varie coppie di scambiarsi le configurazioni ottenute e di verificare la correttezza delle simmetrie eseguite. In questo modo, oltre a consolidare le conoscenze e competenze acquisite riguardo ai saperi coinvolti, ogni coppia ha l'opportunità di autovalutare i propri risultati, mettendoli a confronto con quelli altrui e ponendoli in discussione laddove ritenuto necessario.
A questo punto viene consegnata la scheda 1, in cui viene chiesto agli studenti di riprodurre, utilizzando il tassello ottenuto mediante il gioco, la tassellazione P2 e quella CMM utilizzando Tales Game. Quest'ultimo caso offre spunti all'insegnante per condurre la classe in una discussione collettiva volta a far riflettere gli studenti in primo luogo sulla presenza della lettera M nella sigla, collegando questo discorso a quanto convenuto nell'attività sulla simmetria assiale. In particolare, la denominazione contenente la M indica che si è in presenza di una tassellazione simmetrica rispetto ad una famiglia di assi di simmetria paralleli tra loro. Tenendo conto di ciò, il docente potrebbe domandare agli studenti di interpretare la presenza di due M nel caso in questione, spingendo la classe ad intuire che in questa situazione le famiglie di simmetrie assiali che mandano la tassellazione in se stessa sono due. Un passo ulteriore da fare potrebbe essere quello di chiedere agli studenti di individuare le suddette famiglie: una con assi di simmetria verticali e l'altra con assi orizzontali.
Una volta terminata la discussione, si ripete il gioco utilizzando come figura il rombo e come assi di simmetria rispettivamente la diagonale minore e quella maggiore. Inoltre, per aumentare il livello di difficoltà, si suggerisce di selezionare "NO" all'opzione *numeri*. Dunque si consegna alle coppie la scheda 2, in cui viene richiesto di riprodurre le tassellazioni PGG e P6.
Nella fase 2 gli studenti lavorano individualmente ad una prova di verifica che risulta essere indispensabile per il docente al fine di ottenere un feedback del lavoro svolto e

delle competenze acquisite. In particolare, viene chiesto alla classe di costruire un tassello, ponendo attenzione al fatto che non presenti simmetrie interne. Questo permette di ottenere un catalogo parziale delle tassellazioni che risulti però essere completo e generale. Nella scheda si richiede agli studenti di utilizzare il tassello creato per riprodurre le tassellazioni P2 e P6, già viste nella fase 1, e due ulteriori configurazioni P3 e P4. Lo scopo della scheda è di fornire agli studenti una classificazione più formale e generale delle tassellazioni in questione.
Si suggerisce di proporre tale prova di verifica in modo tale che non venga percepita dalla classe come uno strumento di valutazione, ma come elemento per individuare eventuali lacune e difficoltà, in modo tale da andare ad intervenire laddove necessario con approfondimenti ed eventuali attività di potenziamento.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza

4.3.2 Attività proposte

L'attività è suddivisa in due fasi. Nella fase 1 la classe lavora a coppie su due schede; in particolare, si comincia utilizzando come figura il rettangolo e al gioco e alla scheda 1 vengono dedicati complessivamente 30 minuti.

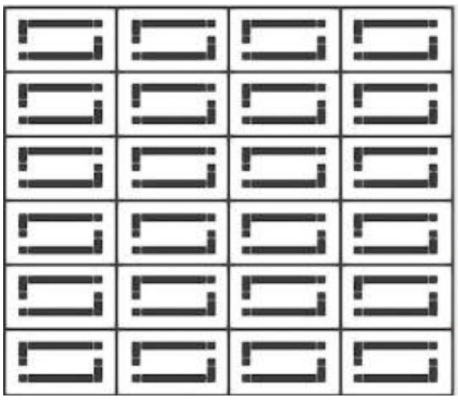
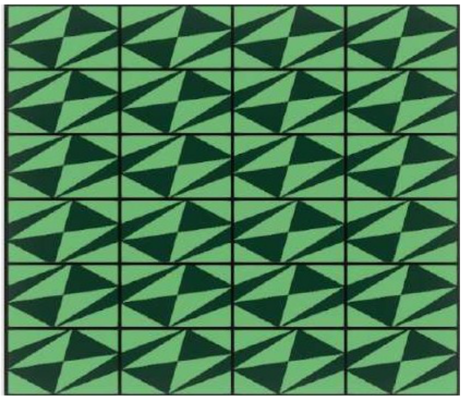
LA ROTAZIONE: scopri, classifica e generalizza
Simmetria assiale e rotazioni
Scheda studente 1 (b)
Catalogo parziale tassellazioni: simmetria centrale del tassello con tassello rettangolare

Dopo aver terminato il gioco a turni usa il tassello che hai creato per riprodurre le seguenti tassellazioni. Utilizza il catalogo seguente. Tieni presente che ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (per esempio **P2**) sia con quella **Orbifold** (per esempio **2222**).

P2 (2222)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria centrale.*

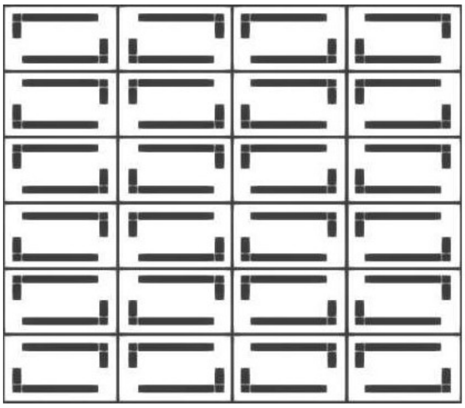
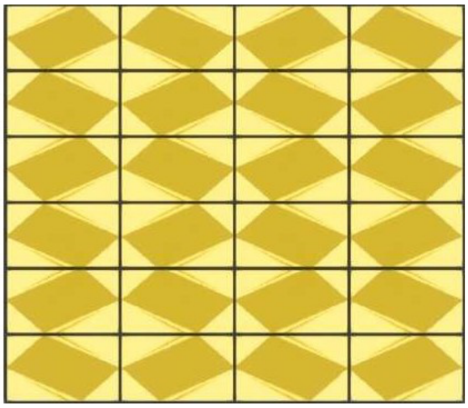
Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in entrambe le direzioni.*

CMM (2*22)

Tassello: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria centrale.*

Tassellazione: *il tassello si riflette in entrambe le direzioni.*

Al termine dei 30 minuti, si suggerisce di condurre la classe in una discussione collettiva che mira a far riflettere gli studenti sul ruolo della lettera M all'interno delle denominazioni viste nella scheda 1.
Successivamente, il docente fornisce alle coppie la scheda 2 e ripropone il gioco utilizzando il rombo come figura di partenza. A questa fase dell'attività vengono dedicati 30 minuti.

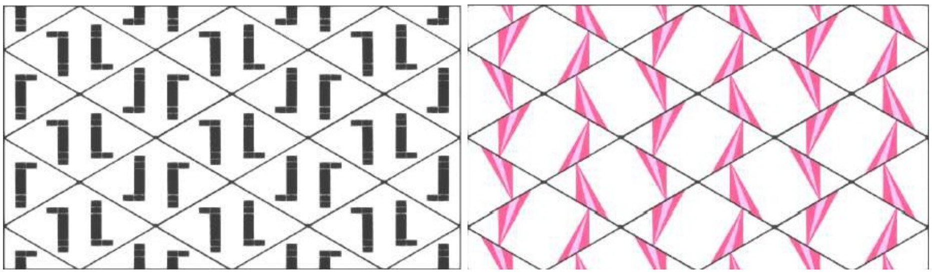
Scheda studente 2 (b)
Catalogo parziale tassellazioni: simmetria centrale del tassello con tassello romboidale

Dopo aver terminato il gioco a turni usa il tassello che hai creato per riprodurre le seguenti tassellazioni. Utilizza il catalogo seguente. Tieni presente che ogni gruppo di isometrie piane è classificato sia con la notazione **cristallografica** (per esempio **PGG**) sia con quella **Orbifold** (per esempio **22X**).

PGG (22X)

Tassello: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria centrale.*

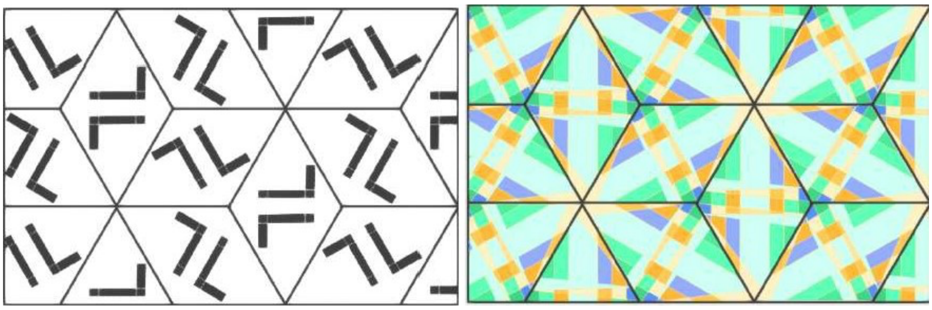
Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione sulle righe individuate dalla diagonale maggiore del rombo, specchiato tra una riga e l'altra.*



P6 (22X)

Tassello: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *il tassello presenta una simmetria centrale.*

Tassellazione: *tre rombi, con rotazioni di 120°, formano un esagono. Gli esagoni tassellano il piano per traslazione.*



Nella fase 2 gli studenti lavorano individualmente sulla scheda fornita come prova di verifica per circa 40 minuti. Il docente può scegliere di fornire più tempo in base alle esigenze della classe.

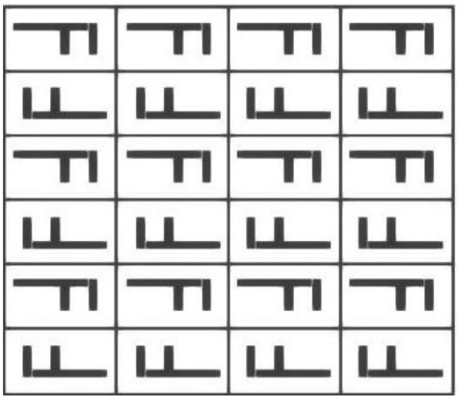
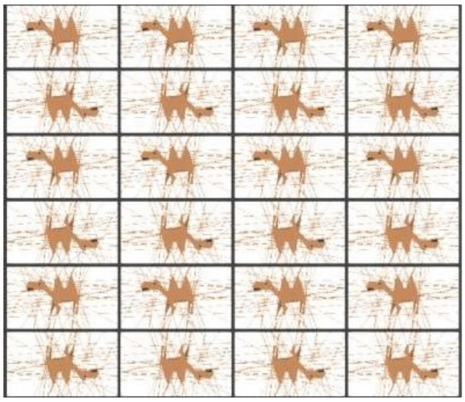
Prova di verifica: rotazione esplosa del tassello

Riprodurre una tassellazione a piacere che sia **P2**, una **P4**, una **P3** ed un'altra **P6**.
Per riprodurre una tassellazione, bisognerà dapprima creare una configurazione a piacere rispettivamente con un tassello **rettangolare**, **quadrato**, **romboidale** e **triangolare** per poi disporlo come indicato di seguito. Bisogna prestare attenzione che il tassello creato **non** presenti simmetrie interne.

P2 (2222)

Figura da selezionare: *rettangolo.*
Configurazione interna del tassello: *libera, priva di simmetrie interne.*

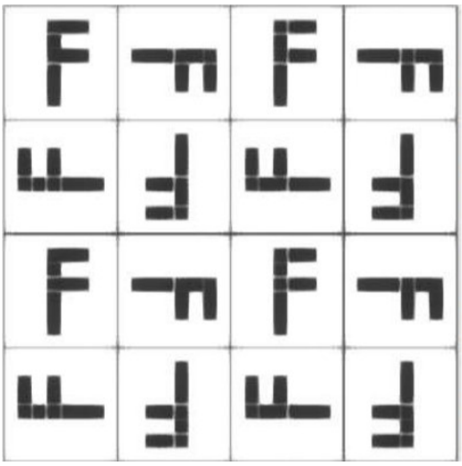
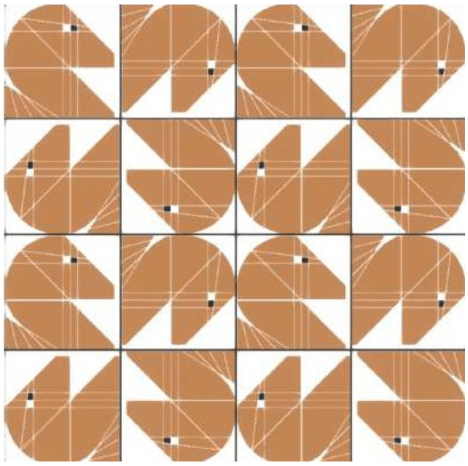
Tassellazione: *il tassello si ripete uguale a sé stesso per traslazione in una direzione mentre nell'altra direzione si applica una simmetria centrale.*

P4 (442)

Figura da selezionare: *quadrato.*
Configurazione interna del tassello: *libera, priva di simmetrie interne.*

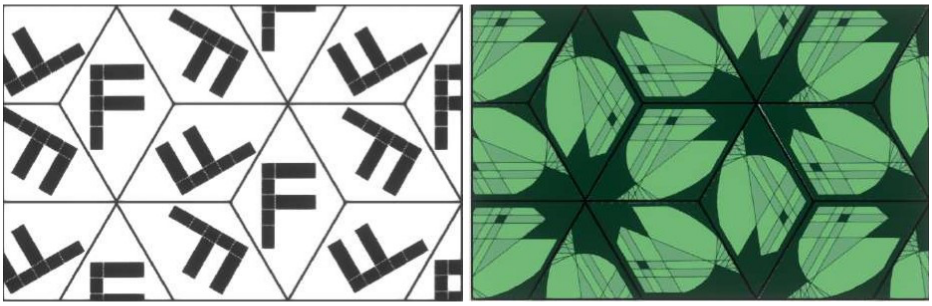
Tassellazione: *si procede tassellando per gruppi di quattro tasselli, che si ottengono per rotazioni di 90° attorno ad un vertice del quadrato.*

P3 (333)

Figura da selezionare: *rombo.*
Configurazione interna del tassello: *libera, priva di simmetrie interne.*

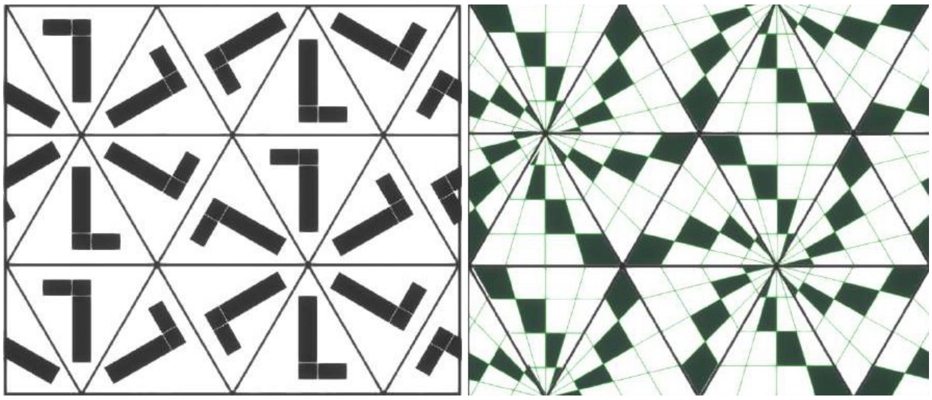
Tassellazione: t*re rombi, con rotazioni di 120°, formano un esagono regolare. Un esagono regolare tassella il piano per traslazione.*



P6 (632)

Figura da selezionare: *triangolo equilatero.*
Configurazione interna del tassello: *libera, priva di simmetrie interne.*

Tassellazione: *sei triangoli, con rotazioni di 60°, formano un esagono regolare.*



4.4 Rosoni e attività di problem solving

4.4.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** esplorazione della rotazione tramite analisi di rosoni
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** carta e matita, GeoGebra, Rosette Symmetry
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza del software GeoGebra
  - conoscenza dei concetti di simmetria assiale e di rotazione
- **Obiettivi:** comprendere il significato del concetto di n-centro di simmetria
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in 2 fasi.
  La fase 1 prevede che venga presentato alla classe il software Rosette Symmetry. In particolare, gli studenti vengono suddivisi in gruppi di 3\4 e viene lasciato loro il tempo di esplorare in maniera autonoma il funzionamento del software. Lo scopo è quello di

scoprire il significato dei numeri presenti sulla sinistra del riquadro su cui disegnare e la funzione del pulsante *Reflection*.
In questo frangente gli studenti elaborano congetture e lavorano con il concetto di dimostrazione grafica e visiva; questo strumento è utile alla classe per verificare la veridicità delle ipotesi fatte riguardo la funzione svolta dai vari comandi scelti. La visualizzazione ha dunque un ruolo centrale in questa prima fase di lavoro, in quanto la creazione di configurazioni a piacere impostando comandi differenti, guida la classe a comprendere in maniera intuitiva il significato di n-centro.
L'insegnante supervisiona lo stato di avanzamento del lavoro di ogni gruppo, ponendo domande mirate e suggerendo particolari configurazioni che possano agevolare la comprensione dei comandi del software. Si suggerisce di chiedere ad ogni gruppo di esporre alla classe il lavoro svolto durante questa iniziale fase di esplorazione. Questo condurrà gli studenti in una discussione collettiva, orchestrata dal docente, che ha il compito di indirizzare il dibattito verso la concettualizzazione del termine n-centro. In particolare, è importante che venga messa in luce la relazione esistente tra il numero n scelto e il numero di volte con cui compare nella configurazione la figura disegnata dagli studenti. In questo modo, i suggerimenti e le domande del docente, che potrebbe in aggiunta proporre esempi durante la discussione, dovrebbero portare gli studenti ad intuire che, una volta stabilito il significato di n, è possibile risalire all'ampiezza dell'angolo con cui viene ruotato il tratto disegnato rispetto al centro del foglio di disegno, che è pari a $\frac{360°}{n}$. A questo punto, avviene l'istituzionalizzazione del concetto di n-centro, che corrisponde al centro di una rotazione di $\frac{360}{n}$ gradi.
Nella fase 2 viene consegnata ai gruppi la scheda di lavoro, nella quale sono presenti le immagini di due rosoni. Agli studenti vengono inoltre forniti carta e matita e la possibilità di utilizzare il software GeoGebra. La richiesta è quella di riprodurre i rosoni sfruttando gli strumenti a disposizione. In particolare, ogni gruppo può scegliere liberamente di lavorare utilizzando uno o più dei software a disposizione, ricreando la configurazione nell'ambiente che ritiene migliore.
Un elemento importante nello svolgimento dell'attività è rappresentato dal riconoscimento di simmetrie e rotazioni presenti all'interno della configurazione. Una volta individuate le isometrie coinvolte, e di conseguenza il motivo di base, gli studenti sfruttano le conoscenze acquisite nella fase 1 per individuare l'n-centro e l'angolo di rotazione per ricreare il rosone.
Questo tipo di attività, oltre a permettere agli studenti di approfondire maggiormente il discorso sull'n-centro e di operare con il concetto di rotazione, rappresenta un esempio di attività inserita in un contesto extra-matematico. In particolare, la classe ha la possibilità di visualizzare ed esplorare la rotazione in oggetti della realtà, creando una connessione tra quest'ultima e gli argomenti matematici trattati, che favoriscono l'acquisizione di una visione concreta dei saperi coinvolti.
Inoltre, la scheda proposta privilegia l'interdisciplinarietà e permette al docente di approfondire un argomento prettamente matematico, come quello delle isometrie, per mezzo di oggetti come i rosoni, tipici dell'architettura e dell'arte.

L'attività si conclude con l'esposizione da parte dei vari gruppi dei risultati ottenuti dall'analisi dei rosoni. In questo frangente, il docente potrebbe proporre un eventuale approfondimento di tale analisi, chiedendo agli studenti di cercare sul web o di utilizzare un libro di testo di arte per individuare altri rosoni da riprodurre individualmente.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

4.4.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti ed è suddivisa in due fasi. Il tempo dedicato alla fase 1 è complessivamente di 40 minuti. In particolare, gli studenti esplorano liberamente il software Rosette Symmetry per 20 minuti e, a seguire, è prevista una discussione collettiva della durata di circa 20 minuti.
La fase 2 prevede che i gruppi lavorino sulla scheda consegnata loro dal docente per 60 minuti e si conclude con l'esposizione delle analisi effettuate dai gruppi alla quale sono dedicati 20 minuti.

LA ROTAZIONE: Risolvi problemi, argomenta, dimostra
Rosoni e attività di problem solving
Scheda studente (c)

Riproduci i rosoni delle seguenti immagini nell'ambiente o negli ambienti che preferisci (per esempio: carta e matita, GeoGebra, Rosette Symmetry https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/rosette.html).

1. Individua simmetrie e rotazioni del seguente rosone, quindi riproducilo completamente o in parte, tenendo conto delle isometrie che hai individuato.

2. Individua simmetrie e rotazioni del seguente rosone, quindi riproducilo completamente o in parte, tenendo conto delle isometrie che hai individuato.

Per riprodurre i due rosoni è necessario dapprima individuare la figura che viene ripetutamente ruotata al fine di individuare il numero n da scegliere nel software Rosette Symmetry. Inoltre, è importante andare alla ricerca di eventuali simmetrie presenti in tale figura, in modo da rendere la riproduzione più semplice grazie all'opzione *Reflection*.
Nel rosone 1 la figura che viene ruotata è la seguente:

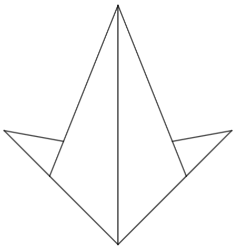


Figura 25

Dalla figura 25 si può affermare che è presente una simmetria all'interno della configurazione, il cui asse risulta essere verticale (la colorazione in questo caso non viene presa in considerazione, in quanto se così fosse non si potrebbe parlare di simmetria). Inoltre, osservando il rosone si contano 4 ripetizioni di tale figura all'interno della configurazione. Dalle considerazioni appena fatte è possibile riprodurre il rosone 1 con Rosette Symmetry eseguendo i seguenti passaggi:

1. dopo aver selezionato l'opzione *none*, disegnare il tratto di base all'interno del foglio di disegno assicurandosi che il centro di rotazione corrisponda con il centro del foglio

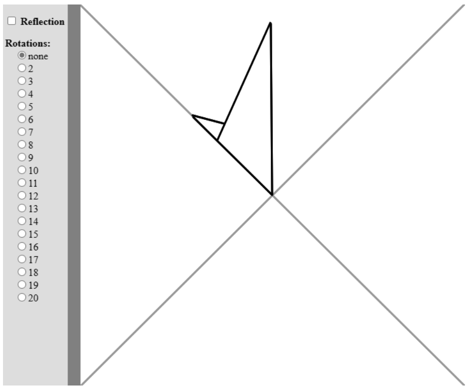


Figura 26

2. selezionare l'opzione *Reflection* per ricreare la figura in figura 25

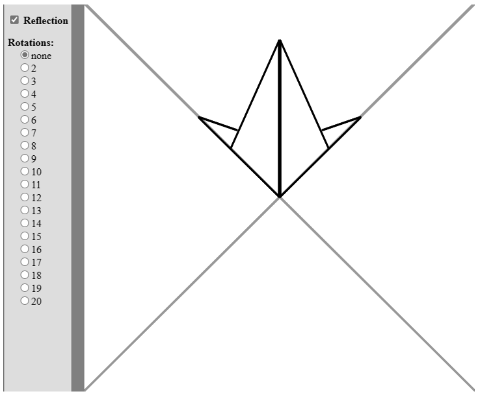


Figura 27

3. selezionare il numero n=4 per completare la configurazione

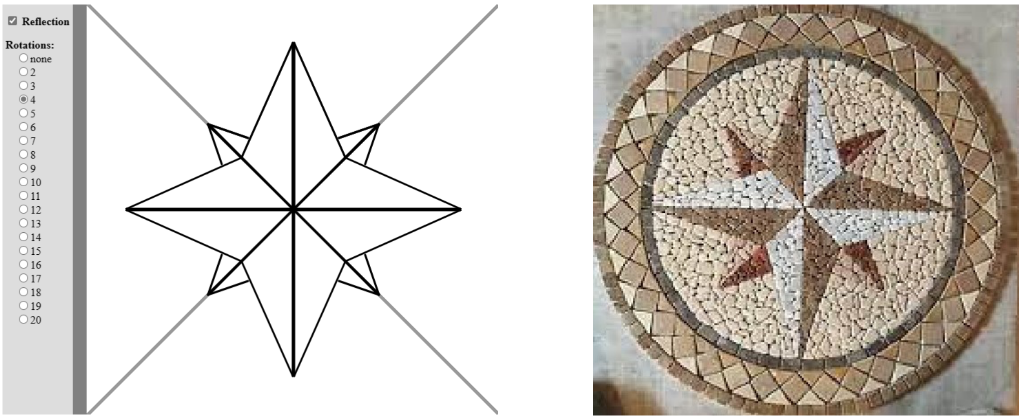


Figura 28 Riproduzione parziale del rosone 1 con Rosette Symmetry, rosone originale

Interpretando le azioni svolte e tenendo presente il significato del numero n scelto di cui si è trattato nella fase 1, si può concludere che il centro del foglio è un 4-centro e che la figura rappresentata in figura 25 viene ruotata ogni volta di $\frac{360°}{4} = 90°$ in senso orario fino a tornare al punto di partenza.

Nel rosone 2 la figura che subisce la rotazione è:

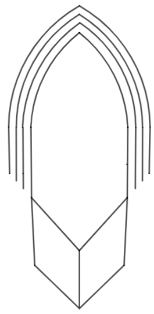


Figura 29

Osservando la figura 29 si può affermare che la figura presenta una simmetria il cui asse è verticale e che nel rosone 2 viene ripetuta 8 volte. Dunque, per riprodurre il rosone 2 con Rosette Symmetry è sufficiente ripetere i 3 passi elencati nel caso del rosone 1, con la differenza che nel passo 3 è necessario selezionare n=8.

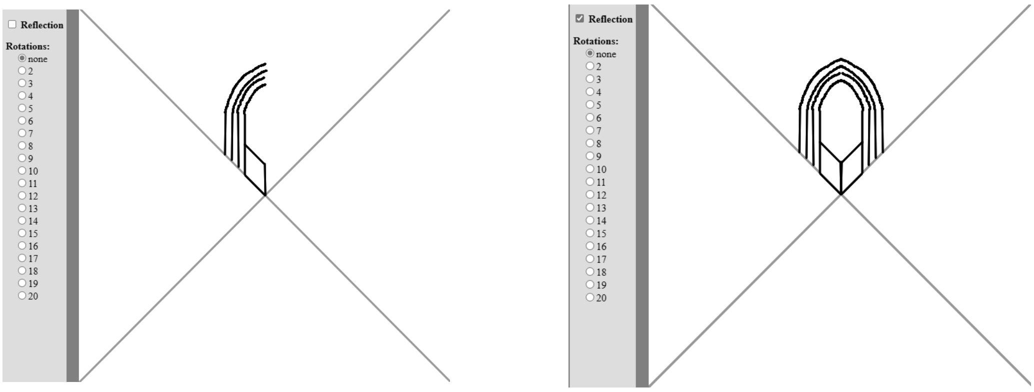


Figura 30 Passo 1, passo 2

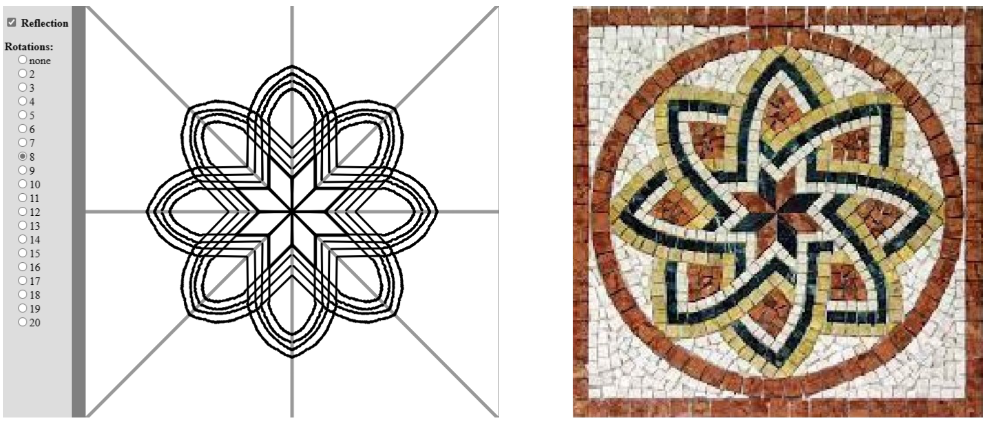


Figura 31 Riproduzione parziale del rosone 2 con Rosette Symmetry, rosone originale

In questo caso, il centro del foglio è un 8-centro e la figura in figura 29 viene ruotata ogni volta di $\frac{360°}{8} = 45°$ in senso orario fino a tornare al punto di partenza.

CAPITOLO 5

LA GLISSOSIMMETRIA

5.1 Introduzione

In questo capitolo vengono presentate le attività progettate dai collaboratori al progetto Klein Italia relative alla trattazione della glissosimmetria. Se nei capitoli precedenti sono state introdotte alcune delle principali isometrie del piano (la traslazione, la simmetria assiale e la rotazione), il passo ulteriore che viene fatto nel presente capitolo e in quello successivo riguarda la composizione delle isometrie viste finora. In particolare, la glissosimmetria rappresenta la composizione di una simmetria assiale e di una traslazione e le attività mirano a guidare gli studenti attraverso un percorso di scoperta e di esplorazione del concetto trattato. Analogamente a quanto previsto dalle attività analizzate precedentemente, lo scopo ultimo delle schede proposte è che siano gli studenti stessi a giungere alla concettualizzazione dell'argomento affrontato, scoprendo passo a passo le caratteristiche e le proprietà della glissosimmetria. Questo tipo di approccio, a differenza della classica lezione frontale, permette lo sviluppo di abilità di alto livello e spinge la classe a ragionare, osservare e confrontare situazioni, fare congetture, argomentare e risolvere problemi.

In questo caso le attività previste sono soltanto due, in quanto è stata elaborata un'unica scheda relativamente ai primi due livelli di competenza.

La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura" unitamente a quello "scopri, classifica e generalizza", è intitolata *"Alla scoperta della glissosimmetria"* e ha lo scopo di introdurre il concetto di glissosimmetria per mezzo di una macchina matematica. Quest'ultima rappresenta un utile strumento che gli studenti possono utilizzare per riconoscere in modo autonomo quali sono i due passaggi in cui usualmente viene scomposta la glissosimmetria, ovvero la simmetria assiale e la traslazione. L'utilizzo di tale macchina permette alla classe di visualizzare in modo chiaro le isometrie coinvolte e di facilitare, in questo modo, l'esplorazione e la comprensione del concetto di glissosimmetria.

La seconda attività, relativa al campo "risolvi problemi, argomenta e dimostra", è stata intitolata *"Tassellare con le simmetrie e riconoscere le glissosimmetrie"*. L'obiettivo è quello di consolidare le conoscenze acquisite riguardo alle isometrie già viste e alla glissosimmetria, facendo lavorare la classe concretamente alla creazione di tassellazioni con carta e forbici. In questo modo, gli studenti ritrovano concetti già sviluppati in altre attività, trasformazioni già trattate in precedenza, avendo così modo di approfondire maggiormente tali argomenti e raffinando le competenze acquisite al riguardo. Inoltre, iniziano a lavorare con composizioni di isometrie diverse dalla glissosimmetrie, creando in qualche modo un collegamento con le attività presentate nel capitolo successivo.

5.2 Alla scoperta della glissosimmetria

5.2.1 Descrizione dell’attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione al concetto di glissosimmetria
- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** cartoncini, fermacampioni, mine lunghe, GeoGebra, Tales Game
- **Prerequisiti:**
    - capacità di seguire una serie di indicazioni fornite al fine di costruire una macchina matematica
    - conoscenza dei concetti di simmetria assiale e di traslazione e delle proprietà caratterizzanti tali trasformazioni
- **Obiettivi:**
    - operare con le glissosimmetrie facendone esperienza in ambiente reale e trasformando figure a piacere
    - costruire ed utilizzare una macchina matematica per visualizzare concretamente proprietà geometriche al di fuori del piano euclideo
    - realizzare una macchina matematica e analizzarne il funzionamento
    - richiamare proprietà note di parallelogrammi e triangoli, riflettendo su di esse e visualizzandole in altri contesti
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l’attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti e in un primo momento vengono loro forniti cartoncini rigidi e fermacampioni. Seguendo le istruzioni dell’insegnante, la classe lavora alla costruzione della macchina matematica che rappresenta il punto centrale dell’attività in questione. In questo frangente, il docente, oltre ad illustrare agli studenti le azioni da svolgere per la realizzazione della macchina, supervisiona le operazioni svolte dai vari gruppi, verificando passo a passo che le indicazioni vengano eseguite correttamente.
  Una volta terminata la costruzione della macchina i gruppi iniziano a lavorare sui quesiti proposti nella scheda; in particolare, viene dapprima chiesto agli studenti di esplorare la macchina in modo dinamico e di fare congetture riguardo alle relazioni esistenti tra i punti individuati dal movimento del macchinario. In questo frangente, si consiglia alla classe di utilizzare mine lunghe da inserire nei punti che si muovono, in modo da rendere la visualizzazione e il confronto tra figure più semplice.
  L’attività è dunque strutturata in modo tale che vengano alternati momenti in cui si procede in maniera più operativa e altri in cui si lavora in modo astratto, operando una sintesi delle osservazioni e delle analisi effettuate precedentemente che conduce alla formazione di concetti e conoscenze. L’utilizzo della macchina matematica rappresenta un metodo alternativo e che rispecchia a pieno le due modalità di lavoro di cui sopra. In generale, questo tipo di materiale rappresenta un valido alleato in ambiente didattico, in quanto promuove lo sviluppo di conoscenze che partono dall’esperienza e facilita la

comprensione di oggetti matematici, come la glissosimmetria, che per loro natura risultano essere complessi. In questo modo, a differenza di quanto avverrebbe nel corso di una lezione frontale, la classe scopre e visualizza gli aspetti peculiari della glissosimmetria esplorando ed operando con essa in maniera autonoma.
Inoltre, l'utilizzo della macchina matematica per introdurre il concetto di glissosimmetria in classe permette agli studenti di venire in contatto con l'argomento matematico in questione da un punto di vista non prettamente matematico, analizzandolo ed osservandolo sin da subito in un ambiente reale. Questo è un elemento assai importante e da non sottovalutare, in quanto crea un legame tra l'oggetto matematico trattato e la realtà fisica, permettendo agli studenti di fare esperienza con il concetto di glissosimmetria nella realtà e impedendo che questa venga percepita come una trasformazione geometrica del piano euclideo dal carattere astratto.
L'osservazione del funzionamento della macchina conduce la classe ad elaborare ipotesi in maniera intuitiva riguardo alla glissosimmetria e ha un valore prettamente euristico. La progettazione dell'attività e le azioni svolte dall'insegnante hanno come obiettivo proprio quello di mettere in luce tale aspetto e di evidenziare la necessità di fare un passo ulteriore e trasformare le informazioni e i dati ottenuti con la percezione in conoscenza consapevole. Il compito del docente è dunque quello di guidare gli studenti in questo complesso passaggio che conduce ad un livello teorico e astratto, costituito da definizioni e dimostrazioni matematiche.
L'ultimo quesito proposto nella scheda è stato progettato proprio con lo scopo di spingere gli studenti a passare dall'esperienza e l'esplorazione concreta svolta per mezzo della macchina alla costruzione di conoscenze fondate razionalmente e dotate di un certo formalismo.
Al termine dell'attività il docente conduce la classe in una discussione collettiva durante la quale i gruppi espongono dapprima le congetture elaborate nel corso dell'esplorazione libera e successivamente come hanno operato il passaggio di cui sopra giungendo alla costruzione di significati matematici riguardo agli argomenti trattati. La discussione viene orchestrata dall'insegnante che guida la classe a concludere l'attività giungendo all'istituzionalizzazione del concetto di glissosimmetria vista come la composizione di una traslazione e di una simmetria assiale.
In questo frangente, il docente potrebbe proporre una serie di approfondimenti agli studenti, magari da svolgere autonomamente a casa. Tale materiale può poi essere sfruttato dall'insegnante come strumento di verifica delle conoscenze e delle competenze acquisite dalla classe nel corso dell'attività. Se da un lato, tale verifica può fornire all'insegnante indicazioni utili per andare ad intervenire laddove si presentassero eventuali lacune, dall'altro permette al docente di osservare da vicino i metodi di lavoro e le strategie adottate dai singoli studenti nell'esplorazione di situazioni, nella risoluzione di problemi e nell'elaborazione di dimostrazioni.

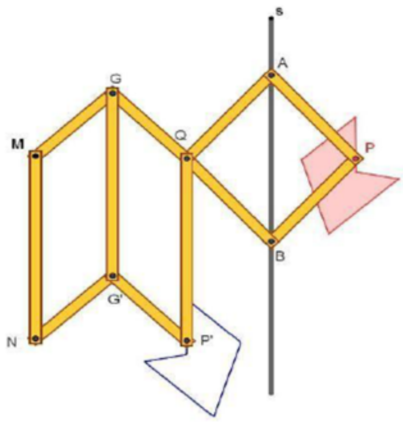
- **Tempo di svolgimento previsto:** 3-4 ore
- **Spazi:** aula e/o laboratorio
- **Modalità:** didattica in presenza

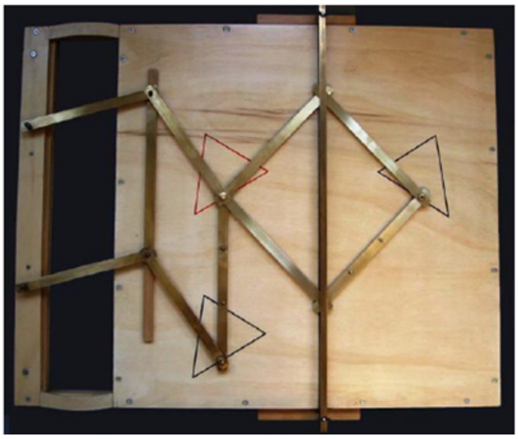
5.2.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti. Inizialmente, vengono dedicati circa 60 minuti alla costruzione della macchina guidata dal docente. Successivamente, viene consegnata la scheda ai vari gruppi alla quale vengono dedicati 120 minuti. A seconda delle esigenze della classe, l'insegnante può scegliere di fornire agli studenti del tempo aggiuntivo per lavorare sui quesiti proposti nella scheda.

LA GLISSOSIMMETRIA: Esplora e congettura - Scopri, classifica e generalizza
Alla scoperta della glissosimmetria
Scheda studente (a) e (b)

1. Costruisci una macchina matematica tagliando delle listarelle con cartoncini rigidi e fissandoli con fermacampioni, seguendo le istruzioni dell'insegnante. Puoi aiutarti usando i link https://youtu.be/WHxI7zA2wE,
www.macchinematematiche.org/trasformazioni-m-s/isometrie/glissosimmetria.html





2. Esplora la macchina in modo dinamico, osserva che cosa succede, fai le tue congetture e rispondi alle seguenti domande:
- Che legame ha il punto P con il punto P'?
- Che legame ha il punto P con il punto Q?
- Che legame ha il punto Q con il punto P'?
- Le figure che si ottengono in cosa differiscono?

3. Puoi aiutarti inserendo una mina di matita nei punti che si muovono, in modo che lasci traccia del movimento effettuato.

4. Se non riesci a costruire la macchina, puoi osservarne il funzionamento collegandoti a questa pagina web:
www.macchinematematiche.org/trasformazioni-m-s/isometrie/glissosimmetria.html.

5. Osserva bene la macchina che hai costruito. Analizza le parti fisse e quelle in movimento. Spiega come la macchina realizza le corrispondenze tra i punti P e Q, e tra i punti Q e P', che hai individuato in 2.

La parte destra della macchina è costituita dal rombo $APBQ$, in cui i vertici opposti A e B sono vincolati a muoversi lungo la retta s. I vertici liberi P e Q descrivono regioni piane limitate che si situano in semipiani opposti originati da s. Dato che le diagonali di un rombo sono perpendicolari tra loro e si intersecano rispettivamente nei punti medi, è possibile affermare che:

1. il segmento PQ è perpendicolare al segmento AB, e dunque alla retta s
2. i punti P e Q sono equidistanti dal segmento AB, e dunque da s

Quindi, i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale avente come asse la retta s.
La parte sinistra della macchina è costituita da due parallelogrammi $MNG'G$ e $GG'P'Q$, aventi dunque il lato GG' in comune. Dato che in un parallelogramma i lati opposti hanno uguale lunghezza, si può affermare che i lati MN e $P'Q$, essendo opposti al lato GG' in comune, hanno la stessa lunghezza, pari a quella di GG'. Inoltre, il lato MN è vincolato al piano in direzione parallela ad s. Di conseguenza, dato che i lati opposti di un parallelogramma sono paralleli tra loro, anche GG' e $P'Q$ sono paralleli alla retta s. Dunque, i punti Q e P' sono legati da una traslazione il cui vettore risulta avere direzione parallela ad s e modulo pari alla lunghezza di MN.
Il motivo per cui sono presenti due parallelogrammi con le suddette caratteristiche è legato al fatto che si vuole riprodurre una traslazione. In particolare, se fosse presente solo un parallelogramma, il punto Q sarebbe vincolato a muoversi su una circonferenza.
In conclusione, dato che la trasformazione che manda P in Q è una simmetria assiale, mentre quella che manda Q in P' è una traslazione, il legame tra il punto P e il punto P' è dato dalla composizione di una simmetria assiale e una traslazione; tale trasformazione prende il nome di glissosimmetria.
Di seguito vengono presentati una serie di consegne che il docente può fornire agli studenti interessati ad eventuali approfondimenti al termine dell'attività:

- Produci con il software Tales Game una qualsiasi tassellazione contenente la lettera g nella nomenclatura e identifica una particolare glissosimmetria che mandi la tassellazione in sé stessa.
- Prendi l'immagine di un edificio o di un'opera d'arte tridimensionale e descrivila individuando le eventuali isometrie presenti.
- Osserva una fotografia e studia se e con quali elementi dell'immagine ci si può accorgere se nella stampa la foto è stata inavvertitamente ribaltata.
- Esamina le lettere dell'alfabeto latino maiuscolo e classificale rispetto alle loro eventuali simmetrie. Cerca poi parole che lette allo specchio non si modificano e quelle con asse di simmetria orizzontale. Quali sono di più?
- Studia le simmetrie delle carte da gioco.

5.3 Tassellare con le simmetrie e riconoscere le glissosimmetrie

5.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** esplorazione di glissosimmetrie e di isometrie del piano note mediante le tassellazioni

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** carta, matita, squadra, forbici, Tales Game, GeoGebra

- **Prerequisiti:**
  - esecuzione dell'attività introduttiva relativa alla glissosimmetria
  - conoscenza del concetto di simmetria centrale
  - saper eseguire e riconoscere composizioni di simmetrie

- **Obiettivi:**
  - operare con le simmetrie centrali e assiali nel piano, riconoscendole e confrontandole
  - operare composizioni di simmetrie assiali e centrali, esaminarne gli effetti e confrontarli con quelli prodotti da altre isometrie note
  - riconoscere isometrie pari e dispari, dandone definizioni in termini di cambiamento di "verso" operato
  - Elaborare congetture e risolvere problemi utilizzando il concetto di glissosimmetria

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in 4 fasi e prevede che vengano alternati momenti operativi, in cui la classe lavora con strumenti poveri seguendo le indicazioni previste dalla scheda e date a voce dall'insegnante, e momenti di formalizzazione, in cui viene chiesto agli studenti di trarre conclusioni, confrontare diverse situazioni, elaborare congetture e dimostrare proprietà.

  La classe lavora a gruppi di 3\4 studenti, ma si consiglia di far eseguire le costruzioni con carta e forbici ad ognuno degli studenti nel corso della fase operativa. In questo modo, la costruzione in prima persona degli artefatti permette ad ogni studente all'interno del gruppo di osservare gli effetti delle operazioni svolte e di comprendere a fondo la dinamica delle isometrie coinvolte.

  In un primo momento il docente fornisce istruzioni alla classe per costruire i triangoli necessari a svolgere la scheda; si chiede dunque agli studenti di disegnare su un foglio una "quadrettatura" con parallelogrammi costituita da 2 o 3 righe e 4 o 5 colonne. A questo punto, si divide ogni parallelogramma secondo una delle diagonali e ogni suddivisione va operata utilizzando diagonali parallele tra loro. Il docente può scegliere di far realizzare le figure utilizzando un software opportuno, come Tales Game, e far successivamente stampare e ritagliare i triangoli ottenuti.

  Il foglio su cui disegnare o stampare i triangoli deve avere due lati di colore diverso; questo permetterà nelle fasi successive di distinguere più facilmente le isometrie pari da quelle dispari. Inoltre, è importante che vengano evitati casi particolari, come ad esempio parallelogrammi che siano anche rombi o che abbiano il lato orizzontale di lunghezza pari alla distanza tra le righe, in modo tale che gli studenti ottengano risultati che risultano avere validità generale.

  Nella fase 1 viene chiesto agli studenti di lavorare con due dei triangoli ottenuti in precedenza con l'obiettivo di lavorare su due isometrie: la traslazione e la simmetria centrale. In questo frangente, il docente osserva quanto svolto dai singoli studenti all'interno dei gruppi e conduce la classe a riflettere sulla colorazione dei triangoli prima e dopo aver effettuati i movimenti richiesti. Questo conduce gli studenti a costruire in maniera intuitiva un'idea del concetto di isometria pari.

Nella fase 2 i gruppi lavorano con tre triangoli e si chiede agli studenti di operare successive simmetrie centrali aventi come centri i punti medi dei lati del triangolo. I movimenti effettuati portano alla costruzione di un fregio. Viene, dunque, chiesto agli studenti di classificare il fregio ottenuto utilizzando il catalogo disponibile su Tales Game; in questo modo, si conduce la classe ad esplorare le isometrie coinvolte in ambiente artistico, fornendo uno spunto interdisciplinare per eventuali approfondimenti. Inoltre, vengono richiamate le attività relative alla traslazione e, in caso queste ultime non siano ancora state svolte dalla classe, il docente può scegliere di utilizzarle come eventuale approfondimento, piuttosto che come prova di verifica.

Nella fase 3 si chiede agli studenti di fare un passo ulteriore; in particolare, si domanda ai vari gruppi di formulare congetture con l'obiettivo di costruire, partendo dal fregio ottenuto nella fase precedente, una tassellazione. In questo frangente, si lascia inizialmente il tempo ai vari gruppi di esplorare liberamente la situazione e fare ipotesi e costruzioni in modo autonomo.

In un secondo momento, si suggerisce di domandare ad ogni gruppo di esporre alla classe le congetture elaborate; questo conduce la classe in una discussione collettiva, in cui il docente ha il compito di mettere in luce determinate possibilità (1. traslare la prima striscia nella direzione del lato "obliquo" del parallelogramma, 2. eseguire una simmetria centrale rispetto al terzo lato del triangolo, 3. costruire i simmetrici dei triangoli della prima striscia rispetto al lato orizzontale del primo triangolo). Nel caso in cui dall'esposizione del lavoro svolto dai vari gruppi non dovessero emergere tali congetture, l'insegnante guida gli studenti a prenderle in considerazione. I motivi per cui si consiglia di dedicare tempo all'analisi dei suddetti casi sono molteplici; nel dettaglio, le prime due situazioni mirano a far lavorare gli studenti sul confronto di isometrie, identificando equivalenze e dimostrandone la validità, mentre la terza offre un valido spunto per approfondire il discorso riguardo le isometrie pari e dispari, che culmina con la concettualizzazione di queste ultime.

Nella fase 4 si chiede ai vari gruppi di costruire una tassellazione utilizzando soltanto simmetria assiali sui vari lati dei triangoli. A questo punto si domanda agli studenti di osservare la configurazione ottenuta andando a ricercare il tipo di isometrie che si stabiliscono tra i vari triangoli, con particolare attenzione ad individuare possibili triangoli che si corrispondono in una glissosimmetria. In questo frangente, l'insegnante ha un ruolo attivo e sollecita i vari gruppi a lavorare in contesti "non regolari" per mezzo di triangoli scaleni disposti in maniera casuale. In questo modo, oltre ad aumentare la difficoltà nel riconoscimento dei legami esistenti tra i vari triangoli, per quanto riguarda la glissosimmetria e la ricerca di triangoli legati da tale isometria, si conduce la classe ad accettarne implicitamente la definizione più generale. Quest'ultima, a differenza di quanto previsto dall'attività precedente e dall'utilizzo della macchina matematica, viene qui definita come composizione di una traslazione e di una simmetria assiale, in

cui però l'asse di simmetria non è necessariamente parallelo alla direzione del vettore di traslazione.
L'utilizzo dei materiali previsti dalla scheda agevola la comprensione e l'apprendimento; quest'ultimo, infatti, si sviluppa a partire da dati e osservazioni empiriche e la visualizzazione degli oggetti matematici trattati e del relativo funzionamento, permette alla classe di costruire conoscenza in maniera autonoma. Le domande poste ai vari gruppi per mezzo della scheda, in aggiunta, spingono la classe a sviluppare abilità di alto livello; in particolare, la scheda prevede che si operino confronti, facendo congetture e giustificandole tramite un'opportuna argomentazione. Dunque, analogamente a quanto previsto dalla scheda analizzata nelle pagine precedente, la classe lavora sul passaggio dalle constatazioni visive alla giustificazione di queste, utilizzando le competenze apprese per dimostrare in maniera rigorosa quanto convenuto mediante l'esplorazione. La differenza con l'attività precedente è che, in questo caso, è richiesto agli studenti di fare un passo ulteriore, risolvendo problemi significativi e costruendo vere e proprie dimostrazioni formali. Inoltre, si chiede alla classe di lavorare con varie tipologie di isometrie, chiedendo agli studenti di operarne composizioni e di confrontarne gli effetti.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 1 ora
- **Spazi:** aula
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

5.3.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti e ad ogni gruppo viene fornita la scheda di lavoro. Lo svolgimento dell'attività prevede 4 fasi alle quali vengono dedicati complessivamente 60 minuti; in particolare, il tempo da dedicare alle singole fasi è a discrezione dei vari gruppi, che decideranno di soffermarsi maggiormente su certi aspetti laddove lo ritengono necessario. Il docente supervisiona il lavoro dei gruppi e interviene nel momento in cui ritiene che gli studenti stiano gestendo le tempistiche in maniera controproducente. Dei 60 minuti previsti, circa 20 vengono dedicati all'esposizione delle congetture formulate dagli studenti nel rispondere al terzo quesito, così come suggerito nelle indicazioni di cui sopra.

LA GLISSOSIMMETRIA: Risolvi problemi, argomenta e dimostra
Tassellare con le simmetrie e riconoscere le glissosimmetrie
Scheda studente (c)

1. Prendi due dei triangoli che hai ottenuto tagliando il foglio secondo le istruzioni dell'insegnante ed esegui la seguente operazione:
- Sovrapponi i due triangoli e ruota il triangolo superiore di 180° attorno al punto medio di un lato a tua scelta (cioè, effettua una simmetria centrale). Il triangolo iniziale e quello ruotato hanno un lato in comune: che figura ottieni? Perché?

- Osserva che puoi traslare la figura ottenuta in due direzioni e ottenere la griglia iniziale (quella su cui hai disegnato i triangoli). Funziona qualunque lato tu scelga per effettuare la simmetria centrale? Motiva la tua risposta.

2. Prendi ora tre triangoli:
- Colloca il secondo triangolo accanto al primo, in modo che risulti ruotato di 180° attorno al punto medio di uno dei lati, poi colloca il terzo triangolo accanto al secondo in modo che risulti ruotato di 180° attorno al punto medio di un diverso lato. Ottieni un nuovo quadrilatero: di che quadrilatero si tratta?
- Che cosa ottieni se continui a effettuare, alternandole, le stesse simmetrie centrali aggiungendo altri triangoli? Puoi fare un disegno all'interno di ciascun triangolo (anche una semplice linea, purché sia uguale per tutti i triangoli). Confronta il risultato ottenuto con il catalogo dei fregi [https://oiler.education/tales/catalogo_fregi].

3. Hai ottenuto un fregio. Adesso vuoi costruire una seconda striscia per ottenere una tassellazione. In che modo puoi costruirla? Fai delle ipotesi aiutandoti con i triangoli che hai ritagliato in precedenza. Puoi utilizzare anche il lato di colore diverso.

4. Dimostra che le due costruzioni: a) traslare la prima striscia (nella direzione del lato "obliquo" del parallelogramma), e b) eseguire la simmetria centrale rispetto al centro del terzo lato del triangolo producono la stessa striscia.

5. Prendi ora alcuni triangoli.
- A partire da un triangolo prova a costruire una tassellazione operando solo con simmetrie assiali sui vari lati. Ogni volta che si opera con una simmetria assiale il colore del triangolo viene cambiato (attenzione, non si tratta di una vera tassellazione, andando avanti alcuni triangoli potrebbero anche sovrapporsi).
- Che tipo di isometrie si stabiliscono fra i vari triangoli? Indica i triangoli della tua tassellazione con lettere e stabilisci quale trasformazione porta due dei triangoli a sovrapporsi. Individua in particolare i triangoli che si corrispondono in una glissosimmetria e dimostra che si tratta effettivamente di una glissosimmetria.

Quesito 1: eseguendo le operazioni indicate si ottiene un parallelogramma formato dal triangolo iniziale e da quello ruotato come in figura:

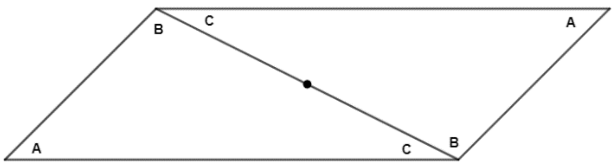


Figura 32 simmetria centrale del triangolo ABC attorno al punto medio del lato BC

I triangoli hanno lo stesso colore, in quanto nella costruzione un non subisce movimento, mentre l'altro viene ruotato di 180°. In particolare, l'orientamento dei vertici del triangolo ruotato è il medesimo di quelli del triangolo di partenza. Questo avviene perché la trasformazione coinvolta, ovvero la simmetria centrale, risulta essere un'isometria pari.
Immaginando di traslare il parallelogramma così ottenuto in due direzioni ciò che si ottiene è quanto segue:

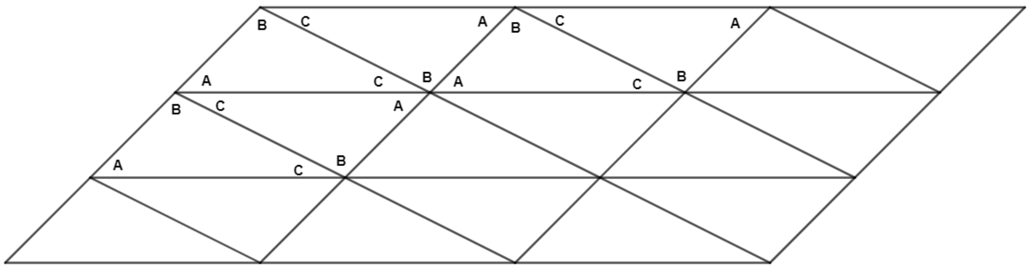


Figura 33

Ripetendo le medesime operazioni eseguendo dapprima la rotazione attorno al punto medio di AB e poi attorno a quello di AC, la figura ottenute risulta essere ancora un parallelogramma e dalla traslazione di quest'ultimo in due direzioni si ottiene quanto segue:

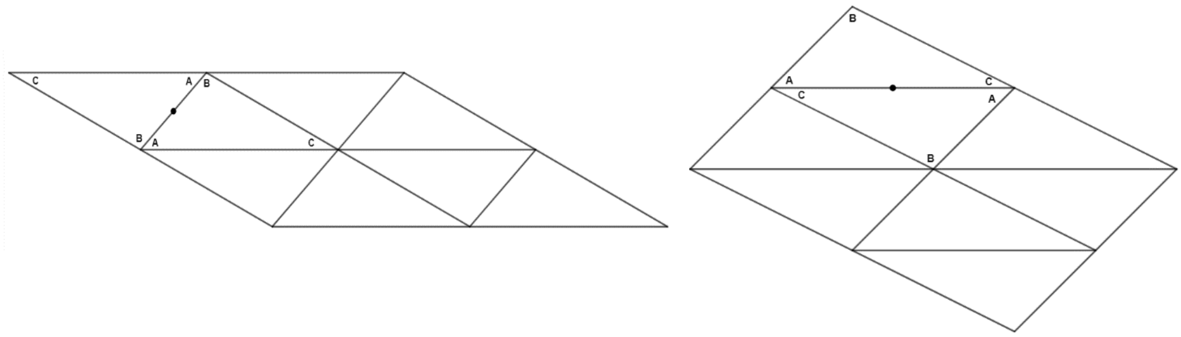


Figura 34 Rotazione attorno al punto medio di AB e traslazione in due direzioni, rotazione attorno al punto medio di AC e traslazione in due direzioni

Confrontando la figura 34 con la figura 33 si può concludere che, preso un qualunque lato del triangolo per effettuare la simmetria centrale, si ottiene la griglia iniziale con la quale sono stati costruiti i triangoli.
Quesito 2: eseguendo i movimenti indicati la figura che si ottiene è un trapezio come mostrato in figura:

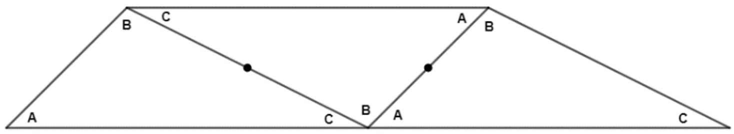


Figura 35 Simmetria centrale attorno al punto medio di BC e successiva simmetria centrale attorno al punto medio di AB

Ripetendo le azioni svolte, si ottiene un fregio. È possibile realizzare un disegno all'interno dei triangoli utilizzati per classificare più facilmente il fregio. In questo caso è necessario che il disegno sia il medesimo per ogni triangolo e ciò che si ottiene è mostrato di seguito:

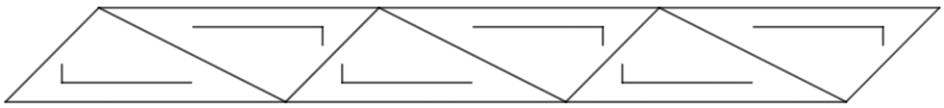


Figura 36

Il fregio ottenuto corrisponde a un "p2", in quanto il tassello di base, ovvero il parallelogramma, prevede una simmetria centrale e poi si ripete uguale a se stesso per traslazione.
Quesito 3: le modalità con cui può essere costruita la seconda striscia sono diverse, di seguito vengono analizzate tre possibilità.

1. Traslare la striscia nella direzione del lato "obliquo" del parallelogramma

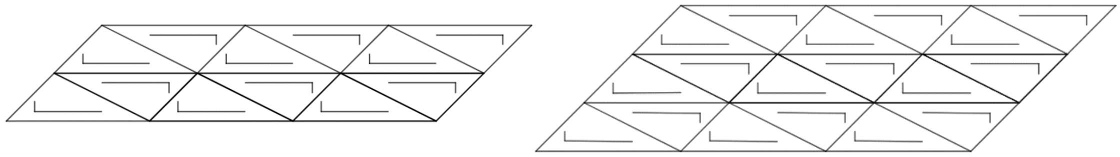


Figura 37 costruzione seconda striscia, tassellazione ottenuta

2. Eseguire una simmetria centrale rispetto al punto medio terzo lato e, a partire dal triangolo ottenuto, proseguire con la costruzione della seconda striscia in modo analogo a quanto fatto per la prima

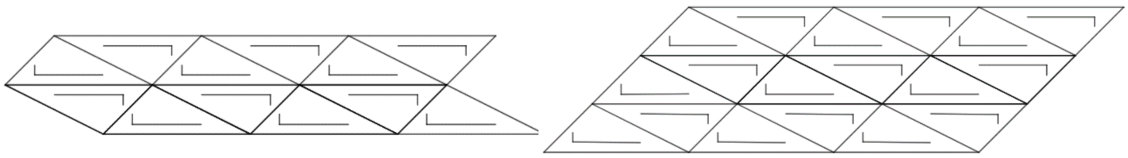


Figura 38 costruzione seconda striscia, tassellazione ottenuta

3. Costruire la seconda striscia effettuando simmetrie assiali dei triangoli della prima striscia con asse coincidente con il lato orizzontale del triangolo

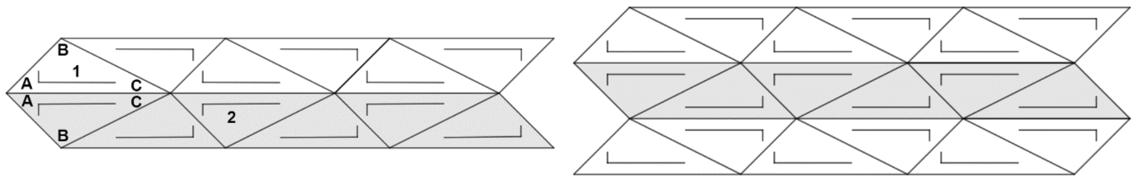


Figura 39 costruzione seconda striscia, tassellazione ottenuta

Osservando la figura 37 e la figura 38 si può concludere che la tassellazione ottenuta nei punti 1 e 2 è la medesima e corrisponde ad una "p2", in quanto il tassello, ovvero il parallelogramma, presenta una simmetria centrale e si ripete uguale a se stesso per traslazione nella direzione orizzontale e nella direzione del suo lato "obliquo".
Nel punto 3, invece, si ottiene una tassellazione diversa dalla precedente; in particolare, si tratta di una "pmg", in quanto il parallelogramma si ripete uguale a se stesso in direzione orizzontale, mentre nella direzione perpendicolare si applica anche una simmetria assiale con asse parallelo al vettore di traslazione.
Nella figura 39 è stato inoltre evidenziata la diversa colorazione dei triangoli nella seconda striscia; questo è dovuto al fatto che questi ultimi sono ottenuti effettuando simmetrie assiali dei triangoli di partenza e dunque il movimento corrispondente con i triangoli di carta è un ribaltamento. È importante, però, sottolineare che per parlare propriamente di simmetria assiale i triangoli nelle due strisce dovrebbe essere lo stesso, in quanto la colorazione deve rispettare l'isometria. Dalla figura 39 si può osservare che l'orientamento dei vertici è diverso in due

triangoli corrispondenti per simmetria assiale; in particolare se nel triangolo iniziale si leggono i vertici in senso orario (ABC), nel triangolo grigio il senso diventa antiorario. Questo è dovuto al fatto che la simmetria assiale è un'isometria dispari.
Inoltre, è possibile affermare che la relazione che lega i triangoli 1 e 2 è una glissosimmetria; infatti, il triangolo 2 risulta dalla composizione di una simmetria assiale con asse corrispondente al lato orizzontale del triangolo di partenza e di una traslazione in direzione orizzontale.
Quesito 4: per dimostrare che le due costruzioni producono la stessa striscia è necessario dapprima dimostrare che la composizione di due simmetrie centrali con centri O e O' equivale a una traslazione di vettore parallelo al segmento $\overline{OO'}$. Per farlo viene fatto riferimento alla figura riportata di seguito:

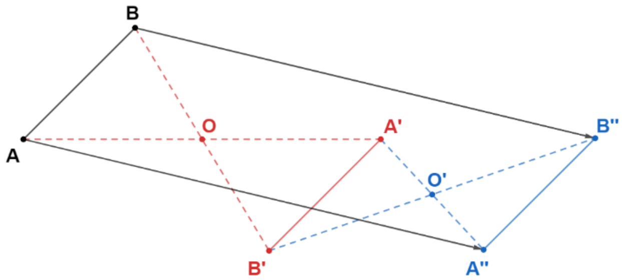


Figura 40

In essa sono stati disegnati dapprima il corrispondente di AB nella simmetria di centro O e successivamente il corrispondente di $A'B'$ nella simmetria di centro O'.
Dal momento che le simmetrie centrali conservano le distanze e le direzioni, trattandosi di rotazioni di 180°, si può affermare che $AB \cong A'B'$ e che $A'B' \cong A''B''$, di conseguenza $AB \cong A''B''$. Inoltre, $AB||A'B'$ e $A'B'||A''B''$, dunque $AB||A''B''$.
Quindi $AA''B''B$ è un parallelogramma e $AA'' \cong BB''$, $AA''||BB''$. Da ciò si può dedurre che $A''B''$ è il corrispondente di AB nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$.
Resta dunque da provare il parallelismo tra il vettore di traslazione e il segmento congiungente i centri delle simmetrie centrali. In particolare, per le proprietà della simmetria centrale, O è il punto medio di AA' e O' è il punto medio di $A'A''$.
Il teorema dei punti medi afferma che il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato. Applicando tale teorema al triangolo $AA'A''$, si può concludere che AA' è parallelo ad AA'', concludendo la dimostrazione.
A questo punto risulta semplice dimostrare l'equivalenza delle due costruzioni che conducono alla tassellazione seguente:

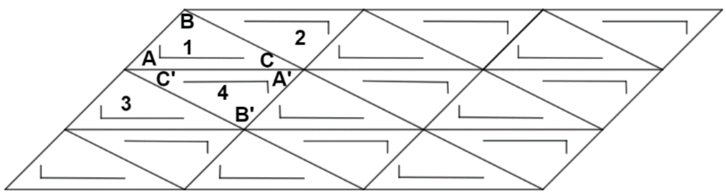


Figura 41

Facendo riferimento alla figura 41, vengono esaminate le isometrie coinvolte nei due casi:

- prima costruzione → il triangolo 3 è ottenuto dal triangolo 1 per traslazione di un vettore parallelo al lato "obliquo" del parallelogramma
- seconda costruzione → il triangolo 3 è ottenuto dal triangolo 1 tramite la composizione di due simmetrie centrali, una con centro nel punto medio di AC, che manda il triangolo 1 nel triangolo 4 e una con centro nel punto medio di $B'C'$, che manda il triangolo 4 nel triangolo 3

Per il teorema dei punti medi si può concludere che il segmento che congiunge i centri delle due simmetrie centrali è parallelo al lato "obliquo" del parallelogramma. Quindi, per quanto dimostrato precedentemente si può concludere che le due costruzioni sono equivalenti.
Si potrebbe fare un analogo discorso per i triangoli 2 e 4. In questo caso, la situazione è la seguente:

- prima costruzione → il triangolo 4 è ottenuto da 2 per traslazione di un vettore parallelo al lato "obliquo" del parallelogramma
- seconda costruzione → il triangolo 4 è ottenuto dal triangolo 1 per simmetria centrale con centro nel punto medio di AC.
  A sua volta, però, per come è stata costruita la prima striscia, il triangolo 1 è ottenuto dal triangolo 2 per simmetria centrale di quest'ultimo attorno al punto medio di BC

Per il teorema dei punti medi il segmento congiungente i punti medi di AC e BC è parallelo al lato "obliquo" del parallelogramma. Si può quindi concludere che anche in questo caso le due costruzioni sono equivalenti.
Quesito 5: eseguendo successive simmetrie assiali le figure che si possono ottenere sono molteplici. Di seguito viene riportato un caso particolare, preso in maniera tale che la figura ottenuta risulti essere il meno possibile regolare.

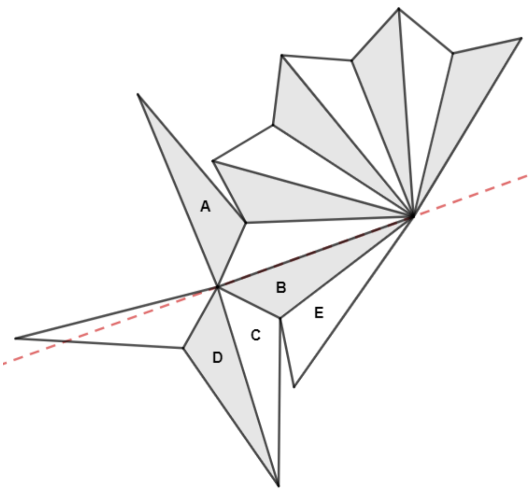


Figura 42

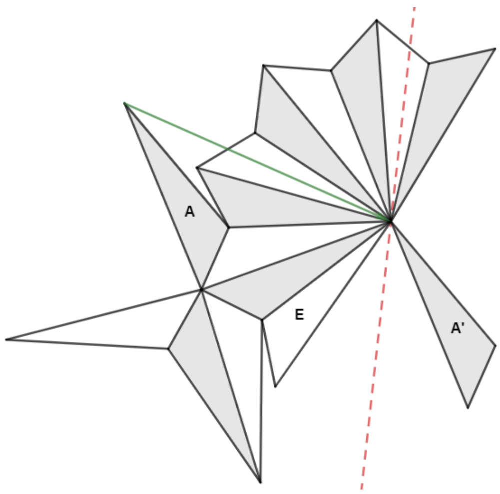


Figura 43

Osservando le figure è possibile affermare che:

- tra i triangoli A e B c'è una rotazione, così come tra i triangoli B e D e i triangoli A e D
- tra i triangoli A e C è presente una simmetria assiale, con asse rappresentato dalla retta rossa tratteggiata in figura 42
- tra i triangoli A ed E c'è una glissosimmetria; in particolare, essa è costituita dalla composizione di una traslazione rispetto al vettore indicato dalla freccia verde nella

figura 43, che manda A in A', e di una simmetria assiale avente asse corrispondente alla retta rossa tratteggiata in figura 43, che manda A' in E.

CAPITOLO 6

COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE

6.1 Introduzione

La composizione di isometrie è un argomento che normalmente viene affrontato nelle scuole una volta introdotte le isometrie singolarmente. Solitamente tale tema viene introdotto in classe per mezzo di lezioni frontali, nel corso delle quali vengono presentati agli studenti alcuni esempi di composizioni di isometrie. In questo frangente, nei libri di testo, che rappresentano il principale strumento di riferimento dei docenti che espongono l'argomento alla classe, viene dapprima richiamato il concetto di composizione di funzioni relativamente alle trasformazioni per mezzo della seguente definizione:

> "Si chiama trasformazione composta di una prima trasformazione f e di una seconda trasformazione g, la trasformazione, indicata con il simbolo $g \circ f$, cha fa corrispondere a ogni punto P del piano il punto P'', ottenuto determinando dapprima l'immagine P' di P nella f e poi l'immagine P'' di P' nella g." (Sasso, 2013, p. 231)

All'interno di tale dicitura gli elementi matematici coinvolti sono diversi; in particolare, si fa riferimento al concetto di funzione e al relativo significato di immagine di una funzione. Questi ultimi vengono sovente concepiti dagli studenti come oggetti matematici del tutto astratti e la costruzione di significati riguardo a tali concetti risulta essere piuttosto delicata. Dunque, il fatto di richiamare questo tipo di oggetti nell'introdurre la composizione di trasformazioni in classe da un lato rende la trattazione formale e apparentemente lontana dalla realtà, dall'altro si corre il rischio che la composizione di trasformazioni venga concepita dagli studenti come qualcosa che esiste solo nel piano, che è il principale ambiente in cui gli studenti lavorano con il concetto di funzione.

Le attività progettate, invece, prevedono che gli studenti esplorino autonomamente la composizione di diverse isometrie, analizzando vari casi e giungendo in maniera autonoma e per mezzo della sperimentazione diretta alla costruzione di conoscenza e competenza sull'argomento. Inoltre, all'interno delle schede, le modalità con cui gli studenti vengono in contatto con i saperi coinvolti sono diverse; in particolare, viene offerta agli studenti la possibilità di lavorare con le trasformazioni e le relative composizioni nel piano, ma anche nello spazio e in ambiente reale, per esempio mediante l'utilizzo di specchi e l'osservazione concreta di oggetti a cui vengono applicate isometrie. In questo senso, le attività proposte si svincolano fortemente dalle modalità con cui usualmente si introduce questo tipo di argomento in classe e prevedono che gli studenti svolgano un percorso di scoperta ed esplorazione che culmina con l'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti.

La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura", si intitola *"Alla scoperta della composizione di isometrie"* e in essa vengono affrontate alcune delle principali composizioni che coinvolgono le simmetrie del piano. In particolare, si lavora dapprima con le composizioni di simmetrie assiali, rotazioni e traslazioni, lasciando agli studenti la possibilità di esplorare

liberamente la situazione con GeoGebra e di analizzare i vari casi in maniera autonoma. In un secondo momento, vengono analizzati fregi e tassellazioni che coinvolgono diverse isometrie e loro composizioni, in modo da avvicinare l'argomento trattato alla realtà.
La seconda attività, relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", è stata intitolata *"La composizione di isometrie con il software Wallpaper Symmetry"* e ha lo scopo di far lavorare la classe con le tassellazioni del piano e di condurre gli studenti ad una classificazione completa e il più possibile formale dei 17 gruppi di isometrie possibili.
La terza attività, relativa al campo "risolvi problemi, argomenta e dimostra", si intitola *"Problem solving sulla classificazione di tassellazioni presenti nel mondo reale e relative argomentazioni"*. In questo frangente, gli studenti sono chiamati a riprodurre e classificare una serie di tassellazioni realmente esistenti, come ad esempio pavimentazioni, decorazioni, quadri. In questo modo, gli studenti lavorano concretamente con le isometrie del piano e le relative composizioni, facendone esperienza nel tentativo di riconoscere e replicare un possibile tassello base per poi disporlo correttamente all'interno di una griglia.

6.2 Alla scoperta della composizione di isometrie

6.2.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione delle principali composizioni di isometrie e costruzione di fregi e tassellazioni

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** GeoGebra 5, GeoGebra Classroom, foglio di carta, matita, righello

- **Prerequisiti:**
    - conoscenza degli strumenti di base del software GeoGebra
    - conoscenza delle principali isometrie del piano e delle loro caratteristiche (simmetrie assiali, rotazioni, traslazioni e simmetrie centrali)
    - riconoscimento di isometrie nel piano
    - saper realizzare le principali isometrie del piano utilizzando artefatti manipolativi (piegatura di un foglio di carta), riga e compasso e GeoGebra

- **Obiettivi:**
    - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alla composizione di due o più simmetrie
    - stabilire il ruolo delle simmetrie assiali nella generazione di isometrie
    - costruire conoscenza completa riguardo al concetto di fregio e ai 7 gruppi di isometrie possibili
    - costruire conoscenza completa riguardo al concetto di tassellazione del piano e ai 17 gruppi di isometrie possibili

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in tre fasi, in cui è previsto che dapprima gli studenti esplorino con carta e penna la situazione proposta e in un secondo momento si procede con l'utilizzo del software GeoGebra, per mezzo del quale la classe osserva le costruzioni al fine di elaborare congetture utili al proseguimento dell'attività.
  È previsto che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti sulle schede proposte e le varie fasi di lavoro prevedono che la classe argomenti e giustifichi le ipotesi fatte nella fase esplorativa. Inoltre, il docente guida gli studenti a riflettere sulle azioni svolte e sui risultati ottenuti conducendo la classe all'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti.
  Nella fase 1 gli studenti lavorano su otto schede, in ognuna delle quali viene introdotta una particolare composizione di isometrie. Nel dettaglio, nelle schede 1 e 2 i gruppi esplorano la composizione di due simmetrie assiali; dapprima nel caso in cui gli assi sono paralleli e in seguito con assi incidenti. Nelle schede 3 e 4 i gruppi lavorano rispettivamente con la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro e con la composizione di due simmetrie centrali.
  La scheda 5 è dedicata alla glissosimmetria; nel caso in cui la classe abbia precedentemente svolto le attività riguardo a tale argomento, questa scheda offre uno spunto per richiamare le conoscenze acquisite nel corso delle suddette attività. Il docente potrebbe dunque decidere di dedicare minor tempo a tale scheda rispetto a quello previsto. In caso contrario, l'insegnante può decidere di utilizzare le suddette attività come approfondimento della presente scheda da svolgere in classe congiuntamente ad essa.
  Le schede 6, 7 e 8 sono state elaborate perché gli studenti esplorino alcuni casi di composizione di tre simmetrie assiali. L'obiettivo ultimo è quello di guidare la classe a riflettere su un'importante proprietà che riguarda il ruolo delle simmetrie assiali nella composizione di isometrie, conducendo i gruppi alla constatazione finale che ogni isometria è la composizione di al più tre simmetrie assiali.
  In ognuna delle schede il punto di partenza è il software GeoGebra tramite il quale i gruppi realizzano una costruzione seguendo le indicazioni presenti all'interno delle varie schede. In questo frangente, il docente monitora le azioni svolte dai vari gruppi e verifica la correttezza nell'esecuzione dei comandi necessari, ponendo particolare attenzione all'ordine degli strumenti utilizzati. Si suggerisce di fornire agli studenti un foglio di carta permettendo loro di utilizzarlo in una iniziale fase di esplorazione; in particolare, nel caso in cui la classe non avesse molta esperienza con l'utilizzo di GeoGebra, l'osservazione della situazione per mezzo del foglio rappresenta un valido ausilio al fine di individuare relazioni necessarie per il proseguimento dell'attività.
  I quesiti proposti nelle schede mirano a guidare gli studenti nel corso dell'esplorazione, spingendo i gruppi a mettere in luce determinate relazioni utili all'elaborazione di congetture. Nelle schede viene inoltre richiesto di giustificare le osservazioni fatte passo a passo; in questo modo gli studenti hanno modo di ripercorrere quanto svolto durante l'attività e ciò offre loro un'occasione per riflettere sulle conclusioni a cui sono giunti autonomamente mediante l'esplorazione. In questo frangente, l'analisi dei risultati ottenuti per mezzo dell'osservazione con il software permette agli studenti di autovalutare il lavoro svolto, andando a ricercare eventuali errori o imprecisioni.

Il ruolo del docente è attivo e il suo compito è quello di osservare attentamente lo stato di avanzamento del lavoro di ogni gruppo. In particolare, nel caso in cui gli studenti non riescano ad esplorare autonomamente la costruzione o se si dovessero presentare situazioni di stallo, l'insegnante interviene ponendo domande mirate e dando suggerimenti specifici. È importante, però, che il docente non fornisca mai agli studenti le risposte corrette; lo scopo ultimo delle attività, infatti, è che siano gli studenti in prima persona a costruire la propria conoscenza.
Nella fase 2 si lavora con le decorazioni lineari e, in un primo momento, si chiede ai gruppi di analizzare e classificare una serie di fregi individuando le isometrie coinvolte. In questo frangente, non sono previste schede da fornire agli studenti, ma verranno proiettati i vari fregi alla LIM. Per quanto riguarda la scelta di questi ultimi, nel caso in cui la classe non abbia svolto l'attività relativa al campo "scopri, classifica e generalizza" o quella relativa al campo "risolvi problemi, argomenta e dimostra" sulla traslazione, l'insegnante può decidere di utilizzare i fregi proposti nelle suddette schede. In alternativa, sarà l'insegnante a decidere di ricercare fregi su libri di testo o sul web da proporre alla classe per la classificazione.
Al termine dell'analisi svolta dai gruppi in un clima costruttivo e di confronto collaborativo, il docente istituzionalizza il fatto che le isometrie coinvolte in una decorazione lineare sono traslazioni di un "modulo", ottenuto per composizione di determinate isometrie. A questo punto si chiede agli studenti di scegliere un poligono, da disegnare su GeoGebra, e a partire da quest'ultimo creare un fregio esplicitando le isometrie utilizzate. In questo frangente, si suggerisce di far scegliere poligoni diversi ai vari gruppi e che non possiedano particolari simmetrie, in modo tale che ogni gruppo lavori in maniera autonoma sulla realizzazione di un particolare fregio.
Al termine della costruzione il docente guida la classe in una discussione collettiva, in cui ogni gruppo presenta alla classe il proprio fregio. L'insegnante orchestra la discussione e conduce la classe a porre attenzione sugli elementi comuni presenti nelle diverse decorazioni presentate. Questo tipo di approccio spinge gli studenti a riflettere sui fregi differenti che si possono ottenere mediante le stesse isometrie o composizioni di isometrie. In questo modo, il docente guida gli studenti in una fase di verbalizzazione collettiva che conduce alla determinazione dei 7 gruppi di simmetria dei fregi.
Nella fase 3 i gruppi lavorano sulle tassellazioni del piano mediante l'analisi di immagini artistiche e del mondo reale; in questo modo gli studenti hanno modo di sperimentare e operare con i saperi coinvolti in un ambito non prettamente matematico. In particolare, nella scheda 9 si chiede ai vari gruppi di elaborare congetture riguardo alla possibilità di creare tassellazioni con diversi tipi di poligoni regolari. Mediante l'utilizzo di una tabella si conduce la classe ad una generalizzazione delle ipotesi fatte, mettendo in luce la condizione che un poligono deve soddisfare al fine di rendere possibile la tassellazione di un piano. In questo frangente, il docente fornisce ai gruppi suggerimenti laddove lo ritiene necessario e spinge gli studenti a riflettere e ragionare sulle supposizioni fatte.
Nella scheda 10 gli studenti lavorano con la somma di vettori; tale attività fornisce un ausilio per lo svolgimento delle ultime due schede. In queste ultime, viene chiesto agli studenti di creare tassellazioni utilizzando triangoli e quadrilateri non intrecciati

qualunque utilizzando una simmetria centrale e due traslazioni ottenute analogamente a quanto svolto nella scheda 10. In questo frangente, da un lato la manipolazione e l'osservazione permessa dall'utilizzo del software GeoGebra hanno un ruolo centrale nel riconoscimento dell'importanza delle isometrie e delle composizioni nella realizzazione di una tassellazione del piano. Dall'altro, l'argomentazione e la giustificazione delle ipotesi richiesta dai quesiti conduce la classe all'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti guidata dal docente.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 6 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

6.2.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività è suddivisa in tre fasi e prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti. La fase 1 prevede che ai gruppi vengano fornite otto schede che vengono consegnate ai gruppi una alla volta. Ad ogni scheda è previsto che vengano dedicati 20 minuti.

LA COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE: Esplora e congettura
Alla scoperta della composizione di isometrie
Scheda studente 1(a): composizione di due simmetrie assiali

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna con Geogebra un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono* e una retta r (esterna) ad ABC con lo strumento *Retta*.
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale* disegna il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Disegna ora un'altra retta s (esterna ad ABC)
- Disegna il triangolo A''B''C'' simmetrico di A'B'C' rispetto alla retta s utilizzando il comando *Simmetria assiale*

Che relazione deve esserci tra r ed s affinché il triangolo A''B''C'' sia il traslato del triangolo ABC?

Perché?

Possibile suggerimento:
- disegna il vettore $\vec{v}$ da A ad A'';
- disegna il triangolo $A'_1B'_1C'_1$ traslato di ABC rispetto al vettore $\vec{v}$;
- colora il triangolo $A'_1B'_1C'_1$ di verde;
- muovi le rette r ed s in modo da far coincidere i due triangoli A''B''C'' e $A'_1B'_1C'_1$.

Che cosa osservi?

Come sono le due rette?

Verifica la tua congettura ripercorrendo la costruzione considerando le rette r ed s già nella relazione che hai individuato oppure analizza il file GeoGebra allegato.

Quindi, eseguire due simmetrie assiali con assi ________________ è equivalente a fare ________________ in quanto ____
____

Qual è la lunghezza del vettore di traslazione rispetto alla distanza tra i due assi di simmetria (puoi aiutarti facendo esplorazioni con GeoGebra)?

Perché?

Eseguendo la costruzione indicata nella scheda e spostando le rette r ed s affinché il triangolo $A''B''C''$ sia il traslato del triangolo ABC si ottiene la seguente configurazione:

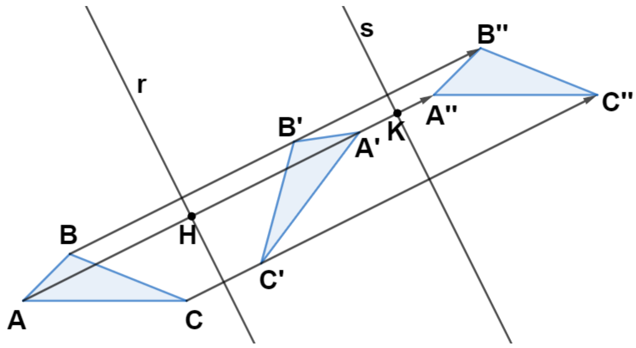


Figura 44

Si può dunque concludere che la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore avente direzione perpendicolare agli assi, con verso dal primo al secondo asse e modulo uguale al doppio della distanza tra gli assi.
Per giustificare la validità di tale asserzione si lavora su un lato dei tre triangoli, ma un discorso analogo vale per i lati rimanenti. In particolare, per come è stata costruita la configurazione, il lato $A'B'$ è il simmetrico di AB rispetto alla retta r, mentre $A''B''$ è il simmetrico di $A'B'$ rispetto ad s. Da ciò, dato che il segmento congiungente due punti corrispondenti in una simmetria assiale è perpendicolare all'asse, si può affermare che:

1. $AA' \perp r$
2. $A'A'' \perp s$
3. $BB' \perp r$
4. $B'B'' \perp s$

AA' e $A'A''$, dato che $r||s$ e per le considerazioni 1 e 2, sono paralleli tra loro e, dato che hanno un punto in comune, giacciono sulla stessa retta. Un analogo discorso vale per BB' e $B'B''$ utilizzando le considerazioni 3 e 4. Dunque, si può concludere che $AA''||BB''$, in quanto segmenti perpendicolari alla medesima retta r (o s).

Inoltre, dato che punti corrispondenti in una simmetria assiale sono equidistanti dall'asse, $AH \cong HA'$ e $A'K \cong KA''$. Da ciò si può dedurre che $AA'' = AH + HA' + A'K + KA'' = 2HA' + 2A'K = 2HK$. Analogamente, si può concludere che $BB'' \cong 2HK$, dunque $AA'' \cong BB''$.
Quindi $AA''B''B$ è un parallelogramma e da ciò si può dedurre che $A''B''$ è il traslato di AB mediante il vettore $\overrightarrow{AA''}$. Quest'ultimo, per quanto affermato in precedenza, ha direzione perpendicolare agli assi r ed s, verso dal primo al secondo asse e modulo pari a $2HK$, ovvero il doppio della distanza tra gli assi.
È possibile ripetere i passaggi utilizzando gli altri due lati, con concludendo che $B''C''$ è il traslato di BC mediante il vettore $\overrightarrow{BB''}$, che per quanto affermato precedentemente corrisponde con il vettore $\overrightarrow{AA''}$, e infine che $A''C''$ è il traslato di AC mediante il vettore $\overrightarrow{AA''}$. Quindi, il triangolo $A''B''C''$ è il traslato di ABC mediante il vettore $\overrightarrow{AA''}$.
A questo punto il docente fornisce agli studenti la scheda 2.

Scheda studente 2(a): composizione di due simmetrie assiali

Cosa accade se invece di due assi paralleli consideri due assi incidenti?

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono* e le rette r ed s, esterne al triangolo, incidenti in un punto O, con lo strumento *Retta.*
- Individua, utilizzando il comando *Intersezione*, il punto O in cui r ed s si incontrano.
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale* disegna il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Disegna il triangolo A''B''C'' simmetrico di A'B'C' rispetto alla retta s.

In che relazione sono i triangoli ABC e A''B''C''?

Riesci a trovare una sola isometria che trasforma ABC in A''B''C''? Se sì, quale?

Suggerimento:
- Traccia la circonferenza di centro O e passante per A. Che cosa osservi?
- Considera la circonferenza di centro O e passante per B. Che cosa osservi?

Quindi:
con due simmetrie assiali con assi ____________________si riesce a fare una ___________________________.

Quanto misura l'angolo di rotazione del triangolo rispetto all'angolo formato dai due assi di simmetria (puoi aiutarti facendo misurazioni con GeoGebra)?

Perché?

- Muovi le rette r ed s in modo che l'angolo da esse formato sia di 90°. Cosa osservi?
Che tipo di isometria ottieni?

Eseguendo le due simmetrie assiali e seguendo i suggerimenti forniti all'interno della scheda, si ottiene la seguente figura:

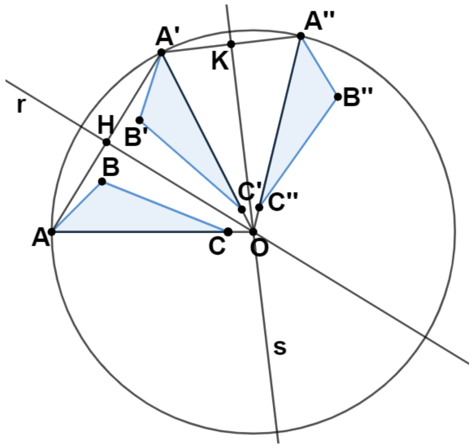


Figura 45

La relazione che lega i triangoli ABC e $A''B''C''$ è una rotazione con centro nel punto di intersezione degli assi di simmetria.
Per verificare tale congettura è necessario lavorare su un vertice dei triangoli, mostrando che A' è il corrispondente di A mediante una rotazione con centro nel punto di incidenza dei due assi e angolo pari al doppio dell'angolo formato tra di essi, e successivamente estendere il discorso ai rimanenti vertici. In particolare, dal momento che A' è il simmetrico di A rispetto ad r e le simmetrie assiali conservano le distanze, si può dedurre che $OA \cong OA'$. Analogamente, estendendo il ragionamento ai punti simmetrici A' e A'', si può concludere che $OA' \cong OA''$ e quindi che $OA \cong OA''$.
Inoltre, per le considerazioni fatte il triangolo AOA' risulta essere isoscele e per la perpendicolarità del segmento congiungente i punti simmetrici A e A' con l'asse r, OH è l'altezza di tale triangolo. Quest'ultima corrisponde con la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}A'$ e dunque $A\hat{O}H \cong H\hat{O}A'$. Ragionando analogamente sul triangolo $A'OA''$ si può dedurre che $A'\hat{O}K \cong K\hat{O}A''$.
L'ampiezza dell'angolo di rotazione è pari a $A\hat{O}H + H\hat{O}A' + A'\hat{O}K + K\hat{O}A'' = 2H\hat{O}A' + 2A'\hat{O}K = 2H\hat{O}K$.
Analogamente vale per le coppie di vertici B e B'' e C e C'', dunque si può concludere che il triangolo $A''B''C''$ è ottenuto dal triangolo ABC mediante una rotazione con centro nel punto di intersezione dei due assi e angolo di ampiezza pari al doppio dell'ampiezza dell'angolo formato dagli assi.
Nel caso in cui l'angolo formato dagli assi sia di 90° la situazione è la seguente:

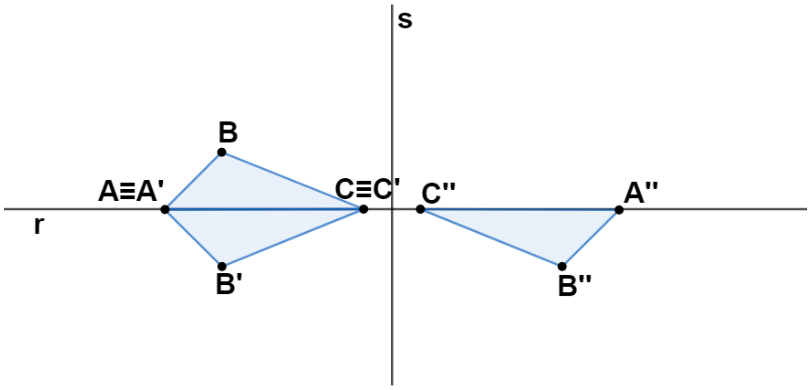


Figura 46

In questo caso, per quanto affermato in precedenza, il triangolo $A''B''C''$ è ottenuto dal triangolo ABC per mezzo di una rotazione con centro nell'intersezione degli assi con angolo di ampiezza pari a 180°. L'isometria che lega i suddetti triangoli è dunque una simmetria centrale. A questo punto si procede con la consegna della scheda 3.

Scheda studente 3(a): composizione di due rotazioni con lo stesso centro di rotazione

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un quadrilatero ABCD utilizzando lo strumento *Poligono*
- Crea 3 *slider* α, β, γ con lo strumento *Slider* e posizionali sulla destra della vista grafica, uno sotto l'altro
- Disegna con lo strumento *Punto* un punto O che sarà il centro di rotazione
- Con lo strumento *Rotazione* ruota il quadrilatero ABCD rispetto al centro O dell'angolo α° in senso orario; ottieni la figura trasformata A'B'C'D'
- Ruota la figura A'B'C'D' rispetto al centro O dell'angolo β° in senso orario; ottieni il poligono finale A''B''C''D''.

In che relazione sono i quadrilateri ABCD e A''B''C''D''?

Qual è l'isometria che trasforma ABCD in A''B''C''D''?

Suggerimento: file *Iso_a_Scheda3_1.ggb*
- Ruota ABCD rispetto al centro O dell'angolo γ° in senso orario. Colora la figura di blu con opacità massima
- Muovi lo slider γ finchè la figura ABCD si sovrappone ad A''B''C''D''.

Quindi:
- due rotazioni rispetto ad uno stesso centro di rotazione e nello stesso verso sono equivalenti a
- se le rotazioni sono una in un verso orario e una antiorario che cosa succede?

Prova con un esempio.
Se α=60° e β=75° ottieni ________________________________ γ=
Se α=60° e β= -75° ottieni ________________________________ γ=

Eseguendo le indicazioni della scheda ed utilizzando l'esempio proposto ciò che si ottiene è la seguente costruzione:

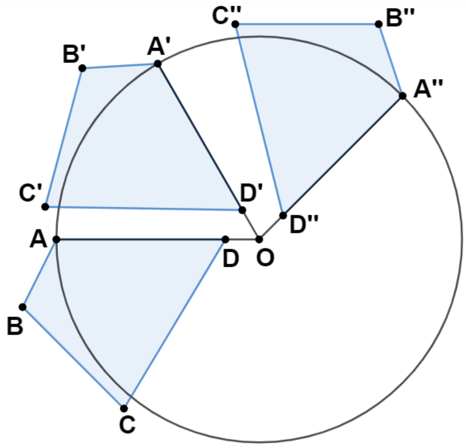


Figura 47

Il quadrilatero $A''B''C''D''$ si ottiene dal quadrilatero $ABCD$ per mezzo di una rotazione di centro O e angolo di ampiezza $\alpha + \beta$. Per verificare tale affermazione è sufficiente osservare che $OA \cong OA'$ e $OA' \cong OA''$, in quanto le rotazioni conservano le distanze. Dunque, si può dedurre che $OA \cong OA''$. Inoltre, si può osservare che $A\hat{O}A'' = A\hat{O}A' + A'\hat{O}A'' = \alpha + \beta$.
Per completare la verifica è sufficiente estendere il discorso ad ognuno dei vertici del quadrilatero.
Terminata la scheda 3, si procede con la scheda 4.

Scheda studente 4(a): composizione di due simmetrie centrali

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna con lo strumento *Poligono* il triangolo ABC e due punti O e O' con lo strumento *Punto*.
- Con lo strumento *Simmetria centrale* disegna il simmetrico di ABC rispetto al punto O; ottieni il triangolo A'B'C'.
- Ripeti ora la stessa trasformazione sul triangolo A'B'C' rispetto al punto O'. Ottieni il triangolo A''B''C''.

Riesci a ottenere il triangolo A''B''C'' con una sola trasformazione partendo da ABC?

Se sì, di che trasformazione si tratta?

Quindi, eseguire due simmetrie centrali con centri diversi è equivalente ad effettuare _______

Approfondimento
Nella scheda 2 hai osservato che è possibile ottenere una simmetria centrale componendo due simmetrie assiali con una qualunque coppia di rette perpendicolari incidenti nel centro di simmetria.

Quindi, due simmetrie centrali le puoi realizzare con

___

Prova a realizzare con GeoGebra la composizione delle due simmetrie centrali appena costruite utilizzando solo simmetrie assiali. Che cosa noti?

La costruzione che risulta componendo le due simmetrie centrali aventi centri rispettivamente in O e O' è la seguente:

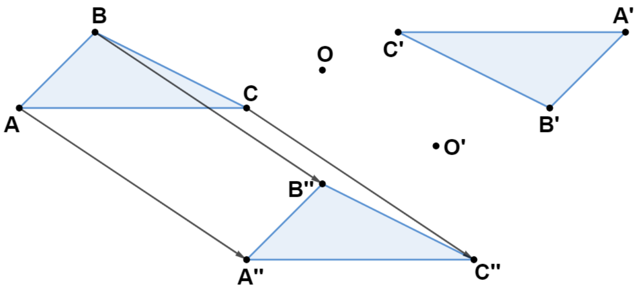


Figura 48

La trasformazione che permette di ottenere il triangolo $A''B''C''$ partendo da ABC è una traslazione. In particolare, lavorando su un lato dei triangoli si può dimostrare[1] la validità di tale affermazione e che il vettore di traslazione è parallelo ed equiverso a $\overrightarrow{OO'}$ e ha modulo pari al doppio di $\overrightarrow{OO'}$. Per completare la verifica è sufficiente estendere i ragionamenti fatti agli altri lati dei triangoli.

Utilizzando le osservazioni fatte nelle schede precedenti è possibile affermare che due simmetrie centrali si possono realizzare componendo due coppie di simmetrie assiali aventi assi perpendicolari, dunque componendo 4 simmetrie assiali. Per individuare le coppie di assi necessari a realizzare la composizione di simmetrie centrali appena costruita, è sufficiente ricordare che il centro della simmetria centrale deve corrispondere al punto di intersezione degli assi e si scelgono dunque coppie di rette perpendicolari e incidenti rispettivamente in O e O' ottenendo la seguente configurazione:

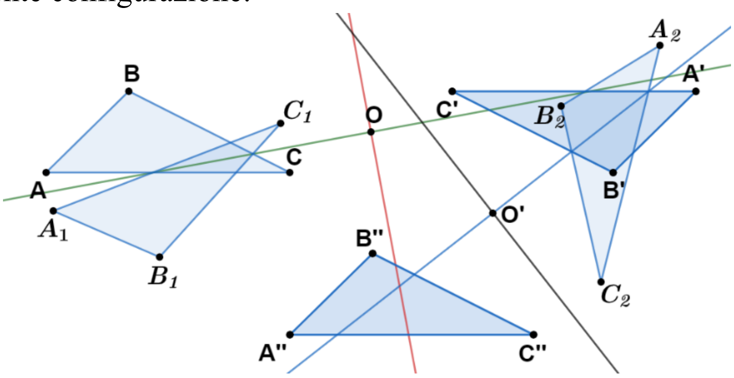


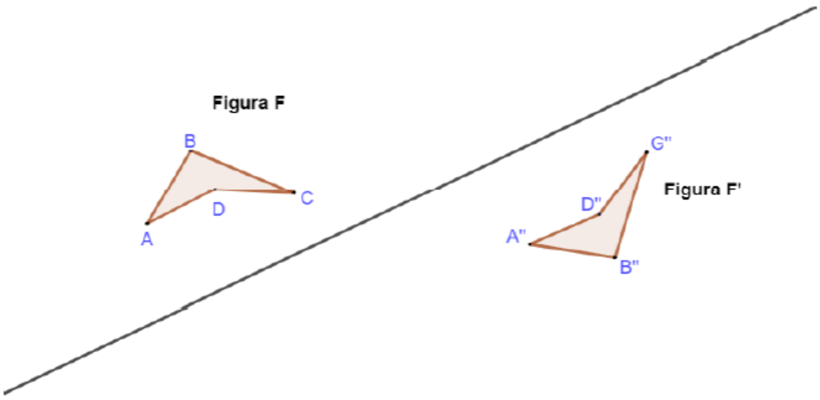
Figura 49

[1] Per la dimostrazione della proprietà enunciata si veda a pag. 111

Partendo dal triangolo ABC si esegue dapprima la simmetria rispetto alla retta verde e si ottiene $A_1B_1C_1$. A questo punto si cerca il corrisponde $A'B'C'$ mediante la simmetria rispetto alla retta rossa. Ora, partendo da quest'ultimo triangolo si esegue la simmetria rispetto alla retta blu e si ottiene $A_2B_2C_2$, dal quale, operando l'ultima simmetria rispetto alla retta nera, si ottiene $A''B''C''$.
Nella scheda 5 la classe lavora con il concetto di glissosimmetria.

Scheda studente 5(a): glisso-simmetria

Osserva questa figura:



Come puoi passare dalla figura iniziale F a quella finale F' con solo due isometrie?

La composizione di queste due isometrie si chiama **glisso-simmetria**
La glisso-simmetria si ottiene quindi componendo una ________________________________
con una ____

Quale relazione lega le due isometrie che vengono composte per realizzare la glisso-simmetria?

Osserva questa immagine. Cosa osservi?

La figura F' si può ottenere dalla figura F operando dapprima una simmetria assiale rispetto alla retta nera e successivamente eseguendo una traslazione della figura così ottenuta. Il vettore mediante il quale si opera la traslazione ha direzione parallela all'asse di simmetria.
Si procede, a questo punto, con la consegna della scheda 6.

Scheda studente 6(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano), assi paralleli

Fino ad ora hai visto la simmetria assiale, la rotazione (con il caso particolare della simmetria centrale), la traslazione e alcune loro composizioni.

Componendo due simmetrie assiali si ottiene una ______________________________oppure una ____

Esistono altre isometrie del piano? Ad esempio, cosa succede se componiamo 3 simmetrie assiali?

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Considera 3 simmetrie assiali con assi r, s, t.

- Disegna con lo strumento *Poligono* un triangolo ABC
- Disegna con lo strumento *Retta* tre rette r, s, t parallele tra loro
- Con lo strumento *Simmetria assiale* traccia il simmetrico di ABC rispetto alla retta r, poi il simmetrico A'B'C' del triangolo che hai ottenuto rispetto alla retta s e poi il simmetrico A''B''C'' dell'ultimo triangolo rispetto alla retta t.

Che cosa osservi?

Suggerimento:
Qual è la relazione tra ABC e A''B''C''?
- Traccia eventualmente l'asse del segmento AA''

Che tipo di isometria ti permette di trasformare ABC in A''B''C''?

Quali sono gli elementi utili per definire questa isometria?

Quindi, componendo tre simmetrie assiali con assi paralleli, ottengo

Eseguendo le tre simmetrie assiali aventi assi paralleli, ciò che si ottiene è la seguente configurazione:

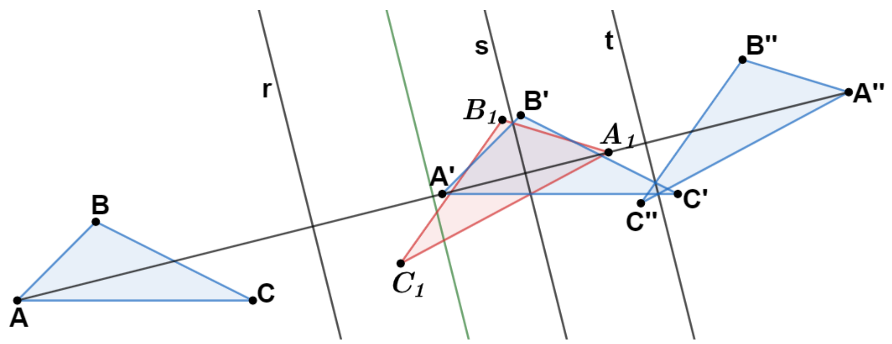


Figura 50

Osservando la figura 50 è possibile intuire che l'isometria che permette di trasformare il triangolo ABC in $A''B''C''$ è una simmetria assiale. Per individuare l'asse di quest'ultima trasformazione è sufficiente dapprima tracciare il segmento che congiunge A con A''. A questo punto, è noto che l'asse di simmetria cercato deve essere perpendicolare al segmento suddetto e passante per il suo punto medio. Quindi, si può concludere che l'asse di simmetria della simmetria assiale che trasforma ABC in $A''B''C''$ corrisponde con l'asse del segmento AA'' (retta verde in figura 50).
A questo punto si procede con la scheda 7.

Scheda studente 7(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano) assi incidenti (caso 1)

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Disegna le rette r, s perpendicolari a una retta t

- Con lo strumento *Poligono* disegna un quadrilatero convesso ABCD che non presenti simmetrie (inserisci le lettere in modo antiorario)
- Con lo strumento *Simmetria assiale* esegui in successione la simmetria rispetto alla retta r, alla retta s. Ottieni il poligono trasformato A''B''C''D''.
- Con lo strumento *Simmetria assiale* esegui la simmetria rispetto alla retta t.
Ottieni il poligono trasformato A'''B'''C'''D'''.

Riesci a ottenere A'''B'''C'''D''' da ABCD con una sola isometria (del menu standard di GeoGebra)?

- Noti qualche analogia con un'altra isometria? Se sì, quale?
Quindi la glissosimmetria si ottiene componendo una ____________________________________ con una ______________________ con una relazione ben precisa tra le due trasformazioni ovvero _________________.

La glissosimmetria cambia l'ordinamento di una figura chiusa? (da antiorario diventa orario); (da "destra" a "sinistra" ……….).

<u>Approfondimento</u>:
Si può vedere che non esistono altri tipi di isometrie del piano giungendo al fatto che le uniche isometrie del piano sono: simmetrie assiali, traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali, glissosimmetrie.
Come hai visto le traslazioni e le rotazioni non cambiano l'ordinamento di una figura chiusa mentre le simmetrie assiali e le glissosimmetrie cambiano l'ordinamento. Le prime vengono chiamate pari e le altre dispari. Componendo due simmetrie dispari si ottiene una isometria pari, una qualunque isometria si ottiene componendo al massimo 3 simmetrie assiali. C'è un'analogia dell'aritmetica del ("pari-dispari",+) gruppo.

La configurazione che risulta eseguendo le operazioni indicate nella scheda è la seguente:

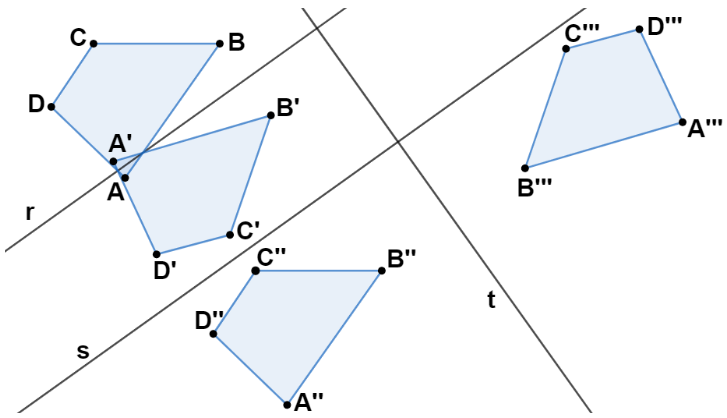


Figura 51

Si può osservare che non è possibile ottenere $A'''B'''C'''D'''$ da $ABCD$ per mezzo di una sola isometria tra la traslazione, la rotazione e la simmetria assiale. Tuttavia, è possibile affermare che l'operazione suddetta è possibile per mezzo di una glissosimmetria. Per visualizzare la situazione si fa riferimento alla seguente figura:

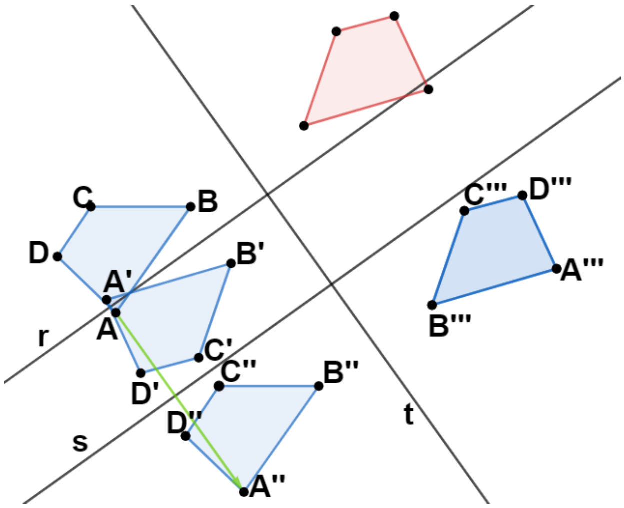


Figura 52

Eseguendo dapprima una simmetria assiale rispetto alla retta t si ottiene il quadrilatero rosso. Se ad esso si applica una traslazione di vettore parallelo alla retta t e modulo pari alla lunghezza del segmento AA'' (vettore verde in figura 52), si ottiene il quadrilatero $A'''B'''C'''D'''$. Analogamente, si può ragionare utilizzando le conoscenze acquisite nelle schede precedenti; in particolare, è noto che la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli corrisponde a una traslazione avente vettore perpendicolare agli assi. Dunque, il quadrilatero $A''B''C''D''$ è il traslato di $ABCD$ mediante il vettore verde perpendicolare agli assi r ed s (e dunque parallelo a t). Il quadrilatero $A'''B'''C'''D'''$ è ottenuto, per come è avvenuta la costruzione, da $A''B''C''D''$ operando una simmetria assiale di quest'ultimo rispetto alla retta t. Dunque, la composizione delle tre simmetrie assiali corrisponde alla composizione di una traslazione avente vettore parallelo a t e una simmetria assiale rispetto a t, ovvero una glissosimmetria.

La fase 1 termina con la scheda 8.

Scheda studente 8(a): composizione di tre simmetrie assiali (nel piano) assi incidenti (caso 2)

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

Disegna le rette r, s, t incidenti in uno stesso punto O

- Con lo strumento *Poligono* disegna un quadrilatero convesso ABCD che non presenti simmetrie (inserisci le lettere in modo antiorario)
- Con lo strumento *Simmetria assiale* esegui in successione la simmetria rispetto alla retta r, alla retta s. Ottieni il poligono trasformato A’’B’’C’’D’’.
- Con lo strumento *Simmetria assiale* esegui la simmetria rispetto alla retta t.
Ottieni il poligono trasformato A’’’B’’’C’’’D’’’.

Riesci a ottenere A’’’B’’’C’’’D’’’ da ABCD con una sola isometria (del menu standard di GeoGebra)?

Suggerimento:
- Traccia l’asse del segmento AA’’’. Per quale punto del piano passa?
- Traccia la circonferenza di centro il punto e passante per A. Che cosa osservi?

Quindi componendo 3 simmetrie assiali con assi incidenti in uno stesso punto O è equivalente a fare una ______________________________

La configurazione che si ottiene eseguendo le tre simmetrie assiali aventi assi incidenti in uno stesso punto è la seguente:

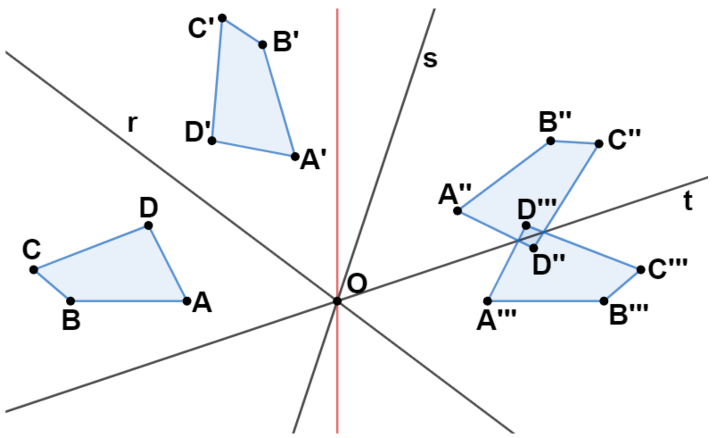


Figura 53

L’isometria che permette di ottenere il quadrilatero $A'''B'''C'''D'''$ a partire da $ABCD$ è una simmetria assiale. In particolare, tracciando il segmento AA''' è possibile osservare che esso passa per il punto O di incidenza dei tre assi. Inoltre, disegnando la circonferenza di centro O e passante per A si può concludere che anche A''' appartiene a tale retta e che dunque $OA \cong$

OA'''. A questo punto, per individuare l'asse di simmetria cercato è sufficiente tracciare la retta perpendicolare al segmento AA''' passante per il suo punto medio O (retta rossa in figura 53).
Per la fase 2 non sono previste schede per gli studenti e si chiede ai gruppi dapprima di analizzare e classificare una serie di fregi proiettati alla LIM dal docente e successivamente di creare un fregio utilizzando poligoni diversi su GeoGebra. Alla classe vengono lasciati circa 40 minuti per svolgere l'attività e al termine vengono dedicati 20 minuti alla discussione di classe in cui l'insegnante guida la classe alla determinazione dei 7 gruppi di isometria dei fregi.
A questo punto si procede con la fase 3, in cui i gruppi lavorano dapprima sulla scheda 9 per circa 40 minuti.

Scheda studente 9(a): Tassellazioni del piano

Osserva le seguenti immagini. Che cosa osservi?



Le pavimentazioni sono un esempio reale delle tassellazioni del piano.

In geometria piana con il termine **tassellazioni,** (o tassellature o pavimentazioni) si intendono i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza sovrapposizioni o spazi vuoti. Se queste figure sono poligoni regolari si parla di tassellazioni regolari.

Con quali poligoni regolari dello stesso tipo è possibile tassellare il piano?

Con il triangolo equilatero?

Sì, perché
No, perché

Con il quadrato?

Sì, perché
No, perché

Con il pentagono regolare?

Sì, perché

No, perché

Con l'esagono regolare?

Sì, perché
No, perché

Quindi, qual è la condizione che deve sussistere affinché si possa tassellare il piano con un poligono regolare?

Quali sono gli unici poligoni regolari con cui è possibile farlo?

Suggerimento:
Ti puoi aiutare compilando la tabella seguente:

Numero dei lati di un poligono regolare	**Somma degli angoli interni di un poligono regolare**	**Ampiezza angolo interno**
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Per poter tassellare un piano utilizzando poligoni regolari dello stesso tipo è necessario che essi non si sovrappongano e che non vi siano spazi vuoti tra di essi. Dunque, i poligoni devono riempire il piano ad ogni vertice e non devono sovrapporsi e per farlo è necessario che l'angolo interno del poligono sia un divisore di 360.
Analizzando i casi proposti:

- triangolo equilatero: l'angolo interno misura 60° (180°/3), che è un sottomultiplo di 360°, dunque è possibile tassellare il piano
- quadrato: l'angolo interno misura 90° (360°/4), dunque è possibile tassellare il piano
- pentagono regolare: per individuare l'ampiezza dell'angolo interno è sufficiente ragionare sui 5 triangoli isosceli e congruenti tra loro che compongono il poligono.

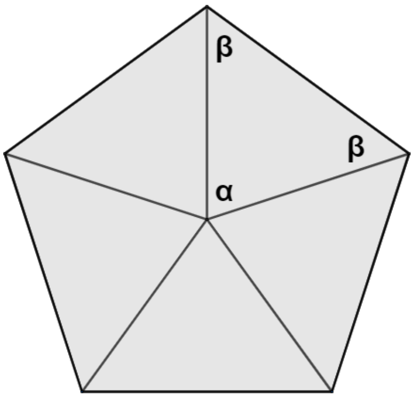


Figura 54

Si ricava dapprima $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$, poi si ricava il valore di $2\beta = 180° - \alpha = 108°$, che corrisponde all'angolo cercato. Dunque, non essendo un divisore di 360°, non è possibile tassellare il piano

- esagono regolare: ragionando analogamente a quanto fatto per il pentagono si può dedurre che l'angolo interno misura 120°, che è un sottomultiplo di 360° e dunque è possibile tassellare il piano
- ettagono regolare: ragionando analogamente a quanto fatto per il pentagono si può dedurre che l'angolo interno misura 128,57°, che è non un sottomultiplo di 360° e dunque non è possibile tassellare il piano
- ottagono regolare: ragionando analogamente a quanto fatto per il pentagono si può dedurre che l'angolo interno misura 135°, che è non un sottomultiplo di 360° e dunque non è possibile tassellare il piano.

Al termine dell'attività, il docente fornisce ai gruppi la scheda 10 su cui gli studenti lavorano per 20 minuti.

Scheda studente 10(a): somma di vettori

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna un triangolo utilizzando lo strumento *Poligono* e un vettore $\vec{v}$ lo strumento *Vettore*.
- Trasla il triangolo secondo il vettore $\vec{v}$ con lo strumento *Traslazione*
- Riporta il triangolo nella posizione iniziale utilizzando una sola traslazione. Che caratteristiche ha il vettore $\vec{u}$ di quest'ultima traslazione?

Direzione ____________________
Verso: ______________________
Modulo: ___________________

Qual è il legame tra il vettore $\vec{v}$ e il vettore $\vec{u}$?

Approfondimento:
Esiste un vettore che trasforma una figura in sé stessa? Come potresti indicarlo?

- Disegna un triangolo ABC utilizzando lo strumento *Poligono*
- Disegna due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con lo strumento *Vettore*. (Suggerimento: colora i vettori con due colori diversi)
- Con lo strumento *Traslazione* trasla il triangolo ABC secondo il vettore $\vec{a}$, ottieni il triangolo A'B'C'
- Trasla ora il triangolo A'B'C' secondo il vettore $\vec{b}$, ottieni il triangolo A''B''C''

- Trasla ora il triangolo ABC prima secondo il vettore $\vec{b}$ e poi secondo il vettore $\vec{a}$.

Che cosa osservi?

È possibile trasformare ABC in A''B''C'' mediante una sola traslazione?

Questa traslazione si chiama “somma” delle due traslazioni.
Considera due terne di vertici corrispondenti, ad esempio AA’A’’ e AA'_1A'', disegna i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che trasformano rispettivamente A in A’ e A’ in A’’ (Suggerimento: se hai colorato i vettori mantieni le colorazioni scelte). Considera il vettore che trasla A in A’’; questo vettore viene chiamato vettore “somma” (somma di $\vec{a}$ e $\vec{b}$).

Quindi dati due vettori è possibile definire la _________________ di due vettori.
Il vettore si può ottenere sia ____
sia ____

Poni l’attenzione sul triangolo ABC e sul triangolo A’B’C’.

Si procede dunque con la consegna delle schede 11 e 12, ad ognuna delle quali vengono dedicati 40 minuti.

Scheda studente 11(a): tassellazioni del piano con triangoli qualunque

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Con lo strumento Poligono disegna un triangolo qualunque ABC
- Con lo strumento Punto medio o centro disegna il punto medio di uno dei lati, ad esempio BC
- Utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni [vedi scheda 10] prova a iniziare la tassellazione del piano utilizzando “piastrelle” uguali al triangolo dato.

Descrivi il tuo procedimento.

Prova a modificare il triangolo ABC trascinando uno dei suoi vertici. Ottieni ancora una tassellazione?

Quindi è possibile tassellare il piano con ____________________ perché _____________
____

Partendo da un triangolo qualunque è possibile tassellare il piano utilizzando soltanto una simmetria centrale e due traslazioni. Infatti, eseguendo la simmetria centrale attorno al punto medio di uno dei lati del triangolo, si formerà un parallelogramma. A questo punto per creare la tassellazione è sufficiente traslare il parallelogramma nelle direzioni dei suoi due lati (vettori verde e rosso in figura 55) ottenendo la seguente configurazione:

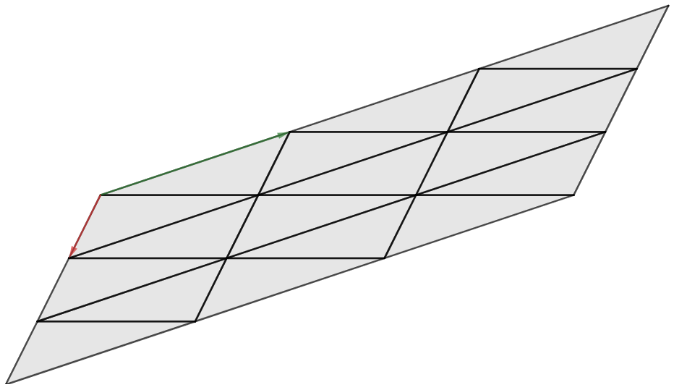


Figura 55

Scheda studente 12(a): tassellazioni del piano con quadrilateri qualunque

Apri GeoGebra, nascondi la vista Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni.

- Disegna ora lo strumento Poligono un quadrilatero ABCD non intrecciato.
- Con lo strumento Punto medio o centro disegna il punto medio di uno dei lati.
- Utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni prova a iniziare la tassellazione del piano utilizzando come “piastrelle” dei quadrilateri uguali a quello dato inizialmente.

Descrivi come hai operato.

Prova a modificare il quadrilatero iniziale ABCD trascinando uno dei suoi vertici.
Riesci ancora a tassellare il piano con questo nuovo quadrilatero?

E se il quadrilatero ABCD è concavo (non intrecciato), ottieni ancora una tassellazione del piano?

Quindi è possibile tassellare il piano con ____________________ perché ____

È possibile tassellare un piano utilizzando quadrilateri qualunque (non intrecciati). Per farlo è sufficiente operare una simmetria centrale attorno al punto medio di uno dei lati del quadrilatero; in questo modo si formerà un esagono. Quest’ultimo possiede lati opposti congruenti e paralleli, dato che la simmetria centrale conserva la lunghezza dei segmenti e le direzioni. Le direzioni e i moduli dei due vettori di traslazione corrispondono con le direzioni e le lunghezze delle due diagonali del quadrilatero (vettori verde e rosso in figura 56). La configurazione che si ottiene è la seguente:

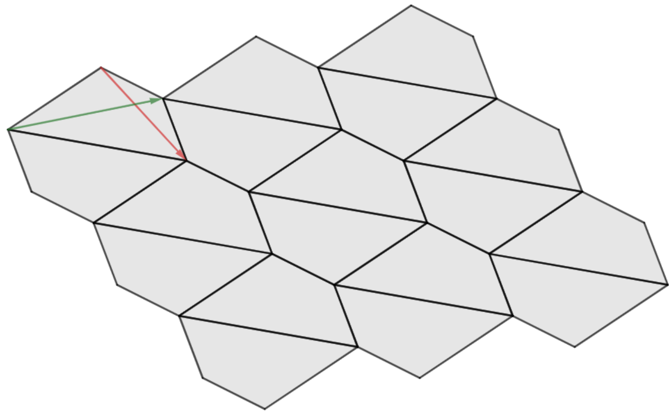


Figura 56

La tassellazione è possibile anche nel caso in cui il quadrilatero è concavo.

6.3 La composizione di isometrie con il software Wallpaper Symmetry

6.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** classificazione dei 17 gruppi di isometrie delle tassellazioni del piano

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** Wallpaper Symmetry

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza delle principali proprietà delle isometrie del piano
  - svolgimento delle attività relative al campo "scopri, classifica e generalizza" sulla simmetria assiale e sulla rotazione
  - svolgimento dell'attività relativa al campo "esplora e congettura" sulla traslazione

- **Obiettivi:**
  - esplorare e riconoscere le isometrie del piano, facendone esperienza anche nel mondo reale e artistico
  - classificare le isometrie del piano in maniera formale con l'ausilio di un software opportuno
  - riconoscere e generalizzare le principali caratteristiche delle isometrie del piano, collocandole in una classificazione completa

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti utilizzando il software Wallpaper Symmetry per classificare diversi tipi di isometrie delle tassellazioni del piano. All'interno delle schede di lavoro sono presenti 17 gruppi di simmetrie da descrivere; le modalità di lavoro possibili sono due. Il docente può scegliere di far analizzare ai vari gruppi tutte

le tassellazioni possibili; questo tipo di lavoro da un lato richiede tempistiche maggiori, dall'altro permette agli studenti di ogni gruppo di sperimentare ed esplorare le isometrie coinvolte in tutte e 17 le tassellazioni del piano. In questo frangente, l'utilizzo del software permette l'esplorazione libera e autonoma da parte degli studenti, che vengono spinti a riconoscere in prima persona la tipologia di trasformazioni che subisce il tassello. In questo caso è importante che gli studenti lavorino sulle singole tassellazioni soffermandosi su ognuna per il tempo che ritengono necessario. Se per alcuni gruppi il tempo a disposizione non dovesse essere sufficiente per completare l'analisi dei 17 gruppi di isometrie, il docente condurrà la classe in una discussione collettiva permettendo ai gruppi rimasti indietro di completare la classificazione mediante le analisi svolte dal resto della classe.
In alternativa, l'insegnante potrebbe dividere il lavoro tra i vari gruppi; nel dettaglio, un primo gruppo potrebbe analizzare i primi quattro gruppi di simmetria, un secondo gruppo altre quattro tassellazioni e così via. In questo modo, gli studenti non lavorano direttamente con tutte le tipologie di strutture, ma si concentrano su quattro di queste, analizzandole in maniera approfondita e giungendo ad una descrizione più dettagliata e autonoma è possibile dei gruppi di isometrie analizzati. Questo tipo di approccio risulta essere maggiormente adatto ai fini della costruzione di significati riguardo ai gruppi di isometrie del piano.
Gli studenti, dunque, focalizzano la loro attenzione su un tipo di tassellazioni del piano e ne analizzano le isometrie. Nel farlo il software fornisce un ausilio importante; i gruppi, infatti, possono selezionare la sigla corrispondente al tipo di tassellazione che stanno analizzando e facendo un disegno qualsiasi sul piano, questo sarà ripetuto rispettando le proprietà del tipo di isometrie selezionato. In questo modo, gli studenti visualizzano come concretamente avviene la costruzione della tassellazione e hanno la possibilità di ripetere le operazioni facendo disegni diversi e posizionati in punti differenti del piano. Inoltre, cliccando sull'opzione *"show grid"*, il riconoscimento delle isometrie in gioco potrebbe risultare più semplice.
In questo frangente, il docente monitora lo stato di avanzamento del lavoro svolto da ogni gruppo e collabora attivamente con la classe. Alcuni tipi di isometrie sono infatti complessi da visualizzare e la semplice esplorazione con il software potrebbe non bastare affinché gli studenti comprendano la struttura della tassellazione. In questo caso, l'insegnante ha il compito di intervenire fornendo ai gruppi suggerimenti e ponendo domande mirate, in modo tale che gli studenti focalizzino la loro attenzione sugli elementi utili al riconoscimento delle isometrie coinvolte. In certi casi potrebbe essere necessario mostrare ai gruppi in difficoltà esempi di tassellazioni in cui la visualizzazione delle isometrie coinvolte risulta essere più chiara. In altri casi ancora i gruppi potrebbero non riuscire a concludere la classificazione a causa della complessità del disegno realizzato ed è il docente che ha il compito di suggerire agli studenti di cambiare punto di vista e lavorare con disegni diversi.
Si consiglia di chiedere ai vari gruppi di mettere per iscritto le osservazioni e le congetture elaborate passo a passo nella descrizione dei gruppi di isometrie studiati. In questo modo, al termine dell'analisi effettuata dai gruppi si chiederà ad ognuno di condividere con la classe i risultati ottenuti, spiegando e giustificando le azioni svolte.

Il docente orchestra la discussione collettiva, che permette ad ogni studente di interfacciarsi anche con i gruppi di isometrie con cui non ha lavorato direttamente all'interno del proprio gruppo di lavoro. Durante la discussione è importante che emergano i metodi con cui i vari gruppi hanno svolto l'attività; questo permette alla classe di entrare in contatto con idee diverse e punti di vista differenti e che talvolta potrebbero risultare maggiormente efficaci e convenienti. La descrizione completa dei 17 gruppi di isometrie è disponibile su [Catalogo Tassellazioni | TALES GAME (oiler.education)] e può essere utilizzata dall'insegnante per guidare la discussione collettiva.
Il docente può inoltre scegliere di limitare l'attività all'analisi dei gruppi p1, pm, p2, pmm, p4, p4m, p3, p6 e p6m; in questi casi l'esplorazione risulta essere più semplice e se la classe dovesse riscontrare serie difficoltà nella descrizione dei gruppi è consigliabile focalizzare il lavoro su tali tassellazioni. I gruppi rimanenti potrebbero essere analizzati a livello di classe con la supervisione del docente che avrà il compito di proiettare la pagina del software alla LIM e guidare l'analisi collettiva ponendo domande mirate.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2-4 ore a seconda del numero di isometrie su cui si vuole andare a lavorare
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

6.3.2 Attività proposte

L'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti. Se la scelta del docente è quella di far lavorare ogni gruppo su tutte le tassellazioni possibili, il tempo fornito per l'esplorazione con il software e la descrizione dei gruppi di isometrie è di 4 ore. Se, invece, l'insegnante decide di suddividere il lavoro, chiedendo ad ogni gruppo di classificare soltanto quattro gruppi di isometrie assegnati come descritto in precedenza, il tempo fornito è di 2 ore.

LA COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE: scopri, classifica, generalizza
La composizione di isometrie con il software Wallpaper Symmetry
Scheda studente (b)

1.Apri il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] e seleziona a destra lo strumento *freehand* e fai un semplice disegno che non abbia simmetrie.
Seleziona, a destra, il gruppo di isometria **P1** e descrivi le proprietà di simmetria della tassellazione ottenuta.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante “*show grid*”, che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

2.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **PG**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C’è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante “*show grid*”, che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

3.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **PM**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C’è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante “*show grid*”, che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

4.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **CM**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C’è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante “*show grid*”, che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

5.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P2**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C’è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante “*show grid*”, che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

6.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **PGG**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C’è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

7.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **PMM**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

8.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **PMG**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

9.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P4**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

10.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P4M**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

11.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P4G**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

12.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P3**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

13.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P3M1**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

14.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P31M**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

15.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P6**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

16.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **P6M**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

17.Usando il software **Wallpaper Symmetry** [https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html] descrivere come agisce il gruppo di isometria **CMM**.

Che tipo di isometrie riconosci? Quante isometrie sono utilizzate? C'è anche la loro composizione?

Fare *click* sul pulsante "*show grid*", che cosa succede?
La griglia può aiutare nella descrizione del gruppo di isometria?

6.4 Problem solving sulla classificazione di tassellazioni presenti nel modno reale e relative argomentazioni

6.4.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** riproduzione e classificazione di tassellazioni del mondo reale e artistico

- **Ordine di scuola:** primo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** carta e matita, Tales Game, catalogo completo delle tassellazioni

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza delle isometrie del piano
  - conoscenza del catalogo completo delle tassellazioni
  - svolgimento delle attività relative ai campi "esplora e congettura" e "scopri, classifica e generalizza" sulla composizione di isometrie
  - conoscenza del funzionamento del software Tales Game

- **Obiettivi:**
  - visualizzare e operare con le isometrie del piano, facendone esperienza in ambiente reale e artistico
  - osservare e riprodurre tassellazioni realmente esistenti
  - analizzare e classificare tassellazioni realmente esistenti
  - creare una base per istituzionalizzare le isometrie del piano e proporne una classificazione a posteriori indipendente dal tassello

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti osservando e analizzando esempi di tassellazioni presenti nel mondo reale. I materiali proposti sono in parte ripresi dalla vignetta *"Symmetry step by step"*; l'attività vuole in tale modo creare un collegamento con essa, che rappresenta

il punto di partenza da cui sono state progettate le varie attività, in modo tale da chiudere un cerchio.
Nel corso dell'attività gli studenti hanno a disposizione il catalogo completo delle tassellazioni costruito passo a passo nelle attività precedenti e il software Tales Game. Inoltre, è importante che gli studenti abbiano la tassellazione stampata su un foglio, in modo tale da poter manipolare l'immagine e lavorare tramite carta e matita sulla figura fornita. Lo scopo è quello di permettere alla classe di approfondire maggiormente l'argomento delle tassellazioni e di sviluppare la capacità non solo di classificare, ma anche di riprodurre un qualsiasi tipo di tassellazione. Quest'ultimo passaggio non risulta essere banale; infatti, richiede che dapprima gli studenti individuino il tassello base. Tale operazione è complicata e nella maggior parte dei casi, soprattutto quando la tassellazione risulta essere particolarmente articolata e complessa, necessita che vengano svolti numerosi tentativi. In questo frangente, il docente deve lasciare ai vari gruppi il tempo di esplorare liberamente la situazione e riflettere sulle azioni svolte. In particolare, è importante che gli studenti procedano per prove ed errori, analizzando attentamente i tasselli individuati e autovalutando la correttezza del lavoro svolto. L'insegnante partecipa attivamente con ogni gruppo, andando ad intervenire laddove lo ritiene necessario ponendo domande e fornendo agli studenti spunti affinché i gruppi mettano in atto strategie efficaci. Inoltre, un aspetto importante riguarda il ruolo dell'errore; esso, infatti, non deve essere penalizzato dal docente, ma anzi "incoraggiato". In altre parole, l'insegnante ha il compito di fare in modo che all'interno della classe si instauri una visione dell'errore che non sia negativa e dispregiativa, ma al contrario l'obiettivo è che l'errore venga concepito come una parte determinante all'interno del processo che conduce alla risoluzione di un problema. Nel caso in questione, i continui tentativi effettuati dagli studenti al fine di riprodurre e classificare correttamente le tassellazioni proposte da un lato offrono ai gruppi la possibilità di ripercorrere le azioni svolte e verificare la correttezza dei risultati ottenuti, dall'altro costituiscono un passo verso l'acquisizione delle specifiche caratteristiche delle tassellazioni del catalogo. Ad esempio, è molto comune che gli studenti, nel tentativo di riprodurre un certo tipo di tassellazione, finiscano per riprodurne una diversa, seppur simile. Questo offre la possibilità di operare confronti e lavorare con tassellazioni che hanno molte caratteristiche in comune. In questo modo, la confusione iniziale tra le due tassellazioni, che conduce alla comparazione tra le due, offre agli studenti la possibilità di consolidare le proprie conoscenze e competenze riguardo ad entrambe le tassellazioni.
L'utilizzo del software risulta essere particolarmente funzionale; in particolare, una volta scelto il tassello di base, la costruzione effettiva e concreta della tassellazione con Tales Game fornisce agli studenti interessanti spunti e suggerimenti utili alla classificazione e offre ancora una volta l'occasione di confutare o validare congetture elaborate in fasi precedenti.
Al termine dell'attività si consiglia di chiedere ai vari gruppi di esporre di fronte alla classe le riproduzioni delle tassellazioni e le relative classificazioni. In questo frangente, si richiede agli studenti di argomentare e giustificare le scelte fatte, esponendo le strategie elaborate e i risultati ottenuti dagli eventuali tentativi svolti. In questo modo,

si vuole da un lato lavorare sullo sviluppo di abilità di alto livello quali l'argomentazione e il pensiero critico, dall'altro si vuole permettere alla classe di venire in contatto con metodi e percorsi diversi intrapresi dai vari gruppi nella risoluzione del problema.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 2 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

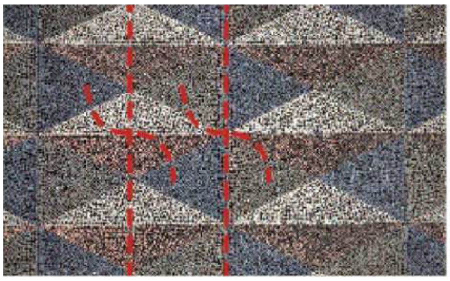
6.4.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede che la classe lavori alla riproduzione e alla classificazione di sei tassellazioni presenti nel mondo reale a gruppi di 3\4 studenti. A tale attività vengono dedicati 100 minuti e i rimanenti 20 minuti vengono impiegati per affrontare la discussione collettiva in cui ogni gruppo espone i risultati ottenuti.

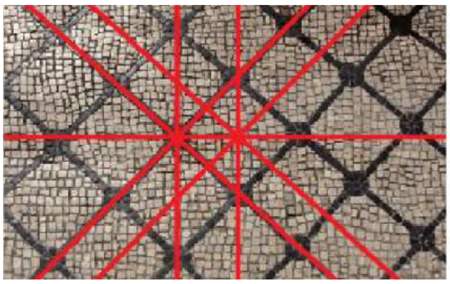
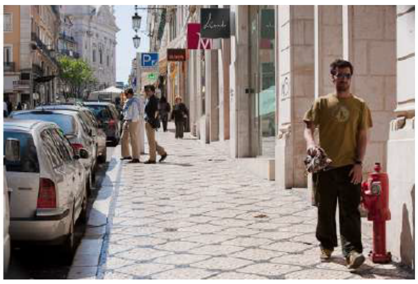
LA COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE: risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving sulla classificazione di tassellazioni presenti nel mondo reale e relative argomentazioni
Scheda studente (c)

Nelle seguenti attività (1-6) sono presentate immagini di diversi tipi di tassellazioni.
- Riprodurle e classificarle in base alle proprietà descritte nel catalogo delle tassellazioni.
- Argomentare la classificazione fatta, tramite giustificazione delle scelte effettuate.

1 - Marciapiede in quattro colori vicino al Mosteiro dos Jeronimos a Lisbona



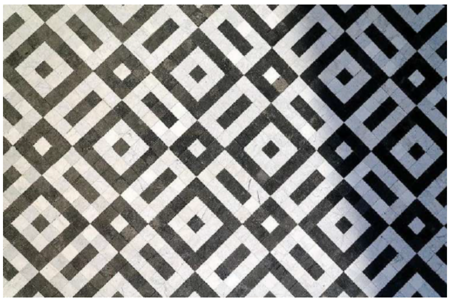

2 - Marciapiede su Rua Garrett a Lisbona

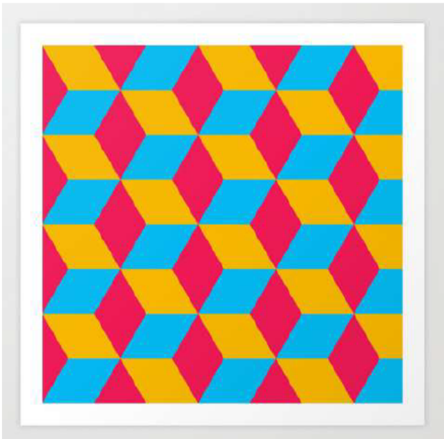
3 - Marciapiede immaginario presente nella vignetta del progetto Klein "symmetry step by step"

4 - Marciapiede nel Rossio (Lisbona), Copacabana (Rio de Janeiro) e Belém (Lisbona)

5 – Pavimento



6 – Pavimento



Quesito 1: è possibile riprodurre la tassellazione scegliendo come tassello di base il rettangolo e procedendo con la costruzione si ottiene:

Figura 57

A questo punto per ricreare la tassellazione è necessario traslare il tassello di base in figura 57 in una direzione, mentre nell’altra direzione si opera una traslazione e una simmetria assiale rispetto a un asse corrispondente al vettore di traslazione:

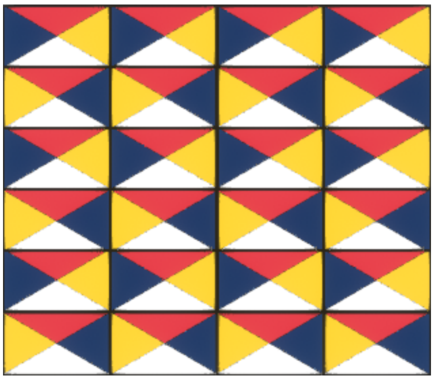


Figura 58

Dunque, la tassellazione in figura 58 corrisponde a una pg.
Quesito 2: per riprodurre la tassellazione una possibilità è quella di scegliere il quadrato come tassello di base. Ciò che si ottiene è quanto segue:

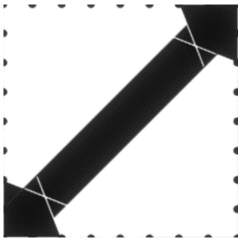


Figura 59

Il tassello presenta una simmetria assiale rispetto a una diagonale (in questo caso particolare rispetto ad entrambe le diagonali) e per riprodurre la tassellazione è necessario creare gruppi di quattro operando rotazioni di 90° attorno ad un vertice del quadrato:

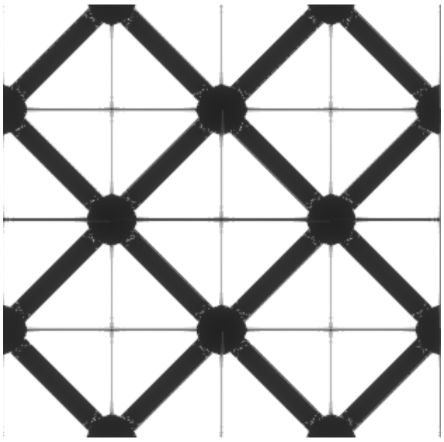


Figura 60

Quindi, la tassellazione è classificabile come una p4m.
Quesito 3: in questo caso è possibile scegliere come tassello di base il rettangolo e procedere con la riproduzione ruotata di 90° in senso orario per comodità:

Figura 61

Per riprodurre la tassellazione è necessario traslare il tassello in entrambe le direzioni:

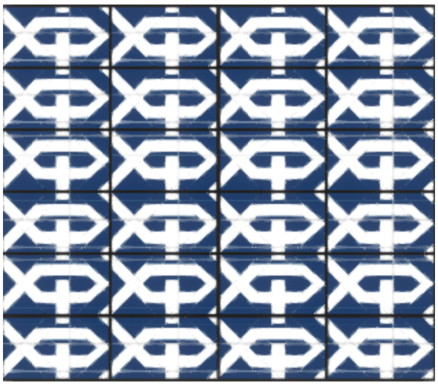


Figura 62

Quindi, si può concludere che la tassellazione corrisponde ad una p1.
Quesito 4: per riprodurre la tassellazione è possibile scegliere come tassello di base il rettangolo e utilizzando il metodo indicato all'interno del software per costruire l'ellisse si ottiene la seguente configurazione:

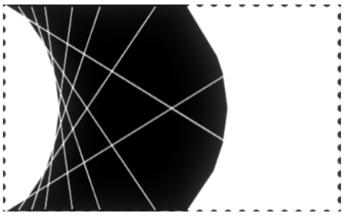


Figura 63

Il tassello possiede una simmetria assiale rispetto a una congiungente dei punti medi e per costruire la tassellazione è necessario traslare il tassello in una direzione, mentre nell'altra direzione, oltre alla traslazione, viene eseguita anche una simmetria assiale con asse parallelo corrispondente al vettore di traslazione:

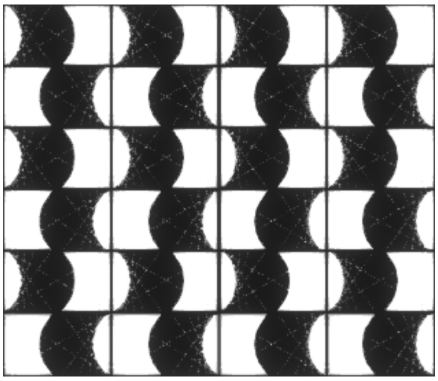


Figura 64

Quindi, la tassellazione è classificabile come una pmg.
Quesito 5: è possibile riprodurre la tassellazione scegliendo come tassello di basi il quadrato e ciò che si ottiene è quanto segue:

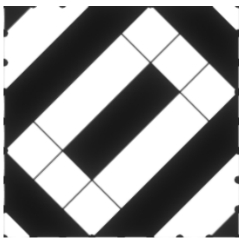


Figura 65

Il tassello presenta una simmetria assiale rispetto a una delle diagonali (in questo caso rispetto ad entrambe le diagonali) e per costruire la tassellazione è necessario procedere a gruppi di quattro ottenuti operando rotazioni di 90° intorno ad un vertice del quadrato:

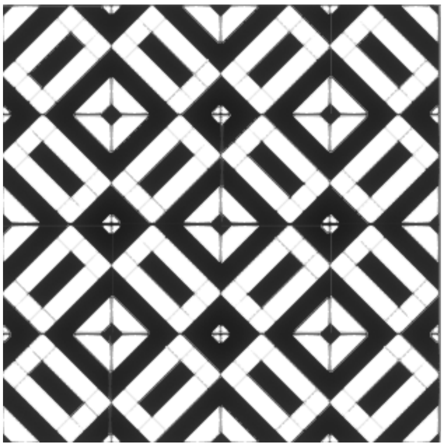


Figura 66

Dunque, la tassellazione è una p4m.
Quesito 5: in questo caso il tassello di base da scegliere è il triangolo e ciò che si ottiene è:

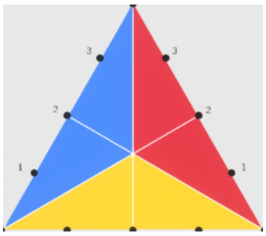


Figura 67

Operando una simmetria centrale rispetto al punto medio di un lato del triangolo si ottiene un parallelogramma, che viene successivamente traslato nelle direzioni dei suoi due lati:

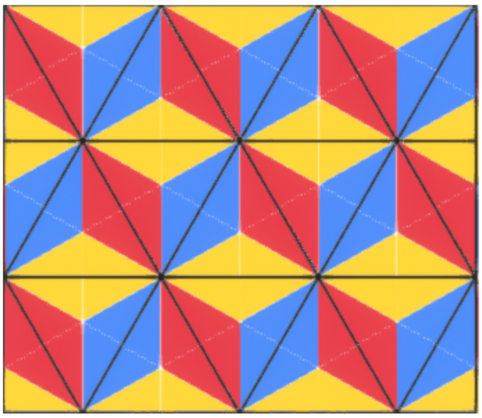


Figura 68

Quindi, nonostante il tassello non sia un rettangolo, si può concludere che la tassellazione corrisponde ad una p2.

CAPITOLO 7

APPROFONDIMENTI E PROBLEMI

7.1 Introduzione

All'interno delle schede progettate dai collaboratori del progetto Klein Italia in riferimento alla vignetta *"Symmetry step by step"* vengono affrontate sia le isometrie singolarmente, sia le composizioni di isometrie. Normalmente, in ambito scolastico, i docenti, oltre a prediligere lezioni frontali, di rado propongono alla classe attività di consolidamento e approfondimento. Queste ultime rappresentano invece un elemento di fondamentale importanza all'interno del percorso di apprendimento di ogni singolo studente; in particolare, gli approfondimenti e la risoluzione di problemi su argomenti trattati precedentemente permette alla classe di testare il grado di sviluppo non soltanto delle abilità acquisite, ma anche e soprattutto della comprensione e della capacità di impiegare le conoscenze apprese in ambiti che possono essere molto diversi da quello in cui l'argomento è stato trattato. È chiaro, dunque, che da un lato rappresentano un punto di arrivo, dall'altro un punto di partenza; infatti, l'obiettivo primario di questo tipo di materiali è quello di aiutare gli studenti ad osservare la realtà che ci circonda, guardando nelle varie direzioni con un occhio attento all'aspetto matematico.
In questo caso, sono state realizzate queste schede di approfondimento che mirano da un lato a permettere alla classe di visualizzare e costruire significati riguardo alle isometrie nello spazio 3D, dall'altro a spingere gli studenti a sviluppare capacità che permettano loro di sfruttare le isometrie e le loro proprietà per risolvere problemi in contesti reali. Infine, si vuole andare a lavorare sull'importanza del cambiare punto di vista e sul confronto; in questo modo, si mira allo sviluppo di abilità che permettano agli studenti di affrontare situazioni complesse in maniera elastica, elaborando strategie efficaci e impiegando metodi validi e convenienti.
La prima attività, relativa al campo "esplora e congettura", è stata intitolata *"Alla scoperta delle isometrie 3D"* e ha lo scopo di introdurre alla classe le principali caratteristiche e proprietà delle isometrie nello spazio tridimensionale. Analogamente a quanto svolto nelle attività precedenti, il percorso prevede che siano gli studenti in prima persona, tramite l'esplorazione diretta e libera su GeoGebra, a scoprire proprietà ed elaborare congetture fino ad arrivare gradualmente e il più possibile autonomamente all'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti.
La seconda attività, relativa al campo "scopri, classifica e generalizza", si intitola *"Composizione di isometrie 3D e loro classificazione"*. L'obiettivo è quello di guidare la classe allo studio della composizione di isometrie nello spazio tridimensionale attraverso un approccio di scoperta. Anche in questo caso, dunque, le modalità previste prevedono che gli studenti costruiscano conoscenze e competenze in maniera autonoma e giungano passo a passo a costruire una classificazione delle isometrie dello spazio.
La terza e la quarta attività sono entrambe relative al campo "risolvi problemi, argomenta e dimostra". Nel dettaglio, la terza si intitola *"Problem solving sulle isometrie"* ed è progettata in maniera tale che, per mezzo di esercizi guidati, gli studenti abbiano la possibilità di richiamare e consolidare proprietà delle isometrie e delle loro composizioni. In questo

frangente, viene fatto uso anche del piano cartesiano e si chiede alla classe di risolvere un problema contestualizzato in ambiente reale.
Infine, la quarta attività si intitola *"$\mathbb{P}_3$, isometrie per definire, isometrie per dimostrare, isometrie per risolvere"* e ha lo scopo di mettere a confronto la geometria euclidea classica e la geometria delle isometrie rispetto a definizioni, dimostrazioni e risoluzioni di problemi.

7.2 Alla scoperta delle isometrie 3D

7.2.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione alle isometrie nello spazio tridimensionale

- **Ordine di scuola:** secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** GeoGebra classico 5, GeoGebra Classroom

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli strumenti del software GeoGebra
  - conoscenza degli elementi di base della geometria dello spazio

- **Obiettivi:**
  - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alle isometrie dello spazio
  - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alle caratteristiche di alcune composizioni di isometrie nello spazio tridimensionale

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività si focalizza sull'introduzione delle isometrie nello spazio tridimensionale e prevede che la classe lavori su cinque schede a gruppi di 3\4 studenti. Dal momento che nelle schede viene fatto uso del concetto di tetraedro orientato, è consigliabile che quest'ultimo venga introdotto dal docente prima di iniziare con lo svolgimento dell'attività. Nelle schede viene comunque richiamata la definizione di tale concetto per completezza.
  Ognuna delle schede si focalizza su una particolare isometria e le modalità di lavoro prevedono che inizialmente gli studenti realizzino una costruzione su GeoGebra ed esplorino liberamente la situazione con l'ausilio del software. La costruzione diretta delle isometrie coinvolte da parte della classe ha un importante valore euristico e la visualizzazione e l'osservazione delle configurazioni ottenute permette agli studenti di intuire le principali proprietà delle isometrie nello spazio.
  Le domande proposte spingono i gruppi a mettere per iscritto le congetture elaborare nella fase esplorativa; in particolare, i quesiti mirano a mettere in luce il funzionamento dell'isometria, facendone emergere le principali caratteristiche ed eventuali elementi uniti. In questo frangente, il docente monitora il lavoro svolto dai vari gruppi ponendo innanzitutto attenzione alla correttezza dell'utilizzo del software; nel dettaglio, è importante che i comandi vengano eseguiti in un determinato ordine e che gli studenti familiarizzino con il funzionamento del software in questione e con la casella di strumenti *Trasformazioni 3D*. Inoltre, è consigliabile che i gruppi lavorino in situazioni

il più possibile generali in un primo momento, in modo tale da poter osservare e fare ipotesi in casi che non siano particolari e non abbiano validità limitata. In questi casi, l'insegnante conduce gli studenti ad analizzare la costruzione in questione e, mediante domande mirate, fa in modo che i gruppi si rendano conto delle eventuali restrizioni insite nella situazione in esame e procedano con una nuova costruzione.
La scheda 1 prevede che i gruppi lavorino con il concetto di simmetria planare; tale isometria si presta molto bene ad essere introdotta in ambiente reale, creando un legame significativo con la vita quotidiana. In particolare, partendo dall'esperienza è possibile visualizzare concretamente tale isometria in quanto corrisponde alla riflessione rispetto ad uno specchio piano. I vari gruppi lavorano, quindi, sia con il software che con una piramide di carta e uno specchio, in modo tale che le caratteristiche di tale isometria vengano comprese in maniera approfondita. Questo aspetto, dal punto di vista cognitivo, permette agli studenti di creare un collegamento con un'attività usuale della vita quotidiana e tale nesso facilita la costruzione di significati riguardo al concetto matematico affrontato. In questo modo la classe sviluppa competenze riguardo all'argomento trattato autonomamente a partire da radici cognitive legate all'esperienza di tutti i giorni.
Nella scheda 2 viene affrontato il tema della simmetria assiale nello spazio, che corrisponde ad una rotazione di 180° attorno ad una retta nello spazio. Anche in questo caso, l'isometria trattata ha la sua base in molte esperienze che si possono fare nel mondo reale e le domande guidate mirano a mettere in luce tale aspetto.
In questo frangente, l'insegnante interagisce attivamente con i gruppi e guida gli studenti ad operare confronti con le proprietà delle isometrie del piano; in particolare nel caso della simmetria assiale è importante che il docente conduca la classe a realizzare che, nonostante le trasformazioni abbiano lo stesso nome delle rispettive simmetrie del piano, si comportano in maniera diversa rispetto all'orientamento.
La scheda 3 prevede che i gruppi lavorino con il concetto di simmetria centrale 3D attraverso un approccio di scoperta. Anche in questo caso, è importante che venga sottolineata la diversità di tale isometria rispetto a quella del piano riguardo all'orientamento delle figure a cui viene applicata tale trasformazione.
Nella scheda 4 viene affrontata la traslazione nello spazio tridimensionale, la quale pone meno problemi per la sua definizione e comprensione nel momento in cui gli studenti hanno già incontrato tale isometria nel piano.
Infine, nella scheda 5 si introduce la rotazione attorno ad una retta nello spazio. Tale concetto si presta nuovamente a numerosi collegamenti con esperienze reali e il caso della simmetria assiale 3D ne rappresenta un caso particolare.
Al termine dell'attività si suggerisce di condurre la classe in una discussione collettiva orchestrata dal docente. Lo scopo è quello di richiamare i risultati ottenuti dai vari gruppi, analizzandoli a livello di classe; in questo frangente, il docente mette in luce elementi significativi e spinge la classe a riflettere sulle azioni svolte. In particolare, uno spunto interessante che è bene che emerga dalla discussione riguarda l'impossibilità di sovrapporre fisicamente due tetraedri simmetrici rispetto ad un piano.
In un ambiente costruttivo e di confronto gli studenti vengono guidati dall'insegnante a fare riferimento all'esperienza pratica e a cercare di riflettere riguardo ad una possibile

spiegazione del fatto che è impossibile sovrapporre la mano destra con la mano sinistra. Questo tipo di approccio facilita la comprensione e permette agli studenti di giungere in maniera collaborativa alla consapevolezza del fatto che è impossibile un “ribaltamento” in una “quarta dimensione” per sovrapporre i due tetraedri.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 3-4 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

6.2.2 Attività proposte e soluzioni

L’attività è costituita da cinque schede e prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti. Le schede vengono consegnate agli studenti una alla volta e ad ognuna vengono dedicati 30 minuti. Al termine dell’attività è prevista una discussione collettiva della durata di circa 30 minuti. Il docente può scegliere di suddividere le tempistiche in base alle esigenze della classe, fornendo del tempo in più laddove lo ritiene necessario.
Si inizia dunque fornendo ai gruppi la scheda 1, in cui viene trattato il concetto di simmetria planare nello spazio.

APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: Esplora e congettura
Alla scoperta delle isometrie 3D
Scheda studente 1(a): La simmetria planare; proprietà (lo specchio piano)

Apri GeoGebra (è consigliata la versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Menu Opzioni>Salva impostazioni).
Apriamo la casella di strumenti *Trasformazioni dello spazio* (nella vista Grafici 3D). Osserviamo che la prima trasformazione presente è la *Simmetria planare* (detta anche *Riflessione rispetto a un piano*).

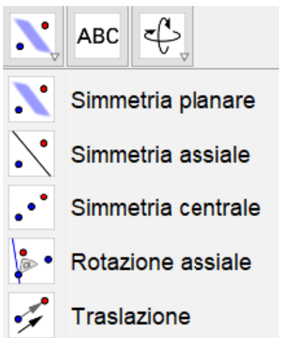


Figura 1 - Isometrie 3D presenti nella casella di strumenti “Trasformazioni” della vista Grafici 3D di GeoGebra (vers.5 Classica).

- Disegna con GeoGebra un piano *p*; usa lo strumento *Piano – per tre punti*
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*
- Utilizzando il comando *Simmetria planare* disegna la piramide A’B’C’D’ simmetrica di ABCD rispetto al piano *p* (vedi figura 2).

- Le due piramidi così ottenute si dicono simmetriche rispetto al piano *p*.
- Costruisci ora con un cartoncino la piramide *ABCD* e con uno specchio piano visualizza l'immagine di questa piramide che si forma nello specchio.
- Osserva che se, per esempio, su una faccia della piramide scrivi in maiuscolo la parola OUT nell'immagine ottenuta si forma la parola (scrivi in stampatello maiuscolo)……………………………

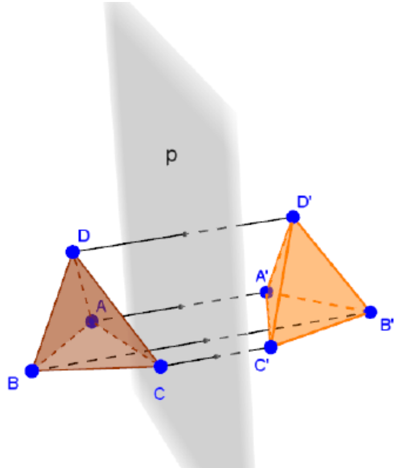


Figura 2

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie planari: esse cambiano l'ordine delle lettere in una parola e capovolgono l'ordinamento nello spazio.

L'immagine della mano destra tramite una simmetria planare (specchio piano) è …….. la mano……………..

Figura 3 - Immagine da Internet (ritratto dello scrittore H. Murakani)

Tramite una *Simmetria planare* una retta si trasforma in una ……...

Tramite una *Simmetria planare* un piano si trasforma in un ……...

Tramite una *Simmetria planare* un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un …………………… (isometrico ad ABC). orientato in verso……………

Un tetraedro ABCD orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza) orientato in verso sinistrorso.

Ci sono punti che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria planare? Quali sono?.....................................

Ci sono rette che rimangono fisse (o unite) nella simmetria planare? Quali sono?....................................

Ci sono rette che si trasformano in se stesse nella simmetria planare? Quali sono?....................................

Ci sono piani che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria planare? Quali sono?.....................................

Se applichi due volte di seguito una simmetria planare quale trasformazione si ottiene?....................………………

La simmetria planare (o riflessione rispetto a un piano) è una trasformazione che capovolge l'ordinamento dello spazio; per questo viene detta *dispari.* Questa trasformazione geometrica dello spazio viene realizzata facilmente usando uno specchio piano.

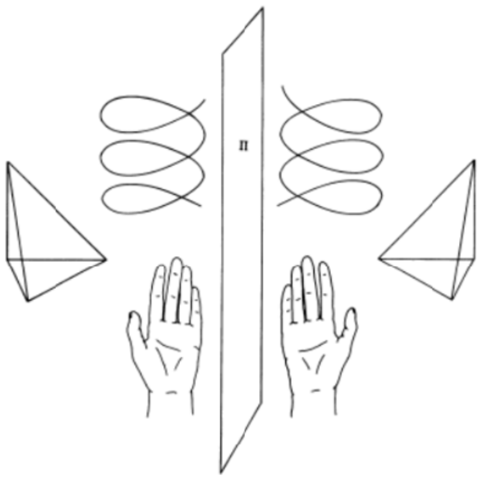


Figura 4-La simmetria planare è dispari.

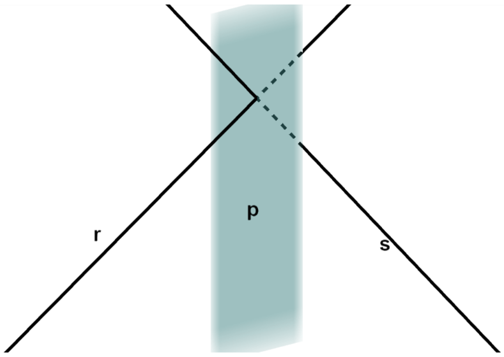
Attraverso l'esperienza diretta mediante l'utilizzo di uno specchio, emerge sin da subito una proprietà importante della simmetria planare, ovvero che si tratta di un'isometria dispari, in quanto capovolge l'orientamento nello spazio. In particolare, scrivendo la parola OUT sulla piramide realizzata con il cartoncino e operando poi la riflessione con lo specchio, si osserva che nell'immagine ottenuta si forma la parola TUO.
Analogamente, è possibile osservare che l'immagine della mano destra tramite lo specchio, che equivale ad operare una simmetria planare rispetto al piano dello specchio, corrisponde alla mano sinistra.
Operando poi con GeoGebra è possibile risalire ad altre proprietà della simmetria planare; nel dettaglio, si può dedurre che due punti che si corrispondono in una simmetria planare e che non appartengono al piano di simmetria sono tali che:

- la retta individuata da tali punti è perpendicolare al piano di simmetria

- il punto di intersezione della suddetta retta con il piano corrisponde con il punto medio del segmento congiungente i due punti simmetrici

Queste due caratteristiche ricordano molto la proprietà di perpendicolarità e di equidistanza possedute da due punti corrispondenti in una simmetria assiale del piano. Inoltre, è possibile concludere che:

- una simmetria planare trasforma una retta in una retta e un piano in un piano



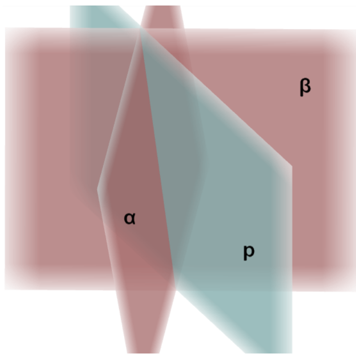


Figura 69 simmetria planare della retta r rispetto al piano p, simmetria planare del piano α rispetto al piano p

- dato un triangolo ABC orientato in verso antiorario, una simmetria planare lo trasforma in un triangolo isometrico orientato in verso orario

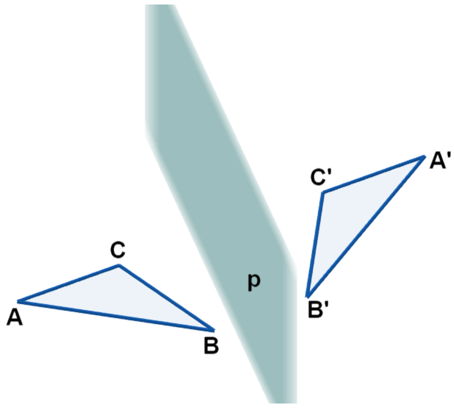


Figura 70 simmetria planare del triangolo ABC rispetto al piano p

Sperimentando con il software è possibile visualizzare il fatto che i punti fissi di una simmetria planare corrispondono con i punti del piano di simmetria, di conseguenza sono fisse tutte le rette appartenenti a tale piano e il piano stesso. In aggiunta, sono uniti i piani e le rette perpendicolari al piano di simmetria.
Infine, si può dedurre che applicando due volte consecutive una simmetria planare si ottiene l'identità.
A questo punto si procede con la consegna della scheda 2, in cui viene introdotta la simmetria assiale nello spazio.

Scheda studente 2(a): La simmetria assiale 3D (rotazione di 180° attorno a una retta nello spazio)

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra una retta *r*; usa lo strumento *Retta* nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*
- Utilizzando il comando *Simmetria assiale* disegna la piramide A'B'C'D' simmetrica di ABCD rispetto alla retta *r*.
- Le due piramidi ottenute si dicono simmetriche rispetto alla retta *r* (vedi figura 5).

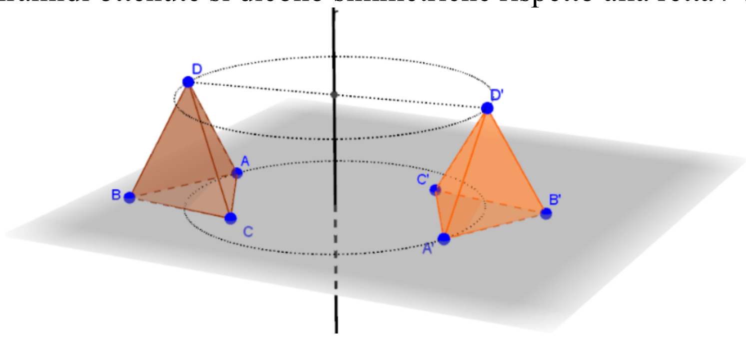


Figura 5

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie assiali (3D): esse non sono altro che delle rotazioni di 180° attorno a una retta data.

Stando in piedi, fai una rotazione di 180° (di solito questo si chiama un "dietro front").

Tramite una *Simmetria assiale* l'immagine della mano destra è la mano ……………..

Tramite una *Simmetria assiale* una retta si trasforma in una ….......

Tramite una *Simmetria assiale* un piano si trasforma in un …......

Tramite una *Simmetria assiale* un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ……………………. (isometrico ad ABC). orientato in verso…………….

Tramite una *Simmetria assiale* un tetraedro orientato in verso destrorso ABCD (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza) orientato nello stesso verso.

Ci sono punti che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?.....................................

Ci sono rette che rimangono fisse (o unite) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?....................................

Ci sono piani che rimangono fissi (o uniti) nella simmetria assiale 3D? Quali sono?.....................................

La simmetria assiale 3D (o rotazione di 180° attorno a una retta) è una trasformazione che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta una isometria *pari.*

La rotazione di 180° attorno a una retta viene per esempio realizzata quando giri la pagina di un quaderno per scrivere sul retro del foglio e in tante altre situazioni concrete. Sai descriverne qualcuna?

Operando con la simmetria assiale nello spazio in ambiente reale e mediante l'utilizzo di GeoGebra, si osservano diverse proprietà di tale trasformazione:

- l'immagine della mano destra in una simmetria assiale, che corrisponde ad una rotazione nello spazio di 180° attorno ad una retta data, è la mano destra con il palmo rivolto dalla parte opposta rispetto alla posizione di partenza
- due punti corrispondenti in una simmetria assiale nello spazio appartengono allo stesso piano perpendicolare alla retta utilizzata come asse di simmetria, di conseguenza la retta passante per i due punti appartiene a tale piano ed è dunque anch'essa è perpendicolare all'asse di simmetria
- due punti corrispondenti in una simmetria assiale nello spazio sono equidistanti dall'asse di simmetria
- una simmetria assiale nello spazio trasforma rette in rette e piani in piani

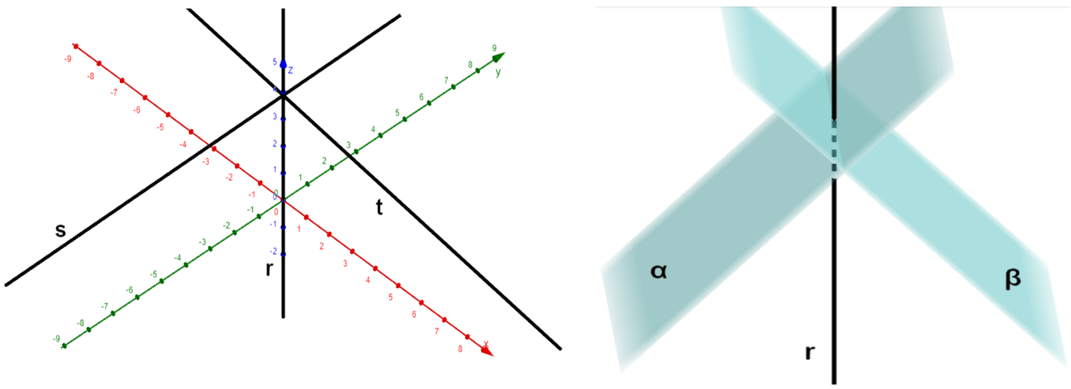


Figura 71 simmetria assiale della retta s rispetto a r, simmetria assiale del piano α rispetto a r

- una simmetria assiale nello spazio trasforma il triangolo ABC orientato in senso antiorario in un triangolo isometrico orientato in senso antiorario

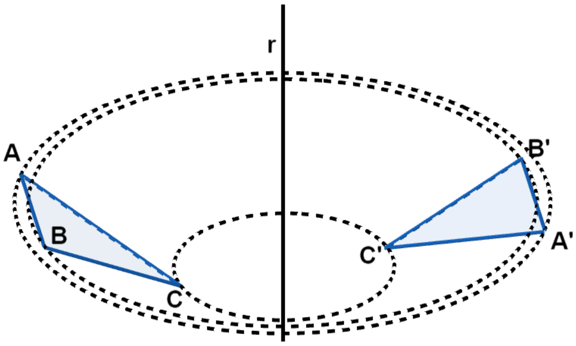


Figura 72 simmetria assiale del triangolo ABC rispetto alla retta r

La simmetria assiale nello spazio ha come punti fissi tutti i punti appartenenti all'asse di simmetria, di conseguenza quest'ultimo risulta essere una retta fissa. Inoltre, sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria e sono uniti i piani che contengono l'asse di simmetria.
Si consegna dunque la scheda 3, in cui viene trattato il caso della simmetria centrale nello spazio.

Scheda studente 3(a): La simmetria centrale 3D

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra un punto O ; usa lo strumento *Punto* nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*.
- Utilizzando il comando *Simmetria centrale* disegna la piramide *A'B'C'D'*, simmetrica di *ABCD* rispetto al punto *O* (Figura 6).
- Le due piramidi ottenute si dicono simmetriche (centralmente) rispetto al punto *O*.

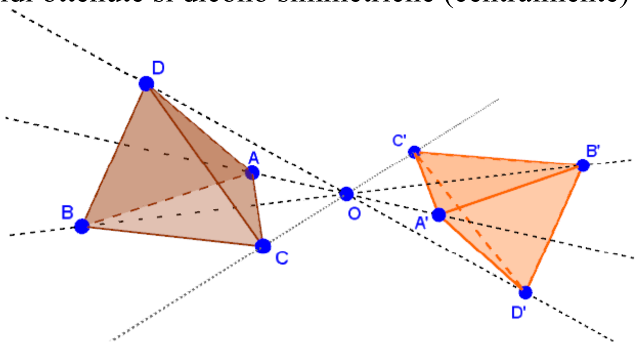


Figura 6

Quanto hai visto permette di comprendere una proprietà fondamentale delle simmetrie centrale (3D): esse sono diverse dalle simmetrie centrali nel piano.

Rispetto a una *Simmetria centrale* (3D) l'immagine della mano destra rispetto al punto O (nello spazio) è la mano ………..

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta si trasforma in una…..........

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano si trasforma in un…..........

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) una retta passante per il centro di simmetria si trasforma in............

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un piano passante per il centro di simmetria si trasforma in............

Tramite una *Simmetria centrale* (3D) un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un ………. (isometrico ad ABC), orientato in verso…………..

Un tetraedro ABCD orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' orientato in modo sinistrorso (isometrico a quello di partenza), ossia orientato in verso opposto nello spazio.

Una simmetria centrale (3D) è una trasformazione che capovolge l'orientamento; per questo viene detta una trasformazione *dispari.*

Nello spazio riferito a un sistema di assi ortogonali Oxyz il punto A di coordinate (x, y, z), nella simmetria centrale di centro l'origine O degli assi, si trasforma nel punto A' di coordinate (-x,-y,-z).

Esplorando la trasformazione e facendone esperienza concretamente è possibile osservare che l'immagine della mano destra in una simmetria centrale di centro O è, in generale, la mano sinistra. Inoltre, utilizzando il software emergono altre proprietà della simmetria centrale nello spazio:

- il centro di simmetria O corrisponde con il punto medio del segmento congiungente due punti corrispondenti in una simmetria centrale (analogamente a quanto accadeva nel piano)
- una simmetria centrale nello spazio trasforma rette in rette e piani in piani

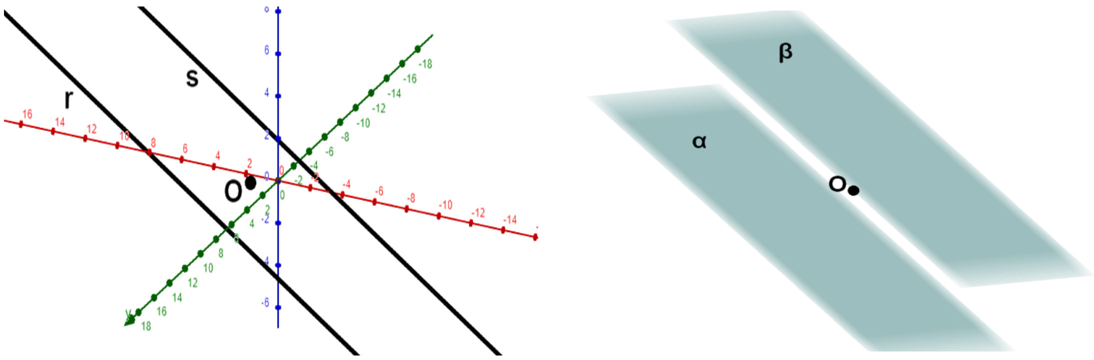


Figura 73 simmetria centrale della retta s rispetto a O, simmetria centrale del piano α rispetto a O

- un triangolo ABC orientato in senso antiorario viene trasformato da una simmetria centrale in un triangolo isometrico orientato in senso orario. Per visualizzarlo occorre fare riferimento alla figura 6 riportata nella scheda; in particolare, immaginando di osservare la base del tetraedro, ovvero il triangolo ABC, dal punto D, l'orientamento dei vertici è antiorario. Una volta effettuata la simmetria centrale, immaginando di osservare il triangolo immagine dal punto D', l'orientamento dei vertici risulta essere orario.

L'unico punto fisso è il centro di simmetria, mentre sono unite le rette passanti per il centro di simmetria. Inoltre, risultano essere uniti anche i piani passanti per il centro di simmetria.
A questo punto viene consegnata ai gruppi la scheda 4, che introduce il concetto di traslazione nello spazio.

Scheda studente 4(a): La traslazione 3D

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra un vettore *v*; usa lo strumento *Vettore* nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*.
- Utilizzando lo strumento *Traslazione* disegna la piramide A'B'C'D' ottenuta traslando la piramide ABCD con il vettore *v* (Figura 7).
- Le due piramidi ottenute si dicono traslate, una rispetto all'altra, tramite il vettore *v* (o il suo opposto).

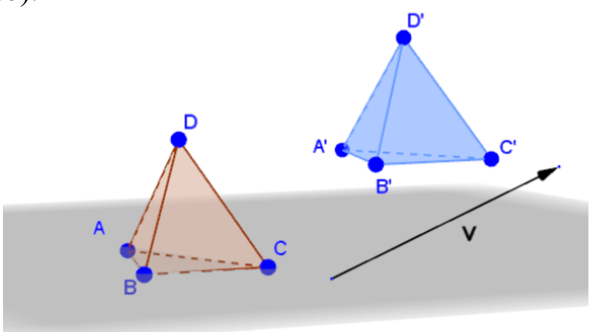


Figura 7

Quanto hai visto permette di comprendere le proprietà delle traslazioni nello spazio.

Le traslazioni nello spazio (3D) sono del tutto analoghe a quelle viste nel piano.

L'immagine della mano destra è ……..... la mano………...

Tramite una *Traslazione* (3D) una retta si trasforma in ………..........

Tramite una *Traslazione* (3D) un piano si trasforma in ……….........

Un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un……….. (isometrico ad ABC). orientato in verso………...

Un tetraedro ABCD orientato in verso destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza), orientato nello stesso verso.

La traslazione 3D è una trasformazione che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta *pari*.

Esplorando le caratteristiche della traslazione nello spazio facendone esperienza diretta è possibile osservare che l'immagine della mano destra è la mano destra. Inoltre, osservando con GeoGebra si può concludere che:

- analogamente a quanto affermato nel caso del piano, la traslazione nello spazio è definita da un vettore fissato in modulo, direzione e verso
- una traslazione nello spazio trasforma una data retta in una retta e un dato piano in un piano

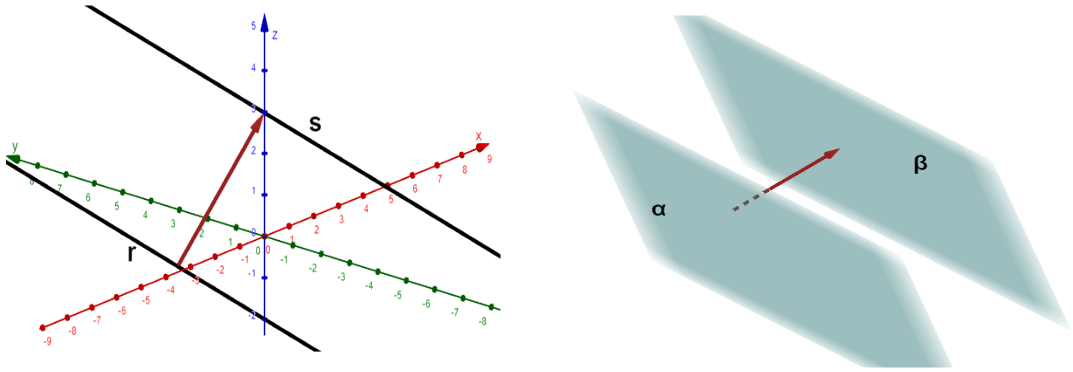


Figura 74 traslazione della retta r rispetto al vettore rosso, traslazione del piano α rispetto al vettore rosso

- una traslazione nello spazio trasforma un triangolo ABC orientato in verso antiorario in un triangolo orientato ancora in senso antiorario

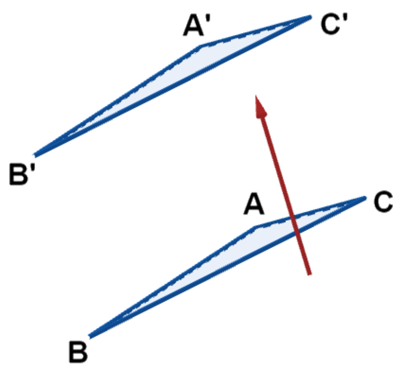


Figura 75 traslazione del triangolo ABC rispetto al vettore rosso

Una volta terminato il lavoro sulla traslazione nello spazio, si introduce la rotazione assiale nello spazio attraverso la scheda 5.

Scheda studente 5(a): La rotazione assiale 3D (rotazione di un angolo attorno a una α retta *r* nello spazio)

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra una retta *r*; usa lo strumento *Retta* nella casella di strumenti di Grafici 3D
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*.
- Utilizzando il comando *Rotazione assiale* disegna la piramide A'B'C'D' ottenuta dalla rotazione della piramide ABCD attorno alla retta *r* di un angolo α (Figura 8).

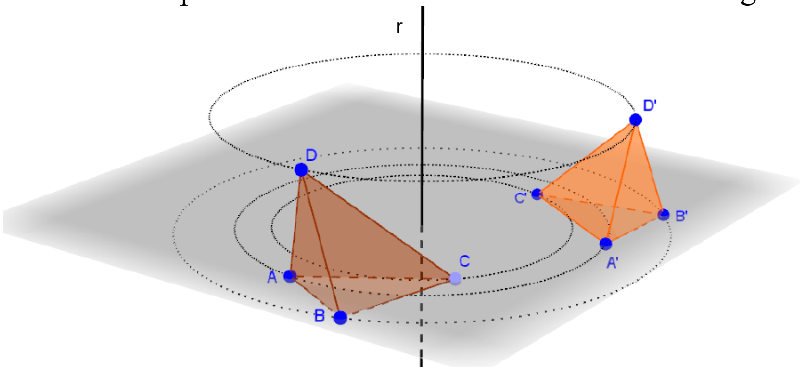


Figura 8

Quanto hai visto con GeoGebra permette di comprendere le proprietà fondamentali delle rotazioni assiali (3D): esse non sono altro che rotazioni dello spazio di un angolo α attorno a una retta *r* data.

Stando in piedi, fai una rotazione di 60° verso sinistra.

Stando in piedi, fai una rotazione di 90° verso destra.

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) l'immagine della mano destra è ……... la mano ……....

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) una retta si trasforma in …………….........

Tramite una *Rotazione assiale* (3D) un piano si trasforma in …………….........

Un triangolo ABC (orientato in verso antiorario) si trasforma in un …………... (isometrico ad ABC) orientato in verso…………...

Un tetraedro ABCD orientato in modo destrorso (regola della mano destra) si trasforma in un tetraedro A'B'C'D' (isometrico a quello di partenza), orientato nello stesso modo.
La rotazione assiale 3D (o rotazione di attorno a una retta *r*) è una trasformazione α che mantiene lo stesso ordinamento; per questo viene detta *pari*.

La rotazione di un angolo α attorno a una retta viene per esempio realizzata quando apri (o chiudi) una porta (rotazione attorno all'asse rappresentato dalla retta passante per gli stipiti) o in tante altre situazioni del mondo reale.

In una rotazione assiale nello spazio l'immagine della mano destra è ancora la mano destra. Inoltre, mediante l'esplorazione con GeoGebra è possibile osservare che:

- due punti corrispondenti in una rotazione nello spazio rispetto ad una retta appartengono allo stesso piano perpendicolare alla retta data
- due punti che si corrispondono in una rotazione nello spazio rispetto ad una retta sono equidistanti alla retta data
- una rotazione assiale nello spazio trasforma rette in rette e piani in piani

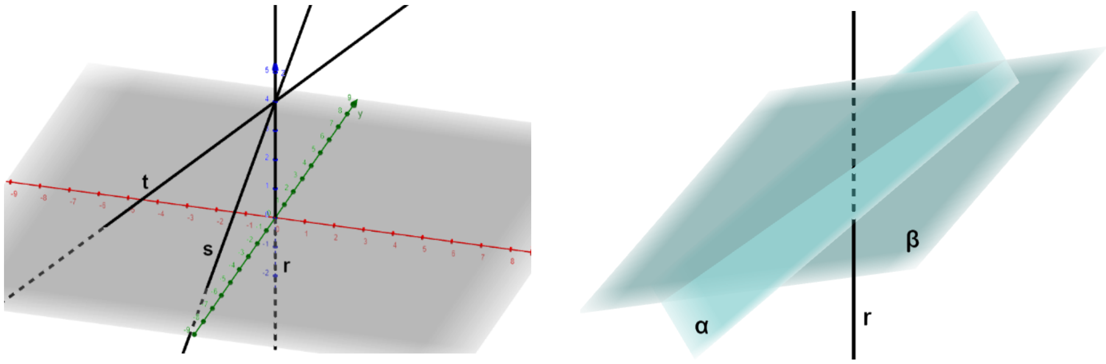


Figura 76 rotazione nello spazio della retta s di 60° in senso orario rispetto a r, rotazione nello spazio del piano α di 60° in senso orario rispetto a r

- l'immagine di un triangolo ABC orientato in verso antiorario in un triangolo avente lo stesso tipo di orientamento

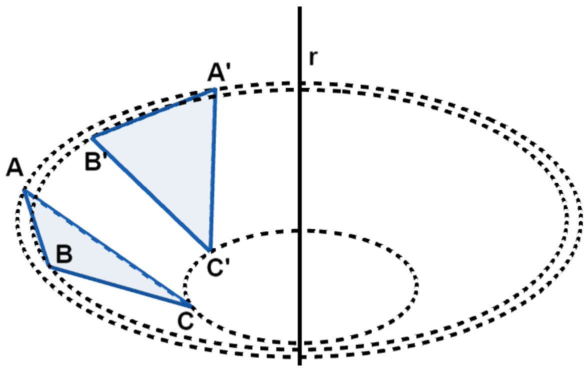


Figura 77 rotazione nello spazio del triangolo ABC di 60° in senso orario rispetto ad r

7.3 Composizione di isometrie 3D e loro classificazione

7.3.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione alla composizione di isometrie nello spazio tridimensionale e classificazione

- **Ordine di scuola:** secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** GeoGebra classico 5, GeoGebra Classroom

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli strumenti del software GeoGebra
  - conoscenza degli elementi di base della geometria dello spazio
  - conoscenza delle principali caratteristiche delle isometrie nello spazio

- **Obiettivi:**
  - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alla composizione di isometrie dello spazio
  - ottenere tutte le isometrie dello spazio attraverso la composizione di al più quattro simmetrie planari
  - costruire una classificazione delle isometrie dello spazio

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in due fasi sequenziali, in cui è previsto che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti in un ambiente collaborativo e di confronto reciproco. Nella fase 1 gli studenti utilizzano il software GeoGebra per esplorare varie situazioni seguendo le indicazioni all'interno delle schede progettate. In questo frangente, si spingono i gruppi a lavorare su diverse possibili composizioni delle isometrie dello spazio; in particolare, ogni scheda prevede che inizialmente i gruppi esplorino liberamente le costruzioni ottenute componendo le isometrie in esame. Questo approccio ha un importante valore euristico e permette alla classe di visualizzare concretamente l'azione delle trasformazioni e, inoltre, offre ai gruppi importanti spunti per la comprensione del tipo di isometria che si ottiene effettuando la composizione. In questo modo, a differenza di quanto avverrebbe nel corso di una lezione frontale, sono gli studenti in prima persona a ricavare gli elementi caratterizzanti e a realizzare in maniera autonoma una classificazione delle isometrie 3D mediante un percorso volto alla scoperta appositamente pensato.
  L'attività si focalizza sulla composizione di simmetrie planari; nel dettaglio, è previsto che inizialmente i gruppi esplorino la situazione in cui vengono effettuate successivamente due simmetrie planari. In questo frangente, i casi esaminati sono due; nella scheda 1 la classe analizza con l'ausilio del software il caso con piani di simmetria paralleli tra loro, mentre nella scheda 2 si procede con l'osservazione di ciò che accade con piani incidenti. In entrambi i casi ciò che si ottiene è analogo ai risultati ottenuti esaminando la composizione di due simmetrie assiali nel piano. Il docente ha il compito di mettere in luce tale analogia, assicurandosi che gli studenti intuiscano il legame

esistente con il caso planare autonomamente o guidati da domande mirate e suggerimenti adeguati.
Nella scheda 3 si procede con l'analisi della composizione di tre simmetrie planari e, in questo caso, le situazioni possibili sono varie. Il percorso previsto dalla scheda guida i gruppi attraverso la scoperta dei diversi casi che possono presentarsi, fornendo costruzioni ottenute con GeoGebra e altre figure che permettano di visualizzare il prodotto ottenuto operando le composizioni esaminate. Si consiglia, però, di chiedere ai vari gruppi di tentare di eseguire costruzioni analoghe in maniera autonoma; il ruolo delle figure presentate è importante, in quanto mostra agli studenti ciò che effettivamente avviene effettuando le composizioni nei vari casi, tuttavia, la costruzione passo a passo eseguita dai gruppi ha un valore cognitivo differente dalla semplice osservazione di immagini date. In particolare, quest'ultima tipologia di approccio rende possibile una scomposizione del prodotto finale che la sola osservazione di configurazioni date non sempre permette o comunque non facilita. La suddetta scomposizione favorisce la scoperta di dettagli e di elementi determinanti che permettono alla classe non solo di conoscere l'argomento trattato, ma anche di sviluppare competenze al riguardo, esaminando in maniera approfondita tutti gli aspetti rilevanti degli oggetti matematici in questione.
Nella scheda 4 viene affrontato il tema della composizione di quattro simmetrie planari e anche in questo caso il percorso progettato è pensato affinché gli studenti esaminino tutte le casistiche possibili. Analogamente a quanto previsto nelle schede precedenti i gruppi lavorano utilizzando immagini e configurazioni date all'interno della scheda, ma viene chiesto loro di realizzare costruzioni passo a passo con il software GeoGebra.
Nel corso della fase 1 la classe lavora con particolari isometrie, quali la roto-simmetria, la glisso-simmetria e la roto-traslazione nello spazio; è consigliabile che il docente, oltre a supervisionare il lavoro svolto dai singoli gruppi, ponga domande di approfondimento. Si potrebbe ad esempio domandare agli studenti di verificare, tramite il software, se le isometrie ottenute nelle varie composizioni sono pari o dispari. Questo, da un lato rappresenta un'anticipazione di quanto verrà svolto nel corso della fase 2, dall'altro offre alla classe spunti interessanti, spingendo gli studenti a porsi domande e ad acquisire spirito d'indagine.
Nella fase 2 si conclude l'attività classificando in maniera il più possibile formale le isometrie nello spazio tridimensionale. In particolare, nella scheda 5 viene approfondito il discorso riguardo le isometrie pari e dispari, conducendo la classe ad un importante teorema che afferma che ogni isometria nello spazio può essere ottenuta componendo al più quattro simmetrie planari.
In quest'ultima fase si consiglia di far lavorare gli studenti a livello di classe; in particolare l'insegnante dirige la discussione collettiva, utilizzando la scheda 5 come canovaccio. In questo frangente, il docente pone domande mirate e le conclusioni devono emergere dagli interventi degli studenti. È importante, infatti, che le idee e le ipotesi provengano da questi ultimi; ciò che l'insegnante può fare è mettere in luce aspetti che ritiene importanti, focalizzando l'attenzione sugli elementi utili al raggiungimento delle conclusioni.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 3-4 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

7.3.2 Attività proposte

L'attività è suddivisa in due fasi; nella fase 1 è previsto che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti su quattro schede, ad ognuna delle quali vengono dedicati 40 minuti. Si inizia consegnando la scheda 1.

APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: Scopri, classifica, generalizza
Composizione di isometrie 3D e loro classificazione
Scheda studente 1(a): Composizione di due simmetrie planari con piani paralleli

Apri GeoGebra, apri la vista Grafici 3D (è preferibile usare la versione 5 classica), nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Menu Opzioni>Salva impostazioni).
Apriamo la casella di strumenti *Trasformazioni dello spazio* (nella vista Grafici 3D). Osserviamo che la prima trasformazione presente è la *Simmetria planare* (detta anche *Riflessione rispetto a un piano*).

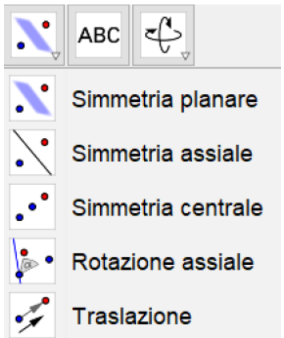


Figura 1 - Isometrie 3D presenti nella casella di strumenti "Trasformazioni" della vista Grafici 3D di GeoGebra.

- Disegna con GeoGebra un piano *p*; usa lo strumento *Piano – per tre punti*
- Disegna con GeoGebra un secondo piano *q*, parallelo al piano *p.*
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*.
- Utilizzando il comando *Simmetria planare* disegna la piramide A'B'C'D' simmetrica di ABCD rispetto al piano *p* (vedi figura 2).
- Utilizzando il comando *Simmetria planare* disegna la piramide A''B''C''D'' simmetrica di A'B'C'D' rispetto al piano *q* (vedi figura 2).

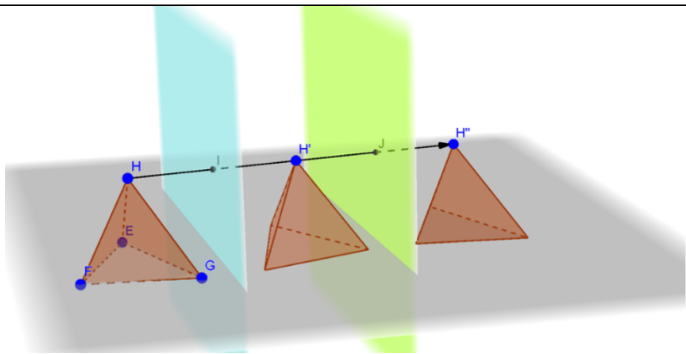


Figura 2

Osserva che le due piramidi ABCD e A’’B’’C’’D’’ (figura 2) così ottenute si corrispondono in una traslazione di vettore *v* che ha una direzione perpendicolare ai due piani di simmetria, verso dal piano *p* al piano *q* e modulo il doppio della distanza tra il piano *p* e il piano *q*.

Si procede, dunque, con la consegna della scheda 2.

Scheda studente 2(a): Composizione di due simmetrie planari con piani incidenti

Apri GeoGebra (è preferibile usare la versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

- Disegna con GeoGebra un piano *p*; usa lo strumento *Piano – per tre punti*
- Disegna con GeoGebra un secondo piano *q*, incidente con il piano *p.*
- Disegna un tetraedro (ossia una piramide a base triangolare) *ABCD* con lo strumento *Piramide*.
- Utilizzando il comando *Simmetria planare* disegna la piramide A’B’C’D’ simmetrica di ABCD rispetto al piano *p* (vedi figura 3).
- Utilizzando il comando *Simmetria planare* disegna la piramide A’’B’’C’’D’’ simmetrica di A’B’C’D’ rispetto al piano *q* (vedi figura 3).

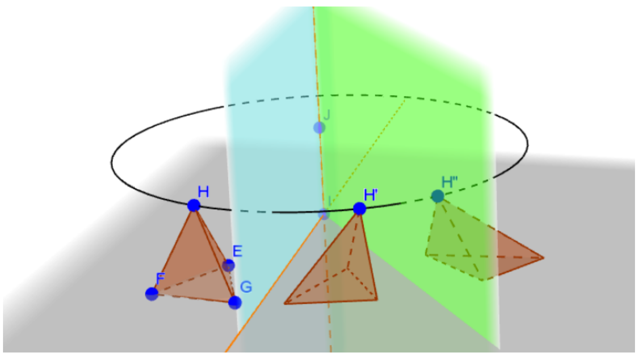


Figura 3

Osserva che le due piramidi ABCD e A’’B’’C’’D’’ (figura 3) così ottenute si corrispondono dunque in una rotazione attorno alla retta *r* intersezione dei due piani di simmetria, verso (antiorario) dal piano *p* al piano *q* e di angolo doppio rispetto all’angolo diedro formato dai piani *p* e *q*.

A questo punto, viene consegnata ai gruppi la scheda 3.

Scheda studente 3(a): Composizione di tre simmetrie planari con piani incidenti

Apri GeoGebra (versione 5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

Vogliamo esaminare la composizione di tre simmetrie planari rispetto a tre piani dati *p*, *q* ed *s*.

1° caso

Se i tre piani *p*, *q* ed *s* appartengono a un medesimo fascio proprio, allora si ottiene come composizione un’unica simmetria planare ottenuta dalla composizione di una rotazione attorno a una retta seguita da una simmetria planare.

Se i due piani *p*, *q* si intersecano nella retta *r* e il piano *s* interseca entrambi i piani *p* e *q*, si può verificare che ci si può ricondurre alla composizione di una rotazione attorno alla retta *r* e dalla simmetria planare rispetto ad un piano perpendicolare alla retta *r*.

Si ottiene pertanto una *roto-simmetria* (figura 4).

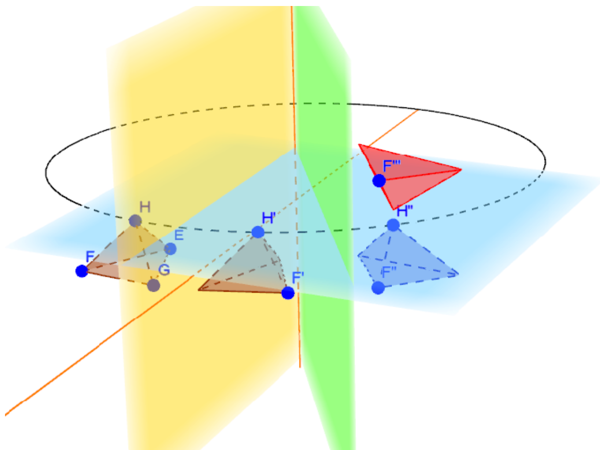


Figura 4

La composizione si comprende meglio osservando lo schema della figura 5.

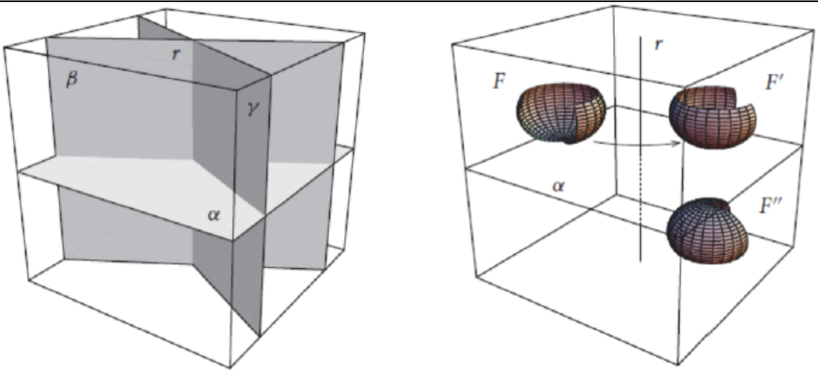


Figura 5 - Roto-simmetria (figura dal libro M. Dedò, *Forme*, Decibel, Padova)

Come caso particolare di questa trasformazione si può ottenere la simmetria centrale (3D), che si ottiene quando i tre piani sono tutti ortogonali tra loro (figura 6).

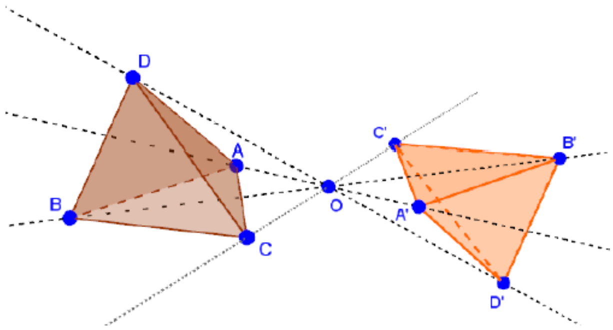


Figura 6

Nello spazio riferito a un sistema di assi ortogonali Oxyz il punto P di coordinate (x, y, z), nella simmetria centrale di centro l'origine *O* degli assi, si trasforma nel punto P' di coordinate (-x,-y,-z).

2° caso

Se i tre piani *p*, *q* ed *s* appartengono a un medesimo fascio improprio, allora si ottiene come composizione un'unica simmetria planare ottenuta dalla composizione di una traslazione e di una simmetria planare.

Se i due *p*, *q* sono paralleli e il piano *s* interseca entrambi i piani *p* e *q*, allora si può verificare che ci si può ricondurre alla composizione di una traslazione di vettore *v* (ottenuta dalla composizione delle sue simmetrie planari rispetto ai piani *p* e *q*) con una simmetria planare rispetto a un piano perpendicolare al vettore *v* della traslazione. Si ottiene pertanto una *glisso-simmetria* nello spazio 3D (figura 7).

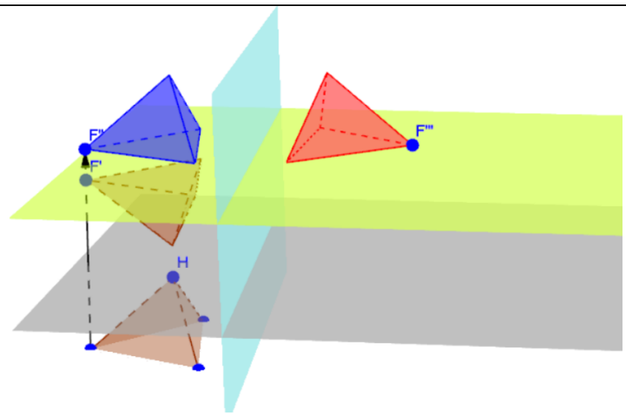


Figura 7

Questo tipo di composizione delle tre simmetrie planari si comprende meglio osservando lo schema della figura 8.

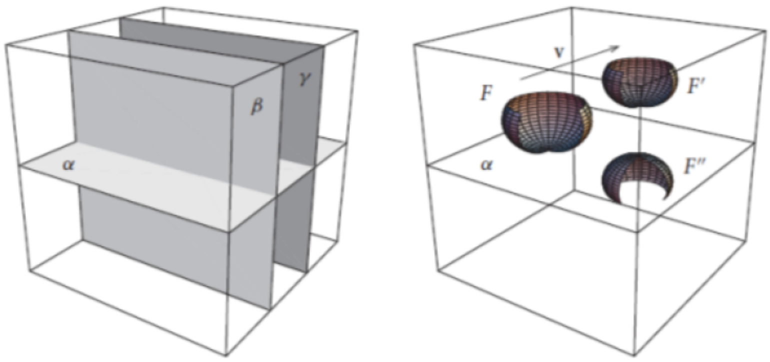


Figura 8 - Glisso-simmetria (figura dal libro: M. Dedò, *Forme*, Decibel, Padova)

Una volta terminata la scheda 3, si fornisce ai gruppi la scheda 4.

Scheda studente 4(a): Composizione di quattro simmetrie planari

Apri GeoGebra (vers.5 classica), apri la vista Grafici 3D, nascondi la finestra Algebra, togli dalla visualizzazione gli assi cartesiani e la griglia e salva le impostazioni (Opzioni>Salva impostazioni).

Consideriamo 4 piani α, β, γ, δ nello spazio.

Se questi 4 piani appartengono allo stesso fascio proprio, la composizione delle relative simmetrie planari sarà una rotazione attorno alla retta *r* comune ai quattro piani.

Se questi 4 piani appartengono allo stesso fascio improprio, la composizione delle relative simmetrie planari sarà una traslazione di un vettore perpendicolare ai piani dati.

Negli altri casi si dimostra che ci si può ricondurre alla composizione di una rotazione attorno a una retta *r* e di una traslazione di un vettore *v* parallelo alla retta *r*.

Si ottiene pertanto una *roto-traslazione* nello spazio 3D (figura 8) detta anche, più semplicemente, *avvitamento*.

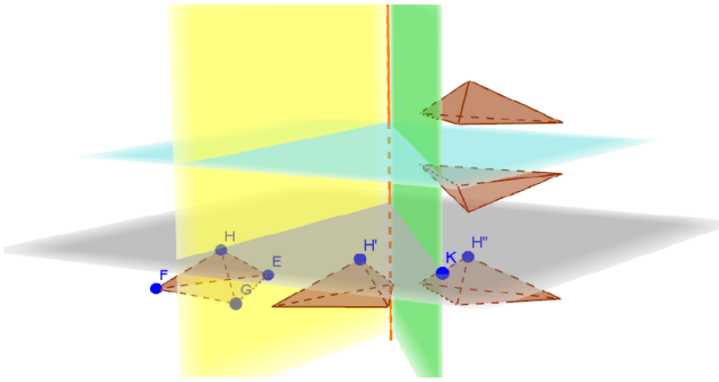


Figura 8

La composizione delle 4 simmetrie planari si comprende meglio osservando lo schema della figura 9.

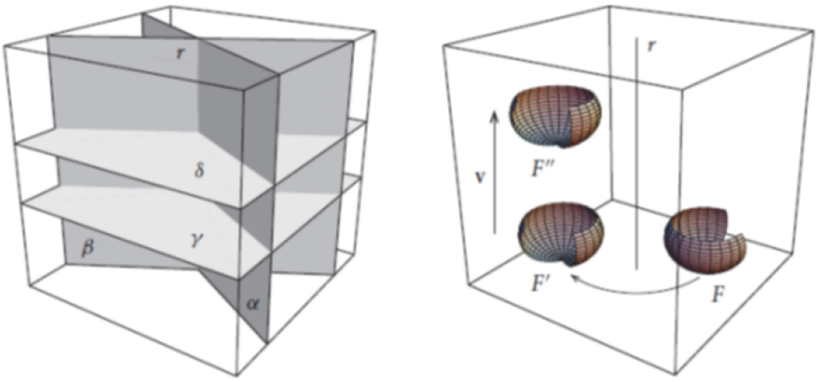


Figura 9 - Roto-traslazione (figura dal libro: M. Dedò, *Forme*, Decibel).

A questo punto si procede con la fase 2, in cui la classe lavora sulla scheda 5 in un ambiente collaborativo e di confronto attraverso una discussione collettiva orchestrata dal docente della durata di circa 30 minuti.

Scheda studente 5(a): Classificazione delle isometrie dello spazio

Le isometrie 3D sono classificate, come abbiamo visto, in *pari* o *dispari*.

Come abbiamo visto, una isometria si dice *pari* se non cambia l'orientamento nello spazio di un triedro orientato (ossia di un tetraedro ABCD orientato, per esempio, in verso destrorso). Altrimenti si dice *dispari*.

Come abbiamo visto, le simmetrie planari (dette anche *riflessioni* rispetto a un piano), sono dispari; è esperienza comune quella della riflessione rispetto a uno specchio piano, che cambia l'orientamento. Banalmente, la mano destra ha come immagine una mano sinistra (e viceversa); una scarpa destra si specchia in una scarpa sinistra, ecc.

Componendo tra loro due isometrie dispari, si ottiene una isometria pari.

Componendo tra loro tre isometrie dispari, si ottiene una isometria dispari.

Componendo tra loro quattro isometrie dispari, si ottiene una isometria dispari.

La composizione di isometrie ricorda quindi l'aritmetica dell'addizione tra numeri pari e numeri dispari (pari+pari=pari; pari+dispari=dispari, ecc.).

Dopo l'esplorazione dei vari tipi di composizione delle isometrie dello spazio, si può enunciare il seguente teorema (uno dei tanti teoremi dovuti ad Eulero).

Teorema. *Una isometria dello spazio tridimensionale si ottiene tramite la composizione di al più 4 riflessioni.*

Un'isometria pari, se non è l'identità, può essere una traslazione (composizione di 2 simmetrie planari), una rotazione attorno a una retta (composizione di 2 simmetrie planari) oppure una roto-traslazione (composizione di 4 isometrie planari).

Un'isometria dispari può essere una simmetria planare (1 sola simmetria), una glisso-simmetria (composizione di 3 simmetrie planari) oppure una roto-simmetria (composizione di 3 simmetrie planari).

Possiamo riassumere quanto visto nella seguente tabella. Le isometrie sono suddivise in *pari* o *dispari* e tra parentesi è riportato il numero delle simmetrie planari che occorre comporre per ottenere i diversi tipi di isometrie 3D.

Ogni isometria dello spazio (3-dimensionale)
è composizione di al più 4 simmetrie planari

Isometrie pari	Isometrie dispari
•Identità (0)	•Simmetrie planari (1)
•Traslazioni (2)	•Roto-simmetria (3)
•Rotazioni (2)	•Glisso-simmetria (3)
•Roto-traslazioni (4)	

7.4 Problem solving sulle isometrie

7.4.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione alle isometrie nello spazio tridimensionale
- **Ordine di scuola:** secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado
- **Materiali e strumenti:** GeoGebra classico 5, GeoGebra Classroom
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli strumenti del software GeoGebra

- conoscenza degli elementi di base della geometria dello spazio
- conoscenza di concetti di traslazione, rotazione e simmetria centrale

- **Obiettivi:**
    - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alle isometrie dello spazio
    - acquisire conoscenza e costruire significati riguardo alle caratteristiche di alcune composizioni di isometrie nello spazio tridimensionale
    - operare con la composizione di simmetrie assiali nei vari casi possibili e verificarne le principali proprietà
    - operare con la composizione di rotazioni aventi centri distinti e verificarne le principali proprietà
    - modellizzare una situazione reale esprimendola in termini di trasformazioni geometriche
    - risolvere problemi legati al mondo reale sfruttando le conoscenze acquisite riguardo alle isometrie del piano

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è suddivisa in due fasi, con rispettive schede sulla quali la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti. Le schede da consegnare ai gruppi sono indicative e prevedono un percorso strutturato affinché gli studenti giungano alla risoluzione dei problemi proposti in maniera graduale. In particolare, il docente può scegliere di utilizzare le schede come canovaccio, fornendo le indicazioni agli studenti mano a mano che procedono con il lavoro, personalizzando i suggerimenti e gli spunti in base alle necessità di ogni singolo gruppo. In alternativa, è possibile consegnare le schede direttamente alla classe, lasciando agli studenti la scelta di utilizzare o meno le indicazioni proposte. È tuttavia consigliabile che alla classe venga lasciato il tempo di elaborare strategie autonomamente prima di fornire qualsiasi tipo di informazione riguardo lo svolgimento dell'attività; in questo modo gli studenti hanno la possibilità di approcciarsi con il problem solving, sviluppando pensiero critico e scoprendo proprietà in prima persona. Potrebbe succedere che alcuni studenti giungano alla soluzione del tutto autonomamente, senza la necessità di fornire loro particolari indicazioni; in questo caso, si consiglia comunque di chiedere ai gruppi in questione di risolvere i problemi dati seguendo il percorso previsto dalle schede. Questo tipo di approccio permette alla classe da un lato di verificare la correttezza delle azioni svolte e della risoluzione ottenuta individualmente, dall'altro di confrontare metodologie di lavoro differenti, offrendo interessanti spunti di riflessione che spingano gli studenti a ragionare su quali strategie risultano essere più efficaci e convenienti rispetto ad altre.
  Per quanto detto finora è chiaro che l'insegnante ha un ruolo attivo ed è coinvolto nel lavoro svolto da ognuno dei gruppi; nel dettaglio, il docente osserva attentamente lo stato di avanzamento della ricerca dei vari gruppi e monitora la situazione, andando ad intervenire laddove lo ritiene necessario o vengano fatte particolari richieste dagli studenti.
  La fase 1 risulta essere propedeutica a quella successiva; in particolare, nella scheda 1 i gruppi lavorano sulla composizione di simmetrie assiali e di rotazioni aventi centri

distinti. Nel primo caso l'obiettivo è quello di mettere in evidenza quali trasformazioni si ottengono componendo due simmetrie, nel secondo si opera all'inverso, ovvero si vuole offrire agli studenti la possibilità di riflettere su quali simmetrie è necessario comporre al fine di ottenere la trasformazione data dalla composizione di due rotazioni di un certo tipo. In questo frangente, la classe può utilizzare il software GeoGebra per visualizzare con maggiore facilità la situazione proposta; questo tipo di approccio ha un valore euristico molto importante, che permette agli studenti di mettere in luce elementi utili allo svolgimento dell'attività ed elaborare congetture in maniera intuitiva. È importante sottolineare però che tale fase esplorativa deve necessariamente essere seguita da giustificazioni e verifiche eseguite in maniera il più possibile formale, che spingano gli studenti ad argomentare opportunamente quanto ottenuto.

Nella fase 2 i gruppi lavorano alla risoluzione di un problema non molto noto e di si possono ottenere le soluzioni con l'uso dei numeri complessi o della geometria euclidea. Si tratta di un problema elaborato in un contesto reale e si chiede alla classe di matematizzare la situazione proposta in modo tale da ricercare una soluzione sfruttando isometrie e relative composizioni. In questo modo gli studenti, partendo da domande concrete giungono alla soluzione del problema attraverso la costruzione di modelli matematici, sottolineando l'importanza della capacità di individuare ed applicare concetti e procedure della matematica per tradurre il problema reale in un contesto matematico. Una volta elaborata la risoluzione matematica, il passo ulteriore che i gruppi sono chiamati a fare riguarda l'interpretazione dei risultati trovati nel mondo reale.

Anche in questo caso l'insegnante monitora il lavoro svolto dai vari gruppi, suggendo agli studenti di utilizzare GeoGebra per esplorare la situazione in maniera dinamica. Al termine dell'attività il docente guida la classe in una discussione collettiva in cui si chiede agli studenti di esporre le strategie elaborate nel corso della risoluzione e le metodologie adottate. In questo frangente, l'esposizione di fronte alla classe spinge da un lato gli studenti a lavorare sulle proprie capacità di argomentazione e giustificazione, dall'altro permette loro di venire in contatto con idee potenzialmente diverse tra loro che possono offrire interessanti spunti per il confronto e la riflessione.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 3-4 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza o a distanza

7.4.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività prevede due fasi in cui la classe lavora a gruppi di 3\4 studenti; nella fase 1 i gruppi lavorano sulla relativa scheda per 40 minuti. Inizialmente è consigliabile fornire ai gruppi soltanto la consegna, dando agli studenti il tempo di lavorarci autonomamente. Le indicazioni vengono fornite ai gruppi con modalità scelte dal docente, ma separatamente rispetto alla consegna della scheda con i quesiti proposti.

APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra
Problem solving sulle isometrie
Scheda studente 1(c1)

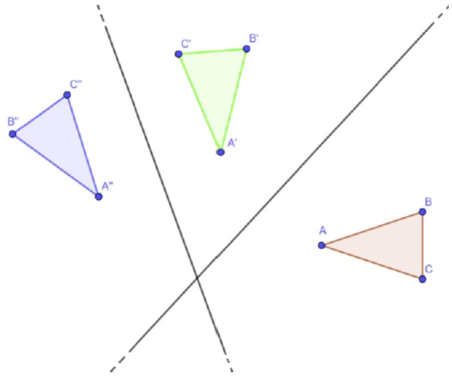


Figura 1

1. Cosa si ottiene componendo tra loro due simmetrie con assi paralleli e distinti?
2. Cosa si ottiene componendo tra loro due simmetrie con assi incidenti (come nella figura a lato)?
3. Sul piano cartesiano, cosa si ottiene componendo una rotazione di 90° intorno all'origine con una rotazione di 90° intorno al punto di coordinate (1;0)?

Vengono riportate di seguito le indicazioni utili alla risoluzione dell'esercizio con le relative soluzioni.

Per rispondere alle tre domande:

Prendi un foglio e disegna un triangolo, traccia una retta r e costruisci ABC il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC, nuovamente traccia un'altra retta s parallela ad r e costruisci $A''B''C''$, simmetrico di $A'B'C'$.

1. Qual è l'isometria che porta ABC in $A''B''C''$?

2. Prova a descrivere il vettore che porta ABC in $A''B''C''$. Cosa puoi dire della sua direzione, del suo verso e della sua lunghezza, in relazione alla direzione degli assi di simmetria e alla loro distanza? (Un foglio quadrettato può facilitarti la risposta).

3. Che cosa accade se i due assi paralleli, anziché essere distinti, sono coincidenti?

Puoi osservare lo stesso risultato utilizzando due specchi al posto delle rette r ed s.

Effettuando la costruzione indicata nella scheda è possibile concludere[2] che la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli corrisponde ad una traslazione di vettore avente direzione perpendicolare agli assi, con verso dal primo al secondo asse e modulo pari al doppio della distanza tra gli assi.
Nel caso in cui i due assi paralleli sono coincidenti la composizione delle due simmetrie corrisponde all'identità; infatti, la prima simmetria manda il triangolo ABC in $A'B'C'$. Quest'ultimo, se si effettua la simmetria rispetto allo stesso asse, viene mandato nuovamente in ABC.

[2] Per la visualizzazione e la verifica della proprietà si veda a pag. 120-121

Aiutandoti ancora con un foglio quadrettato, disegna un nuovo triangolo ABC, successivamente fanne il simmetrico rispetto ad una retta r ottenendo un triangolo $A'B'C'$ e di nuovo il simmetrico di quest'ultimo rispetto ad una retta s perpendicolare ad r ottenendo un triangolo $A''B''C''$.

4. Come risultano tra loro i due triangoli ABC e $A''B''C''$?

5. Esistono altre due trasformazioni geometriche che, analogamente a quanto appena osservato con la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari, fanno sovrapporre il triangolo di partenza a quello di arrivo. Sapresti identificarle?

Prova a generalizzare il quesito precedente al caso con assi incidenti ma non perpendicolari, come mostrato in figura 1.

6. Dal primo triangolo ABC, all'ultimo come si può arrivare $A''B''C''$ in modo diretto?

7. Descrivi la rotazione che porta il triangolo di partenza a quello di arrivo (centro ed angolo di rotazione) in funzione della posizione reciproca dei due assi di simmetria.

Come conseguenza di quanto detto, spiega perché (vedi domanda 5) la composizione di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari equivale ad una rotazione di un angolo piatto, cioè ad una simmetria centrale.

Componendo due simmetrie assiali aventi assi incidenti si ottiene[3] una rotazione con centro nel punto di intersezione dei suddetti assi e angolo avente ampiezza doppia rispetto all'angolo formato dai due assi. Come conseguenza di ciò, per ottenere una simmetria centrale, ovvero una rotazione di 180°, è necessario comporre due simmetrie assiali aventi assi perpendicolari.

Per rispondere alla terza domanda, aiutati con il testo sotto riportato, eseguendo opportuni disegni, in modo da arrivare alla risoluzione del quesito. Lavora in un piano cartesiano.

Possiamo ottenere la prima rotazione (di centro l'origine) componendo nell'ordine la simmetria rispetto alla retta $y = -\ldots\ldots$ e la simmetria rispetto all'asse x. La seconda rotazione si può ottenere come composizione della simmetria rispetto all'asse x con la simmetria rispetto alla retta $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ che passa per (1; 0) e forma un angolo di 45° con l'asse x. Le due simmetrie rispetto all'asse x si …………………, rimangono le due simmetrie rispetto a $y = -\ldots\ldots$ e a $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, che si intersecano in $C(\ldots; \ldots)$ e formano fra loro un angolo di ……. La rotazione prodotto è dunque di …… intorno a C.

Per quanto visto in precedenza, una rotazione può essere ottenuta componendo due simmetrie assiali aventi assi incidenti nel centro della rotazione e che formano un angolo pari alla metà dell'angolo di rotazione. Dunque, la composizione delle due rotazioni è equivalente alla composizione di quattro simmetrie assiali con assi opportunamente scelti. Per comodità, si scelgono gli assi della seconda e della terza simmetria assiale in modo tale che coincidano; in questo modo, queste ultime si annulleranno nella composizione delle quattro simmetrie e ne

[3] Per la visualizzazione e la verifica delle proprietà enunciate si veda a pag. 122-123

rimarranno soltanto due, la prima e la quarta. In particolare, la prima rotazione ha centro nell'origine e angolo di 90°, dunque può essere ottenuta componendo due simmetrie assiali aventi assi che formano un angolo di 45° e che si intersecano nell'origine; una scelta possibile è quella di considerare nell'ordine le rette $y = -x$ e $y = 0$. Per quanto riguarda la seconda rotazione di centro il punto $(1; 0)$ e angolo di 90°, gli assi delle due simmetrie assiali dovranno formare tra loro un angolo di 45° ed essere incidenti nel suddetto punto. Per quanto detto poc'anzi, il primo degli assi si sceglie coincidente con $y = 0$, mentre il secondo si ottiene imponendo le opportune condizioni e utilizzando l'equazione in forma esplicita di una retta nel piano ($y = mx + q$):

- se l'angolo tra la retta cercata e l'asse x deve essere di 45°, allora $m = \tan 45° = 1 \rightarrow y = x + q$
- per ricavare il valore di q si sfrutta la condizione che impone che la retta passi per il punto $(1; 0) \rightarrow 0 = 1 + q \rightarrow q = -1$

Quindi l'asse della quarta simmetria corrisponde alla retta $y = x - 1$. A questo punto, viste le considerazioni fatte in precedenza riguardo alla scelta degli assi della seconda e della terza simmetria, la composizione delle due rotazioni del quesito corrisponde alla composizione di due simmetrie aventi assi $y = -x$ (retta rossa in figura 78) e $y = x - 1$ (retta verde in figura 78).

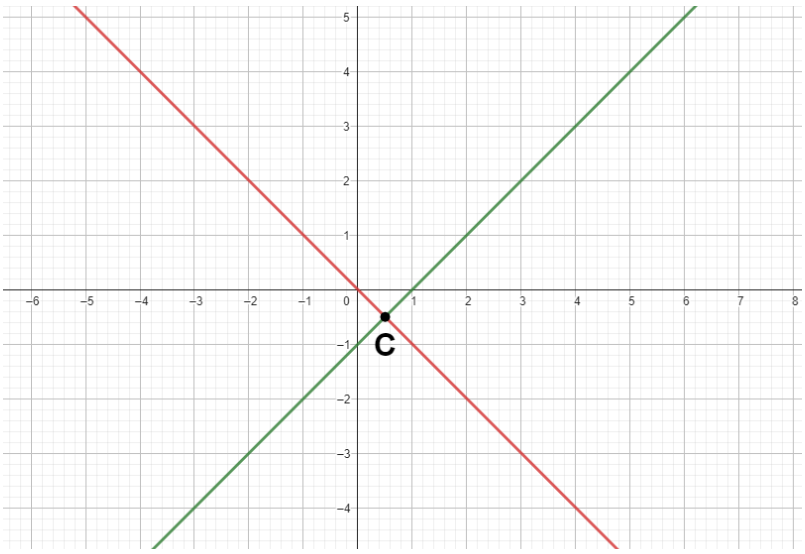


Figura 78

Tale composizione corrisponde, a sua volta, ad una rotazione avente centro nel punto di intersezione delle suddette rette, ovvero $C(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. Dato che le rette in questione formano tra un angolo di 90°, l'angolo di rotazione sarà pari a 180°, dunque si ottiene una simmetria centrale.

In definitiva, quindi, la composizione di due rotazioni di centri diversi è ancora una rotazione di angolo pari alla somma degli angoli delle rotazioni date e il cui centro si determina dall'intersezione delle due simmetrie che la determinano.

A questo punto si procede con la fase 2 e viene consegnata ai gruppi la scheda 2 a cui vengono dedicati 60 minuti. Anche in questo caso le indicazioni che hanno lo scopo di guidare la classe nella risoluzione del problema vengono fornite separatamente.

Scheda studente 2(c1)

Figura 1

Ho trovato un messaggio in una bottiglia: "Sull isola di Pao-pao cerca il pozzo, da lì conta i passi fino alla quercia, gira a sinistra di 90° e conta un ugual numero di passi, fino al punto *R*; torna al pozzo e da lì vai fino all'olmo, gira a destra di 90, conta un ugual numero di passi fino al punto *S*. A metà tra *R* e *S* troverai il tesoro." Vado nell'isola di Pao-pao, ma del pozzo non c'è più traccia. Ci sono ancora la quercia e l'olmo. Riuscirò a trovare il tesoro?

Di seguito si riportano le informazioni utili alla risoluzione del problema.

Prova a ricostruire il messaggio della bottiglia e a cercare la soluzione, seguendo i suggerimenti di seguito riportati:

Traccia su un foglio due punti Q e O che rappresentano rispettivamente quercia e olmo la cui posizione non va modificata.
Scegli una qualunque posizione per il pozzo e segui le istruzioni segnando il punto di arrivo.
Scegli una nuova posizione per il pozzo e ripeti nuovamente le istruzioni segnando il punto di arrivo.

1. Cosa osservi?

Ricorda che, come osservato nella scheda precedente, il prodotto di 2 rotazioni con angoli di 90°, anche con centri diversi, equivale ad una rotazione di 180°, cioè ad una simmetria centrale.

2. Esistono punti fissi, cioè che non variano di posizione a seguito della trasformazione (detti anche punti uniti)? Per rispondere, puoi aiutarti anche usando la seguente figura, dove il punto Q (quercia) e il punto O (olmo) sono fissati, i punti P_1 e P_2 sono stati posizionati a caso, e di conseguenza restano fissati per ciascuno di essi i punti R_1, S_1 e R_2, S_2. Ricorda inoltre cosa ti viene richiesto dal testo.

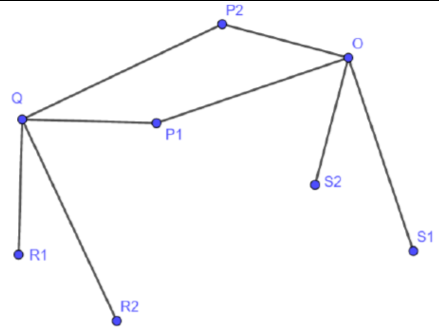


Figura 2

3. Dopo che hai trovato la soluzione, prova a giustificare il tutto a partire dalle conoscenze che possiedi sulle rotazioni.

Utilizzando GeoGebra per ricostruire il messaggio scegliendo una qualunque posizione per il pozzo si può osservare che, muovendo quest'ultimo punto, la posizione del tesoro rimane sempre la stessa. Per giustificare tale affermazione occorre tradurre il problema in un contesto matematico utilizzando le isometrie; la configurazione è la seguente:

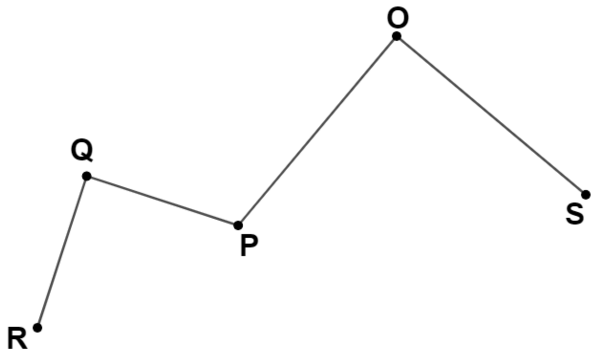


Figura 79

Partendo da R, si esegue una rotazione di 90° con centro nel punto fissato Q e si ottiene P. Si effettua quindi una seconda rotazione di 90° avente centro in O fissato e si ottiene S. Dunque, per ottenere il punto S da R si effettuano due rotazioni di 90° aventi centri distinti.
Per quanto visto nella scheda precedente, componendo le due rotazioni suddette si ottiene una rotazione di 180°, ovvero una simmetria centrale; dunque, l'isometria che permette di trasformare R in S è una simmetria centrale. Il centro di simmetria corrisponde con il punto medio tra R ed S, che per le informazioni date nel testo del problema corrisponde con il tesoro. Tale punto, indipendentemente dalla posizione di R, P ed S, per le proprietà della simmetria centrale è un punto fisso, la cui posizione, come emergerà in seguito, dipende unicamente dai punti Q ed O e dagli angoli delle due rotazioni di cui si effettua la composizione, che sono tutti fissati. Questo, quindi, giustifica il fatto che scegliendo una qualsiasi posizione per P la collocazione del tesoro non cambia.
A questo punto, per individuare il tesoro si sceglie dapprima un qualunque "pozzo" e successivamente è sufficiente esprimere le due rotazioni come composizione di due simmetrie

assiali opportune analogamente a quanto svolto nella scheda precedente. In particolare, la prima rotazione di 90° intorno al punto Q si ottiene componendo due simmetrie i cui assi, in ordine r ed s, possono essere presi come segue:

- r corrispondente ad una retta passante per Q e che forma con la retta individuata da Q e P un angolo di 45°
- s corrispondente alla retta individuata da Q e P

Per quanto riguarda la seconda rotazione, gli assi, in ordine u e v, possono essere i seguenti:

- u corrispondente con s
- v corrispondente con la retta passante per O, che forma con u un angolo di 45°

A questo punto, componendo le quattro simmetrie, quelle rispetto a s ed u si annullano a vicenda e rimangono le due simmetrie rispetto a r e rispetto a v, che formano tra loro un angolo di 90° e dunque generano la simmetria centrale, il cui centro, che corrisponde al tesoro, a questo punto può essere individuato determinando l'intersezione di r e v.
È interessante notare che il punto P viene utilizzato unicamente nella determinazione degli assi s e u, che, per le scelte fatte, non compaiono nella determinazione della posizione del tesoro; emerge dunque l'indipendenza della collocazione del tesoro rispetto alla scelta di P.

7.5 $\mathbb{P}_3$, isometrie per definire, isometrie per dimostrare, isometrie per risolvere

7.5.1 Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** confronto tra la geometria euclidea classica e la geometria delle isometrie

- **Ordine di scuola:** secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado

- **Materiali e strumenti:** GeoGebra

- **Prerequisiti:**
    - conoscenza degli strumenti di base del software GeoGebra
    - conoscenza degli elementi di base della geometria euclidea
    - conoscenza delle principali caratteristiche e proprietà delle isometrie

- **Obiettivi:**
    - comprendere l'importanza di fare scelte convenienti nella risoluzione di problemi
    - abituare la classe a "cambiare punto di vista"
    - far comprendere che argomentare e dimostrare utilizzando le isometrie può comportare svariati vantaggio quando la situazione si presta ad essere interpretata mediante le trasformazioni geometriche

- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività prevede cha la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti ed è suddivisa in tre fasi. In ognuna di esse lo scopo è quello di mettere a confronto la geometria euclidea classica e la geometria delle isometrie facendo riferimento rispettivamente a definizioni, dimostrazioni e risoluzione di problemi. In particolare, ciò che è importante è che alla classe venga permesso di familiarizzare con aspetti della geometria non sempre affrontati, facendo osservare agli studenti che in ambito geometrico esistono modalità e metodologie differenti da quelle di Euclide. Il percorso progettato mira, dunque, allo sviluppo di pensiero critico, di capacità di mettere a confronto strategie, di interpretare una determinata situazione in ambiti differenti e utilizzando conoscenze di vario genere. Tutto ciò permette agli studenti di lavorare su abilità e competenze di alto livello, spingendoli ad osservare non soltanto problemi e teoremi matematici da diversi punti di vista, ma anche la realtà quotidiana. Le trasformazioni, infatti, appartengono a pieno titolo alla realtà che ci circonda; il punto è saperle vedere ed interpretare. L'attività in questione è stata progettata proprio per aiutare la classe ad esplorare in maniera non superficiale il mondo fisico, sviluppando un occhio attento che permetta di cogliere in particolar modo l'aspetto più prettamente matematico della vita quotidiana.

Nella fase 1 l'attenzione è posta sulle definizioni; nel dettaglio, vengono proposte due differenti definizioni di parallelogramma e, partendo da quella che più frequentemente si trova nei libri di testo, viene avviato un percorso che conduce i gruppi ad una nuova definizione del suddetto concetto. In un primo momento è previsto che gli studenti utilizzino il software GeoGebra per costruire un parallelogramma ed elaborare congetture riguardo alle proprietà di quest'ultimo. In questo frangente, l'esplorazione dinamica con il software ha un valore euristico significativo, in quanto permette ai gruppi di intuire la veridicità di affermazioni ed ipotesi.

In un secondo momento viene chiesto agli studenti di dimostrare formalmente le proprietà individuate; viene dunque fatto un passo ulteriore, che spinge la classe a riflettere sul carattere non dimostrativo delle visualizzazioni e delle verifiche svolte graficamente. In questo frangente, il docente ha il compito di mettere in luce tale aspetto, partecipando attivamente all'attività di ogni singolo gruppo e spronando gli studenti a pensare e ragionare ponendo domande e offrendo spunti.

A questo punto si fa osservare alla classe come sia possibile scambiare quella che prima era una proprietà con una definizione e viceversa, mettendo in luce il fatto che quanto svolto in precedenza garantisce e dimostra l'equivalenza delle definizioni elaborate.

Un'analoga attività potrebbe essere proposta per i triangoli equilateri; il docente può scegliere di utilizzare tale spunto per fornire eventuali opportunità di approfondimento alla classe oppure può decidere di predisporre una prova di verifica, in modo tale da ottenere un feeedback riguardo alle conoscenze e alle competenze acquisite riguardo all'argomento.

Nella fase 2 i gruppi lavorano con un ben noto teorema che riguarda "rette parallele tagliate da una trasversale". In particolare, la scheda prevede che gli studenti, guidati da una serie di indicazioni, elaborino due dimostrazioni: una in geometria euclidea e una in geometria delle trasformazioni. Lo scopo è quello di spingere la classe a mettere a confronto le due dimostrazioni proposte, andando a riflettere sulla semplicità di una rispetto all'altra e sull'importanza di saper adottare un punto di vista differente in termini di convenienza ed efficacia.

Nella fase 3 viene proposto un problema e si conducono gli studenti nella risoluzione di quest'ultimo utilizzando due differenti metodologie. In questo frangente, l'attenzione è dunque posta sulla scelta della strategia risolutiva, che comporta tutta una serie di valutazioni e riflessioni volte a stabilirne la convenienza. Questo tipo di approccio mira a fare in modo che la classe si abitui a ricercare percorsi diversi, senza focalizzarsi su determinate strategie di approccio, e a valutare attentamente le scelte fatte, non soltanto per quanto concerne la matematica, ma anche e soprattutto per affrontare i problemi che la vita ci pone quotidianamente.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 3 ore
- **Spazi:** aula informatica
- **Modalità:** didattica in presenza

7.5.2 Attività proposte e soluzioni

L'attività è suddivisa in tre fasi e prevede che la classe lavori a gruppi di 3\4 studenti sulle tre relative schede. Viene dapprima consegnata la scheda 1 ai gruppi, che lavorano su di essa per 60 minuti.

APPROFONDIMENTI E PROBLEMI: risolvi problemi, argomenta e dimostra
IP3, isometrie per … definire
isometrie per … dimostrare
isometrie per … risolvere
Scheda studente 1(c2): il parallelogramma

La definizione è una scelta

Definizione di parallelogramma

"Il parallelogramma è un quadrilatero convesso che ha i lati opposti paralleli"

Questa definizione di parallelogramma si trova frequentemente nei libri di testo.
Disegna un parallelogramma e fai una crocetta sulle affermazioni vere:

- ☐ due lati opposti sono congruenti
- ☐ i lati opposti sono congruenti
- ☐ i lati sono tutti e quattro congruenti
- ☐ gli angoli opposti sono congruenti
- ☐ gli angoli sono tutti e quattro congruenti
- ☐ gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari
- ☐ ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti
- ☐ le diagonali sono bisettrici degli angoli
- ☐ le diagonali sono perpendicolari
- ☐ le diagonali sono congruenti

- ☐ le diagonali si incontrano nel loro punto medio
- ☐ ha un centro di simmetria

Costruisci con *GeoGebra* un parallelogramma seguendo la procedura di seguito descritta.

Costruzione di un parallelogramma con *GeoGebra*
1. costruisci un ***Punto*** A
2. costruisci due segmenti e chiamali PQ e RS
3. con ***Compasso*** costruisci due circonferenze di centro A e raggio rispettivamente PQ e RS
4. con ***Punto su oggetto*** costruisci un punto B su una circonferenza e un punto D sull'altra
5. costruisci i ***Segmenti*** AB e AD

6. con ***Retta parallela*** costruisci una retta per D parallela ad AB e una retta per B parallela ad AD
7. con ***Intersezione*** costruisci il punto C comune alle due parallele
8. con ***Poligono*** costruisci il quadrilatero ABCD
9. con ***Mostra/ Nascondi oggetto*** nascondi le rette parallele e le circonferenze
10. osserva nella *Vista Algebra* le misure dei lati di ABCD
11. segna gli ***Angoli*** del parallelogrammo

❖ Muovendo i punti B o D puoi far variare gli angoli del parallelogramma e muovendo i punti Q o R ne puoi far variare i lati a tuo piacimento.

❖ **Verifica** con gli strumenti di *GeoGebra* la correttezza delle tue risposte.

❖ **Dimostra** adesso le proprietà che hai segnato.

In sintesi, la definizione proposta utilizza come proprietà il parallelismo delle due coppie di lati e le altre proprietà segnate con le crocette derivano da questa.

È possibile utilizzare un'altra proprietà fra quelle segnate per una nuova definizione di parallelogramma, ad esempio:

Definizione di parallelogramma 2

"Il parallelogramma è un quadrilatero convesso con un centro di simmetria"

Costruisci con *GeoGebra* il quadrilatero servendoti della proprietà utilizzata nella definizione 2.

Costruzione di un parallelogramma con *GeoGebra*
1. costruisci due ***Punti*** A e B e un terzo punto, il centro di simmetria, che chiami O
2. costruisci con ***Simmetria centrale*** i simmetrici di A e B rispetto ad O e chiamali nell'ordine C e D
3. con ***Poligono*** costruisci il parallelogramma ABCD
4. osserva nella *Vista Algebra* le misure dei lati di ABCD
5. segna gli ***Angoli*** del parallelogrammo

❖ ***Muovi*** i punti A o B per far variare il parallelogramma a tuo piacimento

❖ **Verifica** con gli strumenti di *GeoGebra* che le altre proprietà segnate derivano dalla definizione 2. Ricorda di verificare anche la proprietà utilizzata nella definizione iniziale.

❖ **Dimostra** adesso le proprietà derivate.

Considerazioni finali
Abbiamo provato che delle due definizioni l'una implica l'altra, cioè:
● se definiamo parallelogramma un quadrilatero convesso con i lati opposti paralleli possiamo dimostrare che esso possiede un centro di simmetria.
● se definiamo parallelogramma un quadrilatero convesso con un centro di simmetria possiamo dimostrare che esso ha i lati opposti paralleli.
Questo ci consente di concludere che le definizioni 1 e 2 sono **equivalenti**.

Possiamo però chiederci quale delle due definizioni ci permette di dimostrare le varie proprietà nel modo più semplice.

☐ Definizione 1 ☐ Definizione 2

Motiva la tua risposta.

L'esplorazione con GeoGebra permette di fare congetture riguardo alle proprietà del parallelogramma costruito utilizzando la definizione 1. Queste vengono elencate di seguito, insieme alle relative dimostrazioni, nelle quali viene fatto riferimento alla seguente figura:

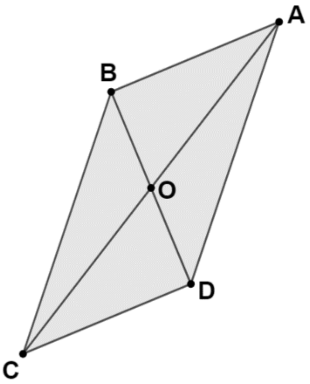


Figura 80

- i lati opposti sono congruenti

I triangoli ABC e ACD sono congruenti, in quanto:
- $B\hat{C}A \cong C\hat{A}D$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli AD e BC tagliati dalla trasversale AC
- $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale AC
- AC è in comune

Quindi, si può concludere che $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$.

- due lati opposti sono congruenti

Segue dalla precedente proprietà.

- gli angoli opposti sono congruenti

Per la congruenza dei triangoli ABC e ACD, segue che:
- $C\hat{B}A \cong A\hat{D}C$, perché elementi corrispondenti di triangoli congruenti
- $B\hat{C}D \cong B\hat{A}D$, perché somme di angoli congruenti. In particolare, $B\hat{C}D = B\hat{C}A + A\hat{C}D = C\hat{A}D + B\hat{A}C = B\hat{A}D$

- gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari

Gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ sono coniugati interni dei segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale AD e dunque sono supplementari.
Analogamente vale per gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ relativamente ai segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale BC, per gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ relativamente ai segmenti paralleli AD e BC tagliati dalla trasversale AB e per gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{D}$ relativamente ai segmenti paralleli AD e BC tagliati dalla trasversale CD.

- ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti

La diagonale AC divide il parallelogramma nei due triangoli ABC e ACD, la cui congruenza è stata verificata in precedenza.
La diagonale BD divide il parallelogramma nei triangoli BCD e ABD, per i quali segue che:

- $C\hat{B}D \cong B\hat{D}A$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli BC e AD tagliati dalla trasversale BD
- $C\hat{D}B \cong A\hat{B}D$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli CD e AB tagliati dalla trasversale BD
- BD è in comune

Quindi, i due triangoli sono congruenti.

- le diagonali si incontrano nel loro punto medio

I triangoli ABO e CDO sono congruenti, in quanto:

- $AB \cong CD$, perché lati opposti di un parallelogramma sono congruenti per la proprietà dimostrata in precedenza
- $O\hat{B}A \cong C\hat{D}O$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale BD
- $B\hat{A}O \cong O\hat{C}D$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale AC

Dunque, si può concludere che $AO \cong OC$ e $BO \cong OD$, ovvero che le diagonali si intersecano in O, che corrisponde con il punto medio di entrambe.

- c'è un centro di simmetria

Il centro di simmetria corrisponde con il punto O di intersezione delle due diagonali. Infatti, dato che $AO \cong OC$, per quanto dimostrato in precedenza, A corrisponde a C nella simmetria di centro O.
Analogamente, B corrisponde a D nella simmetria di centro O, in quanto $BO \cong OD$.
Preso un punto P generico su AB, il segmento PO interseca CD nel punto P'. Per dimostrare che P e P' sono corrispondenti nella simmetria di centro O è necessario mostrare che $PO \cong OP'$.

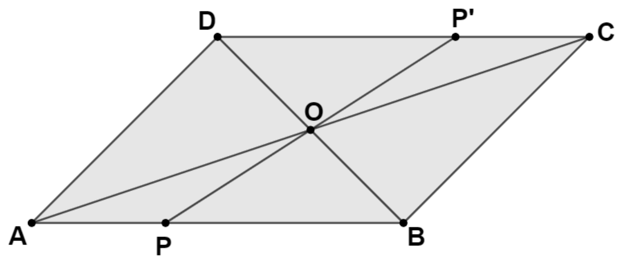


Figura 81

I triangoli $P'CO$ e POA sono congruenti, in quanto:

- $P'\hat{C}O \cong P\hat{A}O$, perché angoli alterni interni formati dai segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale AC
- $P'\hat{O}C \cong A\hat{O}P$, perché angoli opposti al vertice
- $AO \cong OC$, perché O è il punto medio delle diagonali del parallelogramma

Dunque, si può concludere che $PO \cong OP'$ e dato che P è un generico punto di AB, quanto dimostrato vale $\forall P \in AB$. Inoltre, è possibile ripetere il ragionamento scegliendo il punto P generico su un lato qualsiasi del parallelogramma e il corrispondente punto P' sul lato opposto. Quindi, si può concludere che, O è il centro di simmetria del parallelogramma.
A questo punto si lavora con la definizione 2; in particolare, se O è il centro di simmetria del parallelogramma, i vertici dovranno corrispondersi nella simmetria di centro O. L'unica possibilità è che A e C siano simmetrici rispetto a O e che C e D siano simmetrici rispetto a O. Dunque, nella simmetria i segmenti AB e CD si corrispondono e lo stesso vale per BC e DA. Di conseguenza, al vertice $\hat{A}$, formato dai segmenti AB e AD, corrisponde il vertice $\hat{C}$, formato dai rispettivi segmenti corrispondenti nella simmetria di centro O, ovvero CD e CB. Inoltre, al vertice $\hat{B}$, formato dai segmenti AB e BC, corrisponde al vertice $\hat{D}$, formato dai rispettivi segmenti corrispondenti nella simmetria di centro O, ovvero CD e DA.
Da questa premessa è semplice dimostrare le seguenti proprietà del parallelogramma utilizzando la definizione 2:

- i lati opposti sono congruenti

Dato che una simmetria centrale conserva le lunghezze dei segmenti, si può concludere che $AB \cong CD$ e $BC \cong DA$

- due lati opposti sono congruenti

Segue dalla precedente proprietà.

- gli angoli opposti sono congruenti

Dato che la simmetria centrale conserva l'ampiezza degli angoli segue che $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$.

- gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari

Dato che la simmetria centrale conserva la direzione, $DA||BC$ e $AB||CD$.
I vertici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono coniugati interni formati dalla prima coppia di segmenti paralleli tagliati dalla trasversale AB e dunque sono supplementari.
Analogamente vale per i vertici $\hat{C}$ e $\hat{D}$ formati dalla medesima coppia di segmenti paralleli tagliati dalla trasversale CD.
Inoltre, le coppie di vertici $\hat{A}$, $\hat{D}$ e $\hat{B}, \hat{C}$ sono coniugati interni formati dalla seconda coppia di segmenti paralleli tagliati rispettivamente dalle trasversali DA e BCe dunque coppie di angoli supplementari.

- ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti

I triangoli ACD e ABC sono congruenti, in quanto:

- $DA \cong BC$, perché la simmetria rispetto a O conserva la lunghezza dei segmenti
- $AB \cong CD$, perché la simmetria rispetto a O conserva la lunghezza dei segmenti
- AC è in comune

Analogamente, triangoli ABD e BCD sono congruenti, in quanto:

- $DA \cong BC$, perché la simmetria rispetto a O conserva la lunghezza dei segmenti

- $AB \cong CD$, perché la simmetria rispetto a O conserva la lunghezza dei segmenti
- BD è in comune

- le diagonali si incontrano nel loro punto medio

A e C si corrispondono nella simmetria di centro O, dunque $AO \cong OC$.
B e D si corrispondono nella simmetria di centro O, dunque $BO \cong OD$.

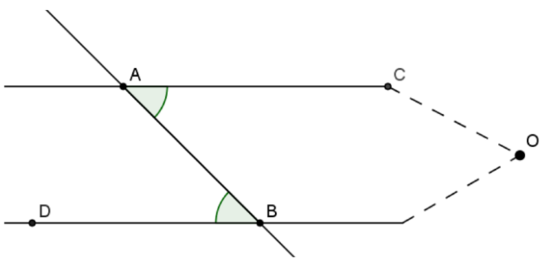
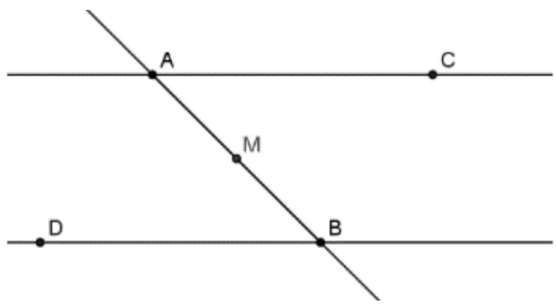
- i lati opposti sono paralleli

Dato che la simmetria centrale conserva la direzione, $DA||BC$ e $AB||CD$.
È chiaro che la definizione 2 permette di dimostrare le varie proprietà in modo più semplice; infatti, una volta stabiliti i punti, i segmenti e gli angoli che si corrispondono nella simmetria di centro O, è sufficiente sfruttare le proprietà e gli invarianti di quest'ultima per verificare facilmente le affermazioni segnate.
A questo punto viene consegnata ai gruppi la scheda 2, alla quale vengono dedicati 60 minuti.

Scheda studenti 2(c2): la dimostrazione

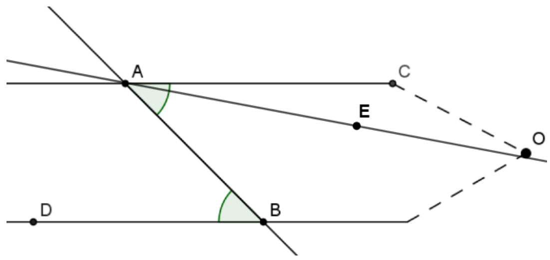
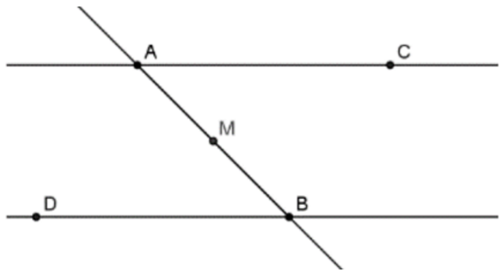
La dimostrazione è una scelta:
Geometria Euclidea Classica *o* Geometria delle Isometrie*?*

Teorema
Se due rette di un piano tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni uguali allora le due rette sono parallele

Geometria Euclidea	**Geometria delle Trasformazioni**
Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni. Ip $B\hat{A}C = A\hat{B}D$ Ts retta AC//retta BD	Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni. Ip $B\hat{A}C$ isometrico a $A\hat{B}D$ Ts retta AC//retta BD
Dimostriamo che retta AC è parallela alla retta BD.  Ragioniamo per assurdo. Neghiamo la tesi. Supponiamo che le rette AC e BD non siano………………………………… Ciò vuol dire, come si evince dalla figura che segue, che AC e BD ...., che chiamiamo O.	Dimostrazione Sia M il punto medio del segmento AB.  Nella simmetria di centro M, - a B corrisponde ………… - alla semiretta BA corrisponde la semiretta ……….., - all'angolo $A\hat{B}D$ corrisponde un angolo ad esso …………………… e avente un lato nella semiretta A… . Tale angolo deve essere situato da parte opposta di $A\hat{B}D$ rispetto alla retta …………

Osserva attentamente la figura. AOB è una “figura impossibile”! Sei in grado di dire perché? Esprimilo con parole tue.	Per l’unicità del trasporto degli angoli, tale angolo deve essere … . Ne segue che alla retta BD corrisponde la retta …… . Poiché le rette ……… e ……… si corrispondono in una simmetria centrale esse sono ………………….

Teorema
Due rette parallele formano con una qualunque trasversale angoli alterni interni uguali

Geometria Euclidea	**Geometria delle Trasformazioni**
Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni. Ip retta AC//retta BD Ts $B\hat{A}C = A\hat{B}D$	Siano AC e BD due rette, AB una loro trasversale, $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ una coppia di angoli alterni. Ip retta AC//retta BD Ts $B\hat{A}C$ è isometrico ad $A\hat{B}D$
Dimostrazione  Per dimostrare che $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ sono uguali, ragioniamo per assurdo, supponiamo cioè che …………….. Se, ad esempio $B\hat{A}C > A\hat{B}D$, allora possiamo dire che esiste una semiretta AE tale che $B\hat{A}E = A\hat{B}D$. Ne segue che la retta AE è ………………. alla retta BD. Se osservi attentamente la figura ti accorgi che essa è una “figura impossibile”. Sei in grado di dire perché? Esprimilo con parole tue. Si arriva alla stessa conclusione se si suppone che $B\hat{A}C < A\hat{B}D$. Ne segue che………………………………	Dimostrazione  Sia M il punto medio del segmento AB. Nella simmetria di centro M: - ad A corrisponde ………; - alla semiretta AB corrisponde la semiretta ……. - alla semiretta AC corrisponde la semiretta …………… Motiva l’ultima risposta. All’angolo $M\hat{A}C$ corrisponde l’angolo ….. Poiché gli angoli $M\hat{A}C$ e …… si corrispondono in una …………… essi sono ……………………

Per dimostrare il primo teorema in geometria euclidea si ragiona per assurdo, supponendo che le rette AC e BD non siano parallele. Dunque, esse si incontreranno in un punto O.

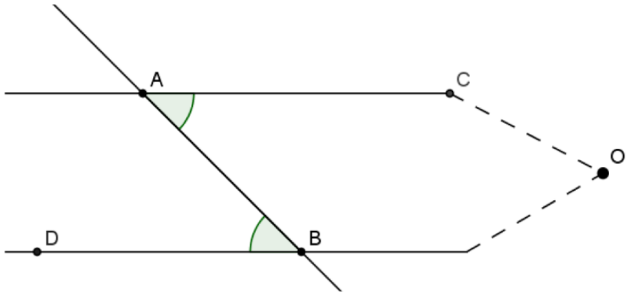


Figura 82

Per ipotesi $A\hat{B}D \cong B\hat{A}C$; in particolare, questo implica che nel triangolo AOB un angolo interno, ovvero $B\hat{A}O = B\hat{A}C$, è uguale all'angolo esterno $A\hat{B}D$. Poiché ciò è impossibile, dato che ogni angolo esterno di un qualsiasi triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso, si può concludere che AC e BD sono parallele.
Per quanto riguarda la dimostrazione in geometria delle trasformazioni, si fa riferimento alla seguente figura:

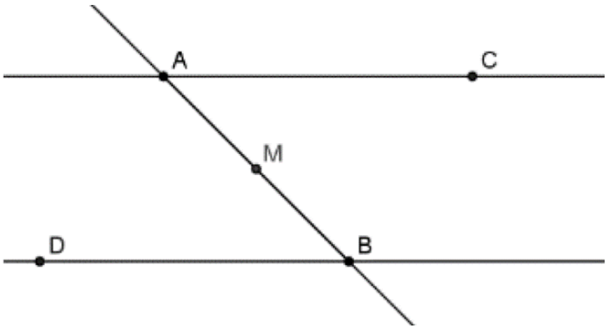


Figura 83

Nel dettaglio, è sufficiente osservare che, preso M il punto medio del segmento AB, nella simmetria di centro M:

- A corrisponde al punto B
- la semiretta AB corrisponde alla semiretta BA
- all'angolo $A\hat{B}D$ corrisponde un angolo di pari ampiezza, avente un lato nella semiretta AB e situato nel semipiano opposto di $A\hat{B}D$ rispetto alla retta AB, cioè $B\hat{A}C$.

Da tali considerazioni segue che la corrispondente della retta BD nella simmetria di centro M è la retta AC e dunque sono parallele.
Per dimostrare il secondo teorema in geometria euclidea si ragiona nuovamente per assurdo, supponendo che gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}D$ non siano uguali.

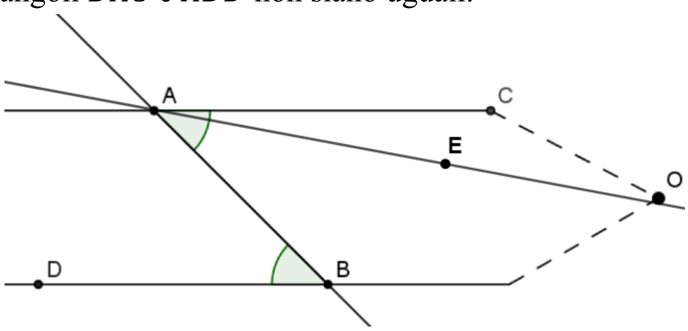


Figura 84

Ciò significa che uno dei due avrà ampiezza maggiore rispetto all'altro; in particolare, si suppone che $B\hat{A}C > A\hat{B}D$. Dunque, esisterà una retta AE, tale che $B\hat{A}E = A\hat{B}D$.
Per il teorema precedente, segue che le rette AE e BD sono parallele, in quanto formano angoli alterni interni congruenti. Ma per ipotesi, anche la retta AC è parallela a BD.
Quindi per il punto A passano due rette distinte, entrambe parallele alla retta BD, ma ciò è impossibile per l'unicità della retta parallela ad una retta data passante per un punto non appartenente a quest'ultima.
Se si suppone invece che $B\hat{A}C < A\hat{B}D$, analogamente esisterà una retta BF, tale che $F\hat{B}A = B\hat{A}C$. Dunque, per il teorema precedente, le rette BF e AC sono parallele. Ma per ipotesi, anche la retta BD è parallela ad AC, giungendo così ad un assurdo.
Quindi, dato che sia supponendo che $B\hat{A}C > A\hat{B}D$, sia supponendo che $B\hat{A}C < A\hat{B}D$ si giunge a contraddizioni, è possibile concludere che entrambe le affermazioni sono false e dunque $B\hat{A}C = A\hat{B}D$.
In geometria delle trasformazioni, invece, è sufficiente osservare attraverso la figura 83 che nella simmetria di centro M, corrispondente al punto medio del segmento AB:

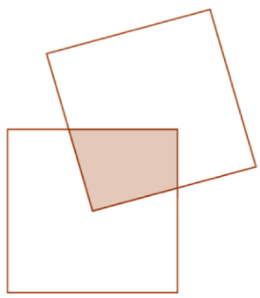
- A corrisponde al punto B
- la semiretta AB corrisponde alla semiretta BA
- alla semiretta AC corrisponde la semiretta parallela ad essa e con origine nel punto B, simmetrico di A, ovvero AC

Quindi, l'angolo $M\hat{A}C$ corrisponde all'angolo $M\hat{B}D$ nella simmetria di centro M e, dato che una simmetria centrale conserva le ampiezze degli angoli, essi sono congruenti.
A questo punto si procede con la fase 3 e la consegna della relativa scheda, su cui i gruppi lavorano per 60 minuti.

Scheda studenti 3 (c2): il problema del quadrato

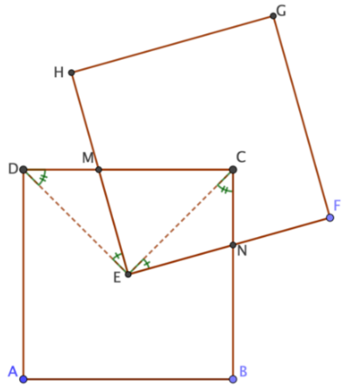
La strategia risolutiva di un problema è una scelta

Problema
Due quadrati di lato lungo 8 sono disposti in modo che il vertice di uno coincida col centro dell'altro. Quanto vale l'area della parte comune ai due quadrati? (VI Etniade, gara di matematica per il biennio della scuola secondaria di secondo grado 1997)



Apri GeoGebra, costruisci un quadrato ABCD e disegna il suo centro E. Costruisci il secondo quadrato EFGH e chiama M ed N i punti d'intersezione dei lati EH e EF rispettivamente con CD e BC.

L'area richiesta è quella del quadrilatero ENCM.



● **Risolvi con la "*geometria Euclidea classica*"**

I due triangoli EDM e ECN sono uguali per

……………………………………………………………..

perché hanno:

o …………..., perché ……………………………………………………,

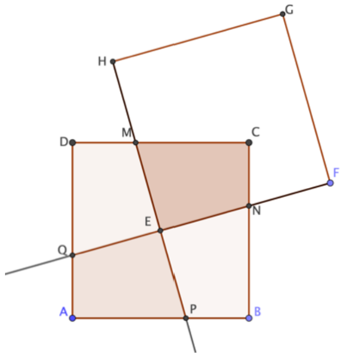
o ……………, perché ……………………………………………………,

o ……………, perché ……………………………………………………

Ne segue che sono equivalenti il quadrilatero ENCM e il triangolo ………………

Pertanto, la parte comune ai due quadrilateri ha area 64: …. = ….. .

Prova adesso a "cambiare punto di vista".



Apri un nuovo file di GeoGebra, costruisci un quadrato ABCD e disegna il suo centro E. Costruisci il secondo quadrato EFGH.

Traccia le semirette HE e FE e siano rispettivamente M e P, N e Q le loro intersezioni con i lati di ABCD.

Risolvi con la "*geometria delle trasformazioni*"

Puoi intuire che in ABCD ci sono poligoni isometrici.

La figura MENC di cui devi calcolare l'area è isometrica a

…………………………………………………………………………………………… .

Quale isometria consente di trasformare MENC nei quadrilateri ad esso isometrici?

…………………………………………………………………………………...….

Quindi l'area di MENC vale

……………………………………………………………………………………..

Puoi **osservare che** l'area della parte comune non dipende dalla posizione reciproca dei due quadrati ma resta invariata anche se muovi il quadrato di vertice E: Verificalo con GeoGebra.

Riflettiamo insieme

Perché proporre più soluzioni di uno stesso problema:

▪ in primo luogo, abitua a "cambiare punto di vista"

▪ poiché non tutti ragioniamo allo stesso modo, diversificare la risoluzione aiuta ciascuno a trovare il percorso più confacente alle proprie capacità

▪ abituarsi a ricercare i differenti percorsi può rivelarsi importante per affrontare i problemi che la vita ci pone tutti i giorni; spesso si tratta infatti di situazioni complesse che comportano diverse strategie di approccio, con conseguenze diverse nelle applicazioni.

▪ anche se non sempre i percorsi sono confrontabili, stabilire se uno è più conveniente di un altro significa scegliere e valutare le conseguenze di ogni scelta.
In conclusione, le isometrie appartengono a pieno titolo alla realtà che ci circonda, il vero problema è che spesso non le vediamo.

Per risolvere il problema in geometria euclidea si fa riferimento alla figura presente nella scheda. In particolare, i triangoli EDM e ECN sono congruenti per il secondo criterio di uguaglianza, in quanto:

- $ED \cong EC$, perché corrispondenti alla metà delle diagonali del quadrato $ABCD$
- $E\widehat{D}M \cong E\widehat{C}N$, perché entrambi hanno ampiezza pari a 45°
- $D\widehat{E}M = 90° - M\widehat{E}C = C\widehat{E}N$, dunque $D\widehat{E}M \cong C\widehat{E}N$

Da ciò si può dedurre che l'area del quadrilatero $EMCN$ è pari all'area del triangolo ECD, ovvero all'area di un quarto del quadrato $ABCD$. Quindi, l'area della parte comune ai due quadrati vale $8^2: 4 = 64: 4 = 16$.
In geometria delle trasformazioni, per la dimostrazione si fa riferimento alla figura presente nella scheda e si può osservare che, mediante una rotazione di 90° in senso antiorario attorno al punto E:

- N viene mandato in M
- C viene mandato in D
- M viene mandato in Q

Quindi, il quadrilatero $EMDQ$ corrisponde al quadrilatero $ENCM$ ruotato in senso antiorario di 90° attorno ad E e pertanto risultano essere isometrici.
Analogamente, si osserva che, mediante una rotazione di 90° in senso antiorario attorno al punto E:

- M viene mandato in Q
- D viene mandato in A
- Q viene mandato in P

Dunque, il quadrilatero $EQAP$ è il corrispondente di $EMDQ$ mediante una rotazione di 90° in senso antiorario attorno a E e sono pertanto isometrici.
Infine, si può affermare che, sempre attraverso la rotazione precedente:

- Q viene mandato in P
- A viene mandato in B
- P viene mandato in N

Pertanto, i quadrilateri $EQAP$ e $EPBN$ si corrispondono in una rotazione di 90° attorno ad E e dunque sono isometrici.
Si può quindi concludere che ognuno dei quadrilateri considerati ha area corrispondente ad un quarto dell'area del quadrato $ABCD$ e l'area della parte comune ai due quadrati è pari a $8^2: 4 = 64: 4 = 16$.

CONCLUSIONI

Nel corso della trattazione emerge chiaramente la tipologia di lavoro e di operazioni che i ricercatori e i collaboratori al progetto Klein Italia hanno svolto a partire dalla vignetta *"Symmetry step by step"*. In essa viene proposto un punto di vista superiore per l'insegnante e spunti di approfondimento interessanti per studenti più motivati; in particolare, viene presentata la classificazione dei gruppi di tassellazione, illustrando alcuni esempi ripresi da alcuni marciapiedi del Portogallo. Leggendo la vignetta e riflettendo sull'effettivo impiego di quest'ultima all'interno della classe, emerge la necessità di andare al di là della sola traduzione; nel momento in cui si vuole fare uso della vignetta in maniera efficace, inserendola in un contesto istituzionale ben preciso, bisogna operare un trasferimento, una trasformazione del materiale in questione che si traduce in un'operazione di trasposizione.
La prima caratteristica di tale operazione, che emerge dai capitoli precedenti, riguarda l'ampliamento effettuato a partire dalla vignetta. In particolare, all'interno di quest'ultima vengono presentate le tassellazioni del piano, la cui trattazione richiede una serie di prerequisiti necessari riguardo alla conoscenza delle isometrie e delle loro composizioni, delle figure con cui è possibile tassellare il piano e dei gruppi di isometrie che trasformano in sé una figura. Tali argomenti richiedono un percorso di apprendimento articolato, costituito da attività diverse e a vari livelli, che permettano agli studenti di acquisire non soltanto conoscenze, ma di sviluppare abilità e competenze.
Il gruppo che si è occupato della trasposizione della vignetta ha, quindi, sin da subito scelto di trasformare ciò che nel contesto della vignetta erano considerati prerequisiti nel punto centrale attorno al quale progettare attività che non soltanto affiancassero la vignetta nell'introduzione in classe del discorso sulle tassellazioni, ma che in primo luogo permettessero agli studenti di costruire significati sulle isometrie del piano. Questo ha condotto alla realizzazione di attività che si focalizzassero principalmente sulle isometrie e sulle loro caratteristiche, inglobando allo stesso tempo il discorso sulle tassellazioni previsto dalla vignetta, la quale diviene dunque un punto di arrivo. Nel dettaglio, i collaboratori al progetto Klein Italia hanno elaborato un percorso didattico che guidasse gli studenti alla scoperta delle trasformazioni geometriche coinvolte nei 17 gruppi di isometria del piano, al termine del quale la classificazione presentata nella vignetta rappresenta la "ciliegina" finale.
Un altro aspetto caratterizzante della trasposizione effettuata sulla vignetta in questione riguarda la suddivisione in diversi livelli di competenza; questo elemento permette da un lato di affrontare la trattazione con modalità diverse che mirano allo sviluppo di abilità di vario genere, dall'altro permettono all'insegnante di costruire il percorso che più si addice alle esigenze della classe e agli scopi perseguiti. La trasposizione effettuata dai collaboratori del progetto Klein Italia mira in primo luogo a mettere lo studente al centro, garantendogli un ruolo attivo nello svolgimento delle attività previste e permettendogli di costruire le proprie conoscenze gradualmente e autonomamente. Tuttavia, spetta al docente scegliere il tipo di attività da far svolgere in classe e in questo senso la trasposizione operata dal gruppo che ha lavorato sulla vignetta in questione prende in considerazione anche tale aspetto. In particolare, sono state create le schede destinate agli studenti, pensate ed elaborate affinché questi ultimi

operino in prima persona con gli oggetti matematici coinvolti, ma sono anche state progettate schede per gli insegnanti.
Il passo ulteriore nel lavoro di trasposizione riguarda proprio l'aggiunta di tutto un corredo di indicazioni destinate ai docenti intenzionati a fare uso di questi materiali in classe. L'ampliamento di cui sopra riguarda, quindi, non soltanto gli argomenti affrontati e le attività per gli studenti, ma ha condotto alla progettazione di apposite schede in cui vengono inseriti spunti di vario genere. Tra questi si trovano utili informazioni riguardo alle tempistiche previste per lo svolgimento delle diverse attività, indicazioni riguardo alle metodologie che è consigliabile adottare, suggerimenti sulle soluzioni dei vari quesiti proposti. In particolare, le indicazioni metodologiche hanno un ruolo predominante all'interno delle schede per i docenti; esse hanno lo scopo di offrire all'insegnante un orientamento sul metodo con cui introdurre le attività in classe. In altre parole, si è voluto lavorare sulla prasseologia didattica, andando da un lato a descrivere le attività e le consegne passo a passo, dall'altro ad arricchire il tutto fornendo spiegazioni riguardo alle tecniche impiegate inserendole in un ben preciso contesto teorico didattico.
Infine, i collaboratori al progetto Klein Italia hanno lavorato anche sull'inserimento nel materiale disponibile di approfondimenti ed elementi per prove di verifica. In questo modo si è voluto completare la trasposizione in maniera esaustiva; questi ultimi materiali, infatti, rappresentano il culmine dell'ampliamento di cui sopra e offrono sia agli studenti, che ai docenti interessanti spunti per il proseguimento del lavoro e del percorso di apprendimento strutturato a partire dalla vignetta sulle simmetrie.
La trasposizione operata dai collaboratori del progetto Klein Italia mira dunque dal punto di vista didattico a mettere gli studenti e i docenti in condizioni di sfruttare al meglio la vignetta in classe, rimanendo fedeli agli scopi per cui è stata creata. Dal punto di vista culturale tale operazione rientra nei compiti dell'Università di Torino che sono quelli del Public Engagement, cioè di dare un impatto sul territorio del lavoro fatto dai ricercatori e dagli accademici. Il gruppo che ha lavorato alla progettazione delle attività relative alla vignetta *"Symmetry step by step"* non è costituito soltanto da personalità facenti parte del mondo universitario, ma anche da docenti delle scuole, che hanno operato in sinergia per la realizzazione dei materiali in questione. In questo senso, emerge la duplice natura del progetto; se da un lato la realizzazione di nuovi materiali, come le attività proposte, permette infatti la sperimentazione nelle scuole e ha un valore di diffusione determinante delle azioni svolte dagli universitari, dall'altro ha un ruolo centrale nell'ambito della formazione degli insegnanti. In particolare, lo scopo dei ricercatori che hanno lavorato alla progettazione delle attività è stato non soltanto quello di creare contenuti utilizzabili in classe per la trattazione innovativa delle isometrie del piano, ma anche di presentare e spingere i docenti ad utilizzare metodologie differenti da quelle che usualmente vengono impiegate nelle ore di lezione cooperando attivamente e direttamente con loro. È estremamente importante, infatti, avvicinare gli insegnanti alla ricerca in campo didattico; per cambiare la situazione attuale all'interno delle scuole non è sufficiente il lavoro svolto dai ricercatori, ma è necessario che questo venga affiancato da quello dei docenti, che tutti i giorni operano direttamente in classe con gli studenti. I materiali progettati mirano proprio ad avere un impatto da questo punto di vista e rappresentano lo sforzo da parte dei ricercatori di creare un collegamento con la società e i docenti in particolar modo, affinché si possa cooperare per portare nelle scuole metodi nuovi, una visione all'avanguardia

dell'insegnamento che non rimanga un'idea utopica, ma che si realizzi concretamente tramite lo sforzo degli insegnanti in classe.
In definitiva, i materiali progettati dai ricercatori che aderiscono al progetto Klein Italia nascono per essere divulgati nelle scuole e il lavoro di trasposizione operato a partire dalla vignetta sulle simmetrie permette tale diffusione. In particolare, l'obiettivo primario è quello di impattare in maniera efficace nelle scuole dal punto di vista culturale; infatti, le vignette nascono proprio con lo scopo di offrire spunti ai docenti per introdurre in classe argomenti di matematica contemporanea, facendo in modo che gli studenti vengano in contatto anche con gli ultimi sviluppi della ricerca matematica. In questo senso, le attività mirano ad avvicinare il mondo della scuola e il lavoro svolto in classe al modus operandi dei ricercatori, arricchendo il bagaglio culturale degli studenti e degli insegnanti stessi, non soltanto dal punto di vista delle tematiche e dei risultati ottenuti dai ricercatori, ma anche e soprattutto per quanto riguarda i metodi e le modalità impiegate.
L'aspetto culturale è strettamente legato all'impatto metodologico-didattico delle vignette e delle attività progettate; queste ultime, infatti, prevedono metodologie innovative e strettamente legate agli ultimi sviluppi della ricerca in campo didattico. Da questo punto di vista, l'impatto di cui sopra mira allo sradicamento di pratiche diffuse nell'ambiente scolastico italiano, quali lezioni frontali, poco partecipative, che conducono ad un apprendimento che predilige la memorizzazione superficiale di nozioni e procedure. Le metodologie previste dalle attività progettate dai ricercatori del progetto Klein Italia prevedono, invece, che i concetti e gli oggetti matematici vengano scoperti mano a mano dagli studenti in prima persona, che costruiscono significati e acquisiscono competenze in un ambiente collaborativo e di confronto, in cui ogni studente è coinvolto attivamente così come il docente.
Questo aspetto è determinante dal punto di vista dell'impatto sulla didattica e la qualità dell'istruzione; quest'ultima riguarda, tuttavia, non soltanto l'istituzione in senso stretto, ma la società intera. In questo senso, l'impatto a livello sociale della divulgazione dei materiali realizzati contribuisce allo sviluppo dello studente come futuro cittadino facente parte della società. Infatti, le attività progettate e le modalità con le quali vengono implementate in classe garantiscono e permettono agli studenti di sviluppare tutta una serie di competenze trasversali quali il comunicare, il generalizzare, l'inventare, il porre in relazione, il formulare ipotesi e congetture. Tali abilità non solo sono utili a livello scolastico e fondamentali per l'acquisizione di competenze di alto livello, ma risultano essere indispensabili per affrontare la vita di tutti i giorni, nonché necessarie per tutti coloro che entrano nell'attuale società.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Bauer, M. W., & Jensen, P. (2011). The mobilization of scientists for public engagement. *Public understanding of science*, *20*(1), 3-11.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI bulletin*, *58*(58), 51-65.

Hoogland, K., & Tout, D. (2018). Computer-based assessment of mathematics into the twenty-first century: pressures and tensions. *ZDM*, *50*(4), 675-686.

Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione. (2018). Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica.

Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Indicazioni nazionali per i licei (D.M. 211 del 7 ottobre 2010).

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali.

Perkmann, M., Salandra, R., Tartari, V., McKelvey, M., & Hughes, A. (2021). Academic engagement: A review of the literature 2011-2019. *Research policy*, *50*(1).

Riesch, H., Potter, C., & Davies, L. (2016). What is public engagement, and what is it for? A study of scientists' and science communicators' views. *Bulletin of Science, Technology & Society*, *36*(3), 179-189.

Robutti, O., & Bini, G. (2023, July). From translation to transposition: Italian mathematics teachers as interlingual and intercultural mediators. In *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME

Robutti, O., & Bini, G. (2024). Crossing cultures: exploring the influence of professional development on teachers working with foreign educational resources. In *Fifteenth International Congress on Mathematical Education.*

Sasso, L. (2013). Nuova Matematica a colori. Petrini Editore.

Watermeyer, R., & Lewis, J. (2015). Public engagement in higher education: The state of the art. *Researching Higher Education*, 42-60.

Weingart, P., Joubert, M., & Connoway, K. (2021). Public engagement with science—Origins, motives and impact in academic literature and science policy. *PloS one*, *16*(7).

https://www.liceomatematico.it/simmetrie/

https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/activities/klein-project

https://www.liceomatematico.it/progetto-klein-italia/

https://frida.unito.it/wn_pages/tmContenuto.php/456_matematica-teorie-e-applicazioni/45_potenziamento-della-matematica-nelle-scuole-dalla-ricerca-alla-pratica/

https://frida.unito.it/wn_pages/index.php

http://www.agorascienza.it/index.php/it/il_centro

https://www.unito.it/ateneo/gli-speciali/notte-europea-delle-ricercatrici-e-dei-ricercatori

https://www.unito.it/territorio-e-societa/condivisione-e-partecipazione/apenet