Sapienza Università di Roma
Facoltà di Medicina e Psicologia
Corso di Laurea in
Scienze della Formazione Primaria
Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Laureanda
Giada Viotti

Relatrice
Chiar.ma prof.ssa
Annalisa Cusi

Relatore esterno
Chiar.mo dott.
Luigi Bernardi

Matricola
1519478

Correlatrice
Chiar.ma prof.ssa
Giordana Szpunar

UN APPROCCIO AL CALCOLO COMBINATORIO NELLA SCUOLA PRIMARIA ATTRAVERSO LA METODOLOGIA DELLA RICERCA VARIATA

Anno Accademico
2023 – 2024

Composizione grafica a cura dell'Autrice

Indice

Introduzione XI

Parte prima – RIFERIMENTI TEORICI 1

Capitolo primo – Dal Problem Posing alla Metodologia della Ricerca Variata 3
1.1. Il Problem Posing 3
1.1.1. Il *problema* dei problemi di matematica 3
1.1.2. L'arte di *porre* problemi nel curricolo di matematica 7
1.1.3. Problem posing, problem solving: un'integrazione Vincente per la didattica della matematica 11
1.2. La Metodologia della Ricerca Variata (MRV) 13
1.2.1. Problem posing, variazione, ricerca: prospettive per la didattica della matematica 15
1.2.2. L'apprendimento basato sulla ricerca 18
1.2.3. La Teoria della Variazione 22
1.2.4. La Metodologia della Ricerca Variata: caratteristiche, potenzialità, nuove possibilità 27
1.2.5. Implicazioni didattiche della Metodologia della Ricerca Variata: verso una nuova professionalità del docente di matematica 39

Capitolo secondo – Il calcolo combinatorio nella scuola primaria 43
2.1. Che cos'è la combinatoria? 43
2.2. Il calcolo combinatorio 47
2.2.1. Permutazioni, disposizioni, combinazioni semplici: informazioni preliminari 48
2.3. Il calcolo combinatorio nella scuola primaria 52
2.3.1. Insegnare la combinatoria 52
2.3.2. Perché insegnare la combinatoria 55
2.3.3. Insegnare il calcolo combinatorio nella scuola primaria 66

Parte seconda – LA SPERIMENTAZIONE 69

Capitolo terzo – Il metodo della ricerca 71
3.1. Indirizzo della ricerca 74
3.2. Il metodo della ricerca 75
3.2.1. La ricerca design-based 75
3.2.2. Metodologia 76

3.3. Dettagli della sperimentazione ... 81
1.3.1. Il contesto della ricerca ... 81
1.3.2. Strumenti ... 82
1.3.3. Tempi ... 83
3.4. Qualità, validità e attendibilità della ricerca ... 83

Capitolo quarto Risultati e Analisi ... 87
4.1. Incontro 1 – *Quante parole?* ... 91
4.1.1. Descrizione generale dell'incontro ... 91
4.1.2. Anagrammi I ... 96
4.1.3. Costruzione della domanda in coppie ... 110
4.1.4. Discussione collettiva per costruire la domanda relativa all'attività "Anagrammi I" ... 113
4.1.5. Riflessioni sull'incontro ... 118
4.2. Incontro 2 – *E se?* ... 119
4.2.1. Descrizione generale dell'incontro ... 120
4.2.2. Discussione collettiva sulle risposte alla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?» ... 121
4.2.3. Lavoro sulla variazione in coppie con la strategia dell' "E se?" ... 124
4.2.4. Discussione collettiva sulle variazioni ... 128
4.2.5. Riflessioni sull'incontro ... 141
4.3. Incontro 3 –*Vocali a più non posso!* ... 143
4.3.1. Descrizione generale dell'incontro ... 144
4.3.2. Una tabella per riassumere e generalizzare ... 147
4.3.3. Attività con le vocali ... 150
4.3.4. Tentativo di generalizzazione ... 156
4.3.5. Riflessioni sull'incontro ... 158
4.4. Incontro 4 – *Diamogli un senso…* ... 159
4.4.1. Descrizione generale dell'incontro ... 160
4.4.2. Discussione collettiva su "Vocali a più non posso!" ... 161
4.4.3. Variare la tipologia di oggetti ... 177
4.4.4. Riflessioni sull'incontro ... 181
4.5. Incontro 5 – *Si va in scena!* – Parte 1 ... 182
4.5.1. Descrizione generale dell'incontro ... 183
4.5.2. Attività di problem solving in coppie ... 184
4.5.3. Discussione collettiva ... 184
4.5.4. Si va in scena! ... 190
4.5.5. Riflessioni sull'incontro ... 194
4.6. Incontro 6 – *Si va in scena!* – Parte 2 e *La piccola squadra di calcio* ... 195
4.6.1. Descrizione generale dell'incontro ... 195
4.6.2. La tabella di Filippo e Annalisa ... 198

4.6.3. E problema sia… 199
4.6.4. La piccola squadra di calcio 201
4.6.5. Riflessioni sull'incontro 204
4.7. Incontro 7 – *Nelle puntate precedenti…* e *Creiamo un'associazione* 205
4.7.1. Descrizione generale dell'incontro 206
4.7.2. Nelle puntate precedenti… 207
4.7.3. Creiamo un'associazione 210
4.7.4. Riflessioni sull'incontro 216
4.8. Incontro 8 – *Il punto della situazione…* 217
4.8.1. Descrizione generale dell'incontro 218
4.8.2. Analisi delle risposte al worksheet finale 219
4.8.3. Discussione collettiva finale 221
4.8.4. Riflessioni sull'incontro 228
4.9. Itinerario parallelo 230
4.9.1. Considerazioni preliminari 230
4.9.2. Aspetti chiave del secondo percorso di sperimentazione 231

Conclusioni 241

Bibliografia 251

Sitografia 255

A tutti coloro che abbiano litigato,
almeno una volta,
con un problema di matematica.

Introduzione

Si sente spesso dire che la matematica sia una disciplina difficile da insegnare. Lo dicono gli studenti, lo dicono gli insegnanti e, ancora troppo spesso, lo dicono pedagogisti, ricercatori e decisori politici di tutto il mondo. I risultati degli studenti alle rilevazioni nazionali e internazionali sulla competenza matematica sembrerebbero continuare a darne una costante conferma. Di fronte a un'emergenza educativa così ampiamente diffusa, le organizzazioni internazionali che agiscono su larga scala, insieme alle varie associazioni e ai gruppi di ricerca presenti sulla rete nazionale, già da diversi anni hanno iniziato a porre la lente d'osservazione sull'insegnamento della matematica, contribuendo notevolmente ad ampliare e ad articolare le conoscenze sull'argomento. Ad oggi si può disporre di un ampio repertorio di informazioni che riguardano i processi cognitivi e metacognitivi attivati nel momento in cui uno studente si trovi ad apprendere un argomento di matematica, le aree della competenza matematica da sviluppare in maniera integrata attraverso i percorsi di insegnamento-apprendimento della disciplina e, soprattutto, in riferimento a strumenti, tecniche e strategie didattiche, mediante i quali gli insegnanti possano efficacemente promuoverne una didattica efficace a tutti i livelli. Il presente studio si inserisce nell'ambito di una ricerca in didattica della matematica, volta a condividere riflessioni sulle potenzialità di una metodologia didattica (la Metodologia della Ricerca Variata) mirata a migliorare le pratiche di insegnamento della disciplina e ad aiutare studenti e insegnanti nel realizzare percorsi che possano promuovere la costruzione della competenza matematica, già a partire dalla scuola primaria.

Alla luce della validità che la ricerca nel campo della didattica della matematica riconosce all'apprendimento basato sulla ricerca (Inquiry Based Learning – IBL), alla Teoria della Variazione (Variation Theory – VT) e al Problem Posing, la Metodologia della Ricerca Variata (MRV) nasce dal tentativo di una loro integrazione al fine di promuovere anche in matematica un insegnamento equo e di qualità, in modo che tutti gli studenti, anche i meno "esperti", possano avere, da attivi protagonisti del proprio apprendimento, pari opportunità di accesso alle conoscenze matematiche e di sviluppo del linguaggio proprio della disciplina. L'approccio MRV poggia le sue radici nel pensiero socio-costruttivista, il quale considera l'apprendimento un prodotto co-costruito attivamente dagli alunni in quanto reali protagonisti della pratica didattica. È in quest'ottica che l'argomentazione, la rappresentazione, la generazione e la risoluzione di problemi diventano parte fondamentale dei processi di apprendimento, all'interno dei quali il continuo scambio di informazioni, confronti e punti di vista conduce a una comprensione profonda delle strutture dei concetti matematici e delle relazioni tra quantità numeriche. La Metodologia della Ricerca Variata parte dalla consapevolezza che sia possibile generalizzare mediante la ricerca di analogie e differenze tra contesti simili, di cui vengono variati alcuni aspetti, mantenendone inalterata la struttura principale. Tale fondamento teorico dell'approccio MRV è in linea con le indicazioni che l'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) indirizza agli insegnanti:

> Teaching today's mathematics curricula, which are thought to be general, often makes it challenging for students to apply this knowledge to concrete problems. Students need to be exposed to several different representations of concepts in order to develop the skills needed to translate between the real world and world of mathematics, and vice versa. Give students a variety of problems that includes contextualized problems in which students need to apply knowledge to find a solution to a problem encountered in everyday life. Pedagogies such as project- or problem-based learning present students with real-world problems that they have to solve, often as a team, applying the skills they have just learned.[1]

Chiunque, riferendosi ad un argomento di matematica, può aver sentito – o aver detto – almeno una volta «Perché lo devo imparare? Non lo userò mai nella vita!». In questa affermazione è racchiuso uno degli

[1] OECD (2016). *Ten Questions for Mathematics Teachers… and how PISA can help answer them*. Parigi: OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264265387. Trad. It: «L'insegnamento degli attuali programmi di matematica, i quali sono pensati per essere generali, spesso rende difficile per gli studenti applicare conoscenze di questo tipo a problemi concreti. Gli studenti hanno bisogno di essere esposti a rappresentazioni diverse dei concetti in modo da sviluppare le abilità necessarie per passare dal mondo reale al mondo della matematica e viceversa. Date [voi, insegnanti] agli studenti una varietà di problemi che includa problemi contestualizzati nei quali gli studenti debbano applicare la conoscenza per trovare una soluzione a un problema che si possa incontrare nella vita quotidiana. Pedagogie come l'apprendimento basato sui progetti o sui problemi presentano agli studenti problemi del mondo reale che devono risolvere, spesso in gruppo, applicando le abilità appena apprese».

ostacoli più difficili da rimuovere legato all'insegnamento della matematica, definito da Ferdinando Arzarello (2015, 2019) come "sospensione di senso", cioè un blocco alla comprensione del significato che nel mondo reale riveste un concetto matematico. Per cercare di superare tale ostacolo, la Metodologia della Ricerca Variata propone strumenti come variazione e ricerca, attraverso le quali gli studenti possano riconoscere le analogie e le differenze tra situazioni concrete da loro stessi prodotte e costruire parallelamente rappresentazioni matematiche atte a mettere in luce, anche sul piano formale, le analogie e le differenze riconosciute. In questo modo, il sistema reale e il sistema formale si muovono di pari passo, facilitando il passaggio da un sistema all'altro. Quando, infatti, si rimane ancorati ad uno solo dei due sistemi, si ottiene una comprensione che resta parziale, la quale spesso porta a considerare la matematica come una disciplina esclusivamente formale e astratta.

L'approccio MRV, elaborato dal gruppo di ricerca costituito da Ferdinando Arzarello, Annalisa Cusi, Ornella Robutti ed Osama Swidan (Swidan et al., 2023[2]), è stato sperimentato già in diversi studi con alunni di diverse fasce d'età. La sperimentazione documentata in questa tesi vede l'applicazione della MRV all'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio in due classi terze di scuola primaria. La combinatoria costituisce un ramo della matematica discreta che è stato – e continua ad essere – spesso trascurato nei livelli d'istruzione pre-universitari, nonostante le ricerche condotte a partire dagli anni '80 del secolo scorso abbiano mostrato che il suo insegnamento, già a partire dalla scuola primaria, possa promuovere lo sviluppo delle abilità relative alle tre macro-aree – conoscere, risolvere problemi e argomentare – connesse allo sviluppo della competenza in matematica. Gli studi condotti da English a partire dalla fine del secolo scorso, hanno mostrato che l'insegnamento precoce dei primi concetti di calcolo combinatorio favorisca l'attivazione spontanea di processi, quali variazione dei testi dei problemi al fine di individuarne la struttura, mediante la ricerca di analogie e differenze, e collaborazione tra pari, realizzata per verificare la correttezza dei ragionamenti elaborati per risolvere i problemi. Inoltre, diversi paesi hanno iniziato ad introdurre l'insegnamento del calcolo combinatorio nei curricoli pre-universitari, in quanto le attività di calcolo combinatorio permettono di allenare contemporaneamente abilità come argomentare, rappresentare, risolvere e porre problemi, indispensabili per sviluppare

[2] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., & Arzarello, F. (2023). The method of varying inquiry for stimulating learning. *For the learning of mathematics*, 43(1), 14-18.

la competenza matematica. La letteratura sull'argomento ci informa, però, che anche nel caso del calcolo combinatorio, gli studenti di ogni età mostrino una comune difficoltà nella generalizzazione dei concetti, dal momento che, quando posti davanti alla risoluzione di problemi molto simili a quelli già svolti, faticano a riconoscerne adeguatamente la struttura, anche se già ampiamente utilizzata in altri contesti.

Nel presente studio è stato realizzato un percorso sull'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio, quali permutazioni semplici e disposizioni semplici, utilizzando gli strumenti, le tecniche e le strategie messe in evidenza dalla Metodologia della Ricerca Variata, analizzata nel dettaglio nel primo capitolo dell'elaborato, dedicato alla descrizione del quadro di riferimento teorico della ricerca. La variazione è stata favorita dalla strategia di problem posing del "What if not?" (qui tradotto con "E se?"), elaborata da Brown & Walter (2005), ed è stata utilizzata in modo che gli alunni potessero ricercare analogie e differenze tra diversi contesti, attivando processi di generalizzazione. Inoltre, gli alunni sono stati costantemente stimolati a rappresentare, argomentare e giustificare i propri ragionamenti e ad attribuire significati ai termini delle rappresentazioni elaborate per risolvere i problemi, i quali sono stati, in parte, proposti dai ricercatori mediante l'allestimento di attività ludiche significative e, in parte, generati dalle loro stesse variazioni. Nel secondo capitolo si parlerà specificatamente di calcolo combinatorio, fornendo una introduzione matematica preliminare dei concetti che hanno costituito il contenuto matematico della ricerca (permutazioni semplici e disposizioni semplici), e presentando gli aspetti significativi di un suo insegnamento già a partire dai primi livelli d'istruzione. Dopo aver ampiamente motivato le affinità tra l'approccio MRV e quello dell'insegnamento del calcolo combinatorio, la seconda parte viene dedicata alla descrizione del metodo di ricerca e all'analisi e alla discussione dei dati emersi nel corso della sperimentazione, mettendone in evidenza i momenti significativi, promossi dalla metodologia MRV, che hanno condotto alla costruzione attiva da parte degli alunni delle conoscenze preliminari sul calcolo combinatorio.

L'intento non è quello di fornire un metodo, ma quello di osservare come la variazione, mediante strategie di problem posing, insieme alla ricerca di analogie e differenze tra strutture e a un tipo di didattica che metta al centro l'argomentazione, la costruzione di rappresentazioni e l'uso del linguaggio matematico come strumento per generalizzare, possa coniugarsi con l'insegnamento di un argomento, quale il calcolo combinatorio, che la ricerca nel campo della didattica della matematica ha mostrato costituire un contesto valido in cui poter mettere in gioco e sviluppare diverse abilità, oltre che ad ampliare il campo di conoscenza della disciplina. Il progetto si presenta come il primo ciclo di una ricerca design-based sull'insegnamento del calcolo combinatorio nella scuola primaria mediante l'approccio promosso dalla Metodologia della Ricerca Variata, a cui si spera di poter dar seguito, mediante l'attivazione di una riflessione nell'ambito di un insegnamento della matematica equo e di qualità.

Parte prima

RIFERIMENTI TEORICI

Capitolo primo
Dal Problem Posing alla Metodologia della Ricerca Variata

They say there are no stupid questions. That's obviously wrong: I think my question about hard and soft things, for example, is pretty stupid. But it turns out that trying to thoroughly answer a stupid question can take you to some pretty interesting places.
I still don't know whether there are more hard or soft things in the world, but I've learned a lot of other stuff along the way.
(Randall Munroe, What If?*)*

1.1. Il Problem Posing

1.1.1. Il **problema** *dei problemi di matematica*

I problemi, intesi come situazioni da affrontare attraverso soluzioni efficaci, accompagnano tutta la nostra vita, i problemi di matematica accompagnano tutta la vita degli studenti. Non è possibile pensare alla matematica senza che ci vengano in mente gli infiniti problemi che ciascuno di noi, nella sua vita da studente, deve o ha dovuto affrontare. È ormai assodato che uno studente abile in matematica è anche – e soprattutto – quello che viene chiamato un buon *problem poser*. Vediamo libri scolastici di matematica ricolmi di problemi di tutti i tipi, aperti, chiusi, più o meno strutturati, più o meno fedeli ai contesti di vita reale. Nella maggior parte dei casi, però, le situazioni e, soprattutto, le domande proposte risultano artificiose, dato che a nessuno studente, probabilmente, verrebbe in mente di porsele in una situazione reale al di fuori delle mura scolastiche. Quando si parla di problemi di matematica, sembra venirsi a creare una contrapposizione – il più delle volte inconsapevole – di punti di vista da parte di studenti e insegnanti, che guardano ad essi attraverso filtri differenti, portando a un'inconciliabilità di intenti tale da generare una vera e propria impasse che ostacola l'apprendimento della matematica. Gli insegnanti, infatti, guidati spesso da obiettivi specifici (insegnare la moltiplicazione, l'area e il perimetro di una figura, ecc.), sono coinvolti nello sforzo di migliorare le abilità e le conoscenze degli studenti attraverso l'uso dei problemi, continuando però a focalizzandosi sul "come" vada svolto un certo esercizio o un certo problema di matematica. Gli studenti, invece, dall'altra parte, continuano a chiedersi «ma quando mi servirà questa conoscenza fuori da scuola?», «perché questa conoscenza mi è utile? Per che cosa?», arrovellandosi sul "perché" un certo problema si risolva in un certo modo e quale sia il concetto o la struttura matematica che gli sarà fondamentale per il futuro. È come se si venisse a creare un velo che non consente a nessuna delle due parti di vedere "realmente" quello che si ha davanti, lasciando che l'essenziale resti invisibile agli occhi. Lo studio formale, infatti, anche se condotto in maniera eccellente, il più delle volte ha l'effetto di restringere, piuttosto che ampliare, la visione che abbiamo delle cose[3].

L'attività con i problemi, che accompagna lo studente fin dalle sue prime esperienze scolastiche con la matematica, ha un'enorme responsabilità nella costruzione della visione che gli studenti si fanno della matematica e nelle emozioni che vengono associate al suo apprendimento. Non riuscendo a dare una valida risposta alle domande che per loro sono fondamentali, gli studenti continuano a vedere come obiettivo di un problema quello di fornire la risposta corretta (data possibilmente in tempi brevi), cercando il più possibile di evitare l'errore. Chi non riesce a rispondere nei tempi previsti si convince di "non essere capace", emerge la forte paura di sbagliare spesso associata alla matematica e, nella peggiore delle ipotesi, si arriva al totale rifiuto, considerandola una disciplina che non lascia spazio alla creatività, noiosa e al tempo stesso difficile: una materia che richiede di memorizzare regole e applicarle a esercizi ripetitivi, che demonizza l'errore e premia la velocità. Si tratta però di una visione che, oltre a contraddire l'essenza stessa della matematica, non riconoscere il ruolo cruciale svolto dai problemi che, tra l'altro, non riguarda esclusivamente la loro risoluzione. In una visione scolastica sempre più orientata al processo, ai problemi in matematica viene riconosciuto il potere di essere non solo uno strumento per favorire l'acquisizione dei contenuti matematici, ma anche di costituire un esercizio intellettuale estremamente rilevante e caratterizzante del pensiero umano, portando all'attivazione di processi fondamentali sia per la matematica, sia per lo sviluppo di abilità come esplorare, fare congetture, pianificare, argomentare, dimostrare e attivare processi di controllo. Le *Indicazioni Nazionali per il curricolo* condividono la centralità dei problemi nel curricolo di matematica:

[3] Brown, S. I. & Walter M.I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3ª ed.). Lawrence Erlbaum Associates.

Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali rispondere semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che si intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive.[4]

In questo stralcio si sottolinea l'importante ruolo che i problemi svolgono all'interno del curricolo di matematica, nella loro stretta associazione con la capacità di argomentare, la quale nasce dal confronto con i pari e con lo sviluppo del pensiero ipotetico. Riguardo all'insegnamento della matematica, si possono individuare tre macro-aree di competenze da sviluppare in maniera integrata attraverso l'insegnamento-apprendimento della matematica a scuola[5]:

1. CONOSCERE. Si riferisce a competenze relative alla conoscenza e all'uso delle nozioni matematiche, delle loro rappresentazioni simboliche, proprietà, tecniche operative connesse e delle relazioni tra le nozioni stesse.
2. RISOLVERE PROBLEMI. Riguarda competenze come individuare e esplicitare le informazioni necessarie per affrontare un problema, costruire i ragionamenti risolutivi appropriati, con attenzione agli strumenti di rappresentazione e rendere conto di essi, controllare tali ragionamenti e i risultati che ne conseguono e confrontarli in relazione alle situazioni problematiche considerate e in interazione coi pari.
3. ARGOMENTARE. Fa riferimento a competenze che riguardano: produrre ipotesi esplicative di proprietà o fenomeni in base alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento; accertare la validità di un'affermazione o di un procedimento o di un ragionamento in relazione alle proprie conoscenze e al contesto di riferi-

[4] *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Gazzetta Ufficiale n. 30 del 5 febbraio 2013, D.M. n° 254. Disponibile da: www.gazzettaufficiale.it

[5] INVALSI (30 agosto 2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di matematica*.

mento, producendo o individuando ragioni di validità o di non validità; esporre nelle forme richieste dalla natura dell'oggetto valutato o dal suo contesto di riferimento.

A distanza di poco più di un decennio dalla pubblicazione delle *Indicazioni Nazionali per il curricolo*, i preoccupanti risultati degli studenti italiani alle rilevazioni nazionali (INVALSI) e internazionali (OCSE – PISA, IEA – TIMSS) ci informano che "c'è qualcosa che non va" e che questo qualcosa ha un'importanza tale da non consentire un adeguato apprendimento della matematica, il quale sembra diminuire progressivamente avanzando con il livello d'istruzione[6].

Disponiamo oggi si tutta una serie di informazioni sia ufficiali, sia provenienti dalla pratica quotidiana in classe, che ci mostrano chiaramente che l'insegnamento tradizionale non è più sufficiente per aiutare gli studenti nell'apprendimento della matematica. La lente è posta sulla didattica della matematica, alla quale viene riconosciuto il ruolo decisivo per l'apprendimento degli studenti. Sono gli insegnanti ad avere il compito di aiutare gli studenti a sviluppare competenze matematiche adeguate attraverso metodi e strategie efficaci che includano la risoluzione di problemi significativi, promuovendo allo stesso tempo una didattica in linea con le Indicazioni Nazionali che rispetti l'essenza stessa della disciplina, e che sia in grado di favorire un atteggiamento positivo da parte degli studenti nei confronti della matematica:

> Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo[7].

Quanto siamo vicini all'idea di matematica proposta dalle Indicazioni Nazionali? Quanto nelle nostre classi i modi di fare matematica rispecchiano la visione promossa nel documento? E, soprattutto, come

[6] Per ulteriori approfondimenti e un'analisi comparativa è possibile consultare il sito di Invalsi (www.invalsi.it), quello di OCSE-PISA (https://www.oecd.org/pisa/) e di IEA-TIMSS (https://www.iea.nl/studies/iea/timss).

[7] Decreto ministeriale n° 254 del 16/11/2012. *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, MIUR. Gazzetta Ufficiale n. 30 del 5 febbraio 2013. Reperibile in: www.gazzettaufficiale.it

possiamo aiutare gli insegnanti nel difficile compito di insegnare matematica attraverso un uso efficace dei problemi?

1.1.2. L'arte di **porre** *problemi nel curricolo di matematica*

Le Indicazioni Nazionali, in linea con quanto già inserito nei curricoli da parte degli altri paesi nel mondo con una lunga tradizione nella didattica della matematica[8], sottolineano l'importanza della matematica come «contesto per *affrontare* e *porsi* problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture»[9]. La matematica, dunque, non è solo il luogo in cui imparare a risolvere problemi, ma è anche il contesto in cui allenarsi a "porre" problemi significativi. Sembrerebbe qualcosa di nuovo, ma lo stesso Albert Einstein, insieme a Leopold Infeld, nel 1938 affermò in *L'evoluzione della fisica*:

> La formulazione di un problema è spesso più essenziale della sua soluzione, che può essere semplicemente una questione di abilità matematica o sperimentale. Sollevare nuove domande, nuove possibilità, considerare vecchie domande da una nuova angolazione, richiede immaginazione creativa e segna un vero progresso nella scienza[10].

Porsi domande nuove, creative e originali costituisce il motore della scienza, gli scienziati sono mossi dalla curiosità e dal desiderio di ottenervi delle risposte e, quando ci riescono, si può generare il progresso della conoscenza. Se non ci fosse questa costante attività del pensiero di porsi domande, all'uomo verrebbe tolta la sua vera essenza: se non ci fossero domande, non ci sarebbero problemi o questioni da risolvere, non ci sarebbe conoscenza e la possibilità di produrla. Con il termine "problem posing", che letteralmente significa «porre problemi», ci si riferisce, infatti, alla formulazione di domande in seguito all'osservazione

[8] Silver, E.A. (2013). Problem posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 157-162. Doi: 10.1007/s10649-013-9477-3

[9] *Ibid*., corsivo aggiunto.

[10] Einstein A. & Infeld L. (1938). *The Evolution of Physics*. The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta. New York: Simon & Schulster (trad it. *L'evoluzione della fisica.* Sviluppo delle idee dai concetti iniziali alla relatività e ai quanti, Bollati Broinghieri, Torino, 2011, ed. digitale)

di un evento, di un fenomeno o di una situazione[11]. Si tratta, appunto, di un'attività che ciascuno di noi svolge nella vita quotidiana e riguarda il porsi domande su tutto ciò che ci circonda. Il focus si sposta dalla "risoluzione" alla capacità di "generare" nuovi problemi significativi, che motivino a trovare risposte originali, anche se per alcune può essere più difficile rispondere rispetto ad altre.

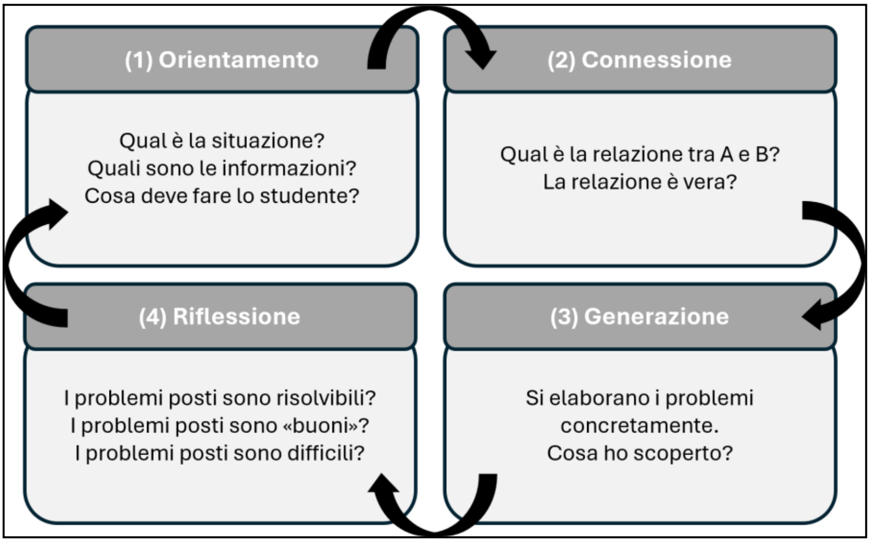


Figura 1.1.1. Rappresentazione grafica del modello generale del processo di problem posing elaborato da Cai & Rott (2023).

Già dalla fine degli anni '80 si è iniziato a parlare dell'importanza del problem posing grazie alla pubblicazione nel 1983 del libro *The art of Problem Posing* di Brown & Walter, i quali, oltre a introdurre l'esigenza di una didattica della matematica basata sul problem posing, hanno elaborato la strategia del "What If Not?" per insegnare agli studenti a generare nuovi problemi a partire dal testo iniziale di un problema. A partire da questa data di riferimento, la ricerca in campo psico-educativo e didattico ha iniziato ad interessarsi all'argomento, dando vita a una serie di studi che riconoscono l'importanza di questo costrutto per l'insegnamento delle STEM e, soprattutto, per la didattica della matema-

[11] Silver, E.A. (2013), *ivi.*, p. 159.

tica[12]. I ricercatori sono ormai concordi nell'affermare che il problem posing migliori le abilità di ragionamento degli studenti e le loro abilità di problem solving, favorendo di conseguenza un atteggiamento di fiducia nei confronti della matematica e della propria capacità di poter risolvere un problema, migliorando l'apprendimento della disciplina[13].

Riguardo all'insegnamento della matematica, le Indicazioni Nazionali mettono al centro la costruzione del pensiero matematico, il quale viene indicato come un «processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese[14]». Il percorso punta, dunque, a sviluppare un certo tipo di "atteggiamento" che coniughi il "pensare" con il "fare" e che, attraverso gli strumenti della disciplina, «aiuti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani»[15]. La matematica, infatti, aggiungono le Indicazioni Nazionali, «dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana»[16]. Una visione di questo tipo, porta a un completo cambio di paradigma rispetto all'insegnamento tradizionale della matematica, promuovendo una didattica che punti all'uso della matematica per scoprire e spiegare il mondo circostante e rispondere alle sue esigenze, e che abbia come primo obiettivo lo sviluppo di un atteggiamento orientato a tali scopi, il quale dovrebbe iniziare ad essere coltivato già a partire dalla scuola del primo ciclo, andandosi ad arricchire e a rafforzare con l'avanzare dei gradi d'istruzione.

Se l'obiettivo dell'insegnamento della matematica già a partire dalla scuola primaria è, dunque, quello di preparare gli studenti alle competenze e ai tipi di ragionamento di cui avranno bisogno nella vita reale e se la capacità di porsi domande è il motore delle scienze e della matematica in quanto tale, si comprende la necessità di inserire il problem posing come parte integrante del curricolo, sia come obiettivo specifico sia come metodologia a supporto degli altri obiettivi del curricolo, in parti-

[12] Calabrese, J.E., Capraro, M. M. & Thompson, C.G. (2022). The Relationship between Problem Posing and Problem Solving: a systematic Review. *International Education Studies,* 14(4). Doi: 10.5539/ies.v15n4p1

[13] Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287-301. Doi: 10.1007/s10649-020-10008-x

[14] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p. 49.

[15] *Ibid.*

[16] *Ibid*.

colar modo quelli connessi al problem solving e al ragionamento matematico[17].

Va ribadito che il problem posing è connesso allo sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica. Spesso gli insuccessi degli studenti in matematica, la mancanza di comprensione legata al "perché" un certo problema vada risolto in un certo modo o il motivo per il quale una certa formula esista in una certa forma, portano gli studenti a sviluppare la cosiddetta "paura della matematica", identificandola, seppur con le migliori intenzioni, con la pura applicazione meccanica di regole e formule preconfezionate. Già Brown & Walter avevano osservato un importante beneficio riguardo allo sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica grazie all'uso del problem posing, in relazione al fatto che il porre problemi, il fare domande, possa essere potenzialmente meno "minaccioso" rispetto al dovervi esclusivamente rispondere. I due matematici ne hanno dato una spiegazione logica, legata al fatto che quando si pone una domanda, vengano meno le categorie del "giusto/sbagliato", che invece entrano in gioco nella fase di risoluzione; il fatto di poter costruire da sé il proprio problema, favorisce attivazioni legate al senso di autoefficacia e alla motivazione ad apprendere, i quali rappresentano aspetti cruciali nell'apprendimento di qualsiasi disciplina[18].

Un importante aspetto del problem posing è la sua matrice socio-costruttivista, la quale considera l'apprendimento come il risultato della partecipazione attiva dello studente alla costruzione delle sue abilità e conoscenze grazie all'apporto degli altri. Si tratta di un costrutto che ridefinisce in modo radicale la responsabilità dell'apprendimento: con il problem posing i veri protagonisti diventano gli studenti. Le Indicazioni Nazionali incoraggiano l'apprendimento collaborativo:

> Imparare non è solo un processo individuale. La dimensione sociale dell'apprendimento svolge un ruolo significativo. In tal senso, molte sono le forme di interazione e collaborazione che possono essere introdotte (dall'aiuto reciproco all'apprendimento cooperativo e all'apprendimento tra pari), sia all'interno della classe, sia attraverso la formazione di gruppi di lavoro […].

Riguardo alla matematica, viene sottolineata la sua importanza nel contribuire a sviluppare «la capacità di comunicare e discutere, di argo-

[17] Silver, E.A. (2013), *ivi.*, p. 160.
[18] Brown & Walter, 1983, *ivi.* pp. 33-65.

mentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri»[19]. Il problem posing è in linea con questo tipo di pedagogia, in cui gli studenti vengono considerati come co-costruttori delle loro esperienze di apprendimento. Kopparla et al. (2018) hanno dimostrato che il problem posing viene potenziato quando è attivato all'interno di gruppi di lavoro e nelle discussioni collettive di classe che possono condurre a una modifica soddisfacente del problema e ad una sua risoluzione efficace[20]. All'interno di un ambiente di apprendimento collaborativo, lo studente ha la possibilità di osservare il problema attraverso più punti di vista, i quali gli consentono di comprendere se il problema formulato sia più o meno corretto. Si tratta di un confronto diverso rispetto a quello che il singolo studente può avere con l'insegnante, in quanto, in un confronto tra pari, può venir meno la paura del giudizio che più facile si presenti quando ci si relaziona con un esperto. L'arte del problem posing riveste, quindi, un importante ruolo didattico, sia come obiettivo di per sé, in quanto stimola gli studenti a porsi domande significative per acquisire contenuti della conoscenza, sia nell'importante relazione, evidenziata dalla ricerca in campo psico-educativo, con il problem solving. Infatti, come vedremo nel paragrafo successivo, il problem posing costituisce parte integrante del processo della risoluzione dei problemi, attraverso una modalità ricorsiva che consente di sviluppare entrambe le abilità di problem posing e solving e di promuovere le abilità di metariflessione fondamentali per l'apprendimento della matematica.

1.1.3. Problem posing - problem solving: un'integrazione vincente per la didattica della matematica

Nonostante l'ampia importanza riconosciuta oggi al problem posing e nonostante le ampie evidenze scientifiche sulla sua relazione positiva con l'apprendimento della matematica (Cankoy, 2014; Chang et al., 2011; Silver & Cai, 1996), quello che è ancora poco chiaro è quali siano i meccanismi e i processi cognitivi che si attivano nel momento in cui vengono generati nuovi problemi. La ricerca ha mostrato che nel momento in cui si riesce a modificare un problema, creandone uno simile attraverso la

[19] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p. 49.

[20] Kopparla, M. et al. (2019). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies, 45(6)*, 708-725. Doi: 10.1080/03055698.2018.1509785

variazione di una o più variabili, si ottiene una conoscenza più profonda del concetto oggetto di studio, anche negli studenti di scuola primaria[21].

Problem posing e problem solving sono due attività che si illuminano a vicenda e possono essere considerate come complementari (Baumannss & Rott, 2022; Cai, 1998; Silver & Cai, 1996). Il problem posing, infatti, può essere attivato prima, durante o dopo un'attività di problem solving[22]: differentemente da quanto si pensi, non esiste un solo e unico metodo lineare per la risoluzione di un problema, un "problem poser" esperto riesce a muoversi all'interno di un continuo rimando tra analisi, formulazione di domande in forma di sotto-problemi, risoluzione di questi ultimi e revisione del lavoro svolto[23]. Sono le domande intermedie sottoforma di sotto-problemi, che ci permettono di riunire i pezzi del puzzle per ottenere la soluzione di un problema.

Spesso quello che manca agli studenti è la comprensione della struttura di un problema e il problem posing consente di fare un passo avanti in questa direzione: sposta il focus dal metodo corretto di risoluzione alla progettazione di una domanda nuova e applicabile basata su un contesto maggiormente realistico o comunque inerente alla sfera cognitiva e affettiva dello studente, aumentando anche la motivazione alla risoluzione del problema. Il problem posing, come il problem solving, consente di sviluppare le abilità logiche connesse alla risoluzione di un problema; nello specifico, permette di comprendere meglio la struttura di un problema, favorendo una riflessione sugli elementi del problema, sui dati, sulla richiesta e sulla/e sua/e risoluzione/i. Un aspetto cruciale nell'attività di problem posing è rappresentato dal fatto che per creare problemi nuovi, gli studenti – anche se in maniera spesso inconsapevole – devono comprendere le componenti del problema e la relazione tra di esse, il che rappresenta la base per una migliore attività di problem solving[24]. Allo stato attuale non è ancora chiaro quali siano i fattoti e i meccanismi cognitivi coinvolti in questo tipo di operazione, ma sicuramente ricerche future sull'argomento potrebbero portare ad una sua più profonda comprensione. È evidente, però, che per modificare il problema

[21] Kopparla, M. et al. (2019), *ivi.*, p. 710.

[22] Silver, E.A. (2013), *ivi.*, 160.

[23] Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry – a case study. *The Journal of Mathematical Behavior, 22(4),* 369-387. Doi: 10.1016/j.jmathb.2003.09.007.

[24] Kopparla, M. et al. (2019), *ivi.*, p. 712.

attraverso una variazione dei suoi elementi, ci sia bisogno prima di individuare quelle che sono le informazioni su cui poter agire.

Un ulteriore aspetto fondamentale per un discorso sull'inserimento del problem posing nel curricolo di matematica come strumento per il suo insegnamento, è che attualmente diverse ricerche hanno mostrato che, nonostante ci sia una relazione di complementarietà tra problem posing e problem solving, si potrebbe formulare una domanda anche senza conoscere in anticipo gli aspetti matematici coinvolti[25]. Si tratta di una scoperta fondamentale per la didattica della matematica, perché implica che la capacità di porre e porsi problemi possa essere utilizzata, oltre che nella sua associazione con il problem solving, anche per l'introduzione e l'apprendimento di concetti nuovi, sfruttando la naturale predisposizione umana di porsi domande per conoscere le cose del mondo.

1.2. La Metodologia della Ricerca Variata (MRV)

Il porsi domande e il meccanismo di ricerca che ne consegue al fine di potervi dare una spiegazione completa, rappresentano i processi chiave per produrre conoscenza. L'arte del porsi domande non coinvolge la categoria del "giusto/sbagliato": anche se, ad esempio, chiedersi «cosa accadrebbe se la Terra e tutti gli oggetti terresti improvvisamente smettessero di girare ma l'atmosfera mantenesse la sua velocità»[26] potrebbe sembrare una domanda bizzarra (oltre che estremamente ipotetica), in realtà il processo di ricerca che viene scaturito genera una risposta estremamente concreta – piuttosto apocalittica probabilmente –, ma sicuramente affascinante:

> Morirebbero quasi tutti. Poi le cose diventerebbero interessanti. All'equatore la superficie della Terra si muove a circa 470 metri al secondo, poco meno di duemila chilometri all'ora – rispetto al suo asse. Se la terra si fermasse e l'aria no, il risultato sarebbe un improvviso vento a duemila chilometri all'ora.

[25] Baumanns, L. & Rott, B. (2023). Identifying metacognitive behavior in Problem-Posing Processes. Development of a framework and proof of concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 1381-1406. Doi: 10.1007/s10763-022-10297-z

[26] Munroe, R. (2014). *What If? Serious scientific answers to absurd hypothetical questions*. New York: Harper Collins Publishers (trad it. *Cosa accadrebbe se? Risposte scientifiche a domande ipotetiche assurde*, Bompiani, Firenze, 2016, ed. digitale).

Il vento soffierebbe più forte all'equatore, ma chiunque e qualunque cosa si trovasse tra i 42 gradi nord e i 42 gradi sud – ovvero all'incirca l'ottantacinque per cento della popolazione mondiale – sperimenterebbe improvvisamente l'esperienza di venti supersonici. Le raffiche più forti durerebbero solo pochi minuti vicino alla superficie: l'attrito con il suolo li rallenterebbe. A ogni modo, questi pochi minuti sarebbero sufficienti a distruggere virtualmente qualsiasi struttura umana. [27]

Quello riportato è soltanto uno dei tantissimi scenari creati da Randall Munroe nel suo libro *What If?*, in cui il fisico della NASA attraverso gli strumenti della fisica e della matematica prova a rispondere alle domande più particolari – che potremmo erroneamente definire "assurde" – che le persone ogni giorno postano sul suo blog "xkcd[28]", costruito appositamente per raccoglierle, da cui nel tempo i suoi tentativi di risposta hanno dato vita a storie e fumetti ironici, irriverenti e, allo stesso tempo, super scientifici! Si tratta di un caso interessante, quello di Munroe, che ci porta di nuovo a riflettere sul potere che il problem posing possiede nel mettere in moto la conoscenza. Anche se a volte qualche domanda potrebbe rimanere tale per molto tempo, ce ne sono tante e tante altre a cui gli strumenti e i metodi delle scienze sono riusciti e riescono tutt'oggi a fornire spiegazioni più o meno esaustive, portandoci a scoprire qualcosa di nuovo o a riflettere su qualcosa che già si conosce, osservandolo attraverso nuove e inesplorate prospettive.

Già da qualche anno, alla luce delle considerazioni sull'importanza del porsi domande e del processo di ricerca a cui queste possono dare avvio, la didattica della matematica si è messa in moto per cercare nuovi strumenti, strategie e metodologie che possano rispondere al reale bisogno di apprendimento degli studenti, quello di capire il "perché è", piuttosto che il "come è". L'obiettivo è quello di far aderire la matematica ai contesti di vista reale per cui è stata generata e, parallelamente, di promuovere un processo di insegnamento-apprendimento in linea con gli effettivi meccanismi di produzione della conoscenza scientifica. Da un lato troviamo, quindi, il problem posing, il quale abbiamo visto essere strettamente connesso al meccanismo della variazione; dall'altro, l'apprendimento basato sulla ricerca, la quale, una volta innescata dalle domande poste dagli alunni, conduce alla costruzione della conoscenza. Attraverso la congiunzione di questi due aspetti, Arzarello, Cusi, Fagia-

[27] *Ibid*.

[28] https://xkcd.com/

no, Robutti, Swidan e Prodromu hanno elaborato una nuova proposta per l'insegnamento-apprendimento della matematica, la "Metodologia della Ricerca Variata[29]" (MRV), che verrà descritto nel dettaglio in questa sezione del capitolo ad esso specificatamente dedicato.

1.2.1. Problem posing, variazione, ricerca: prospettive per la didattica della matematica

Sono trascorsi quarant'anni dalla pubblicazione della prima edizione di *The Art of Problem Posing* (1983) di Brown & Walter, la quale ha dato avvio ad un filone di ricerca che nel tempo ha visto sempre più ricercatori nel campo psico-educativo e didattico interessarsi all'argomento. Nonostante le varie scoperte sul problem posing sia in quanto costrutto specifico, sia rispetto alla sua relazione con il problem solving e all'importanza che riveste in ambito educativo, soltanto in tempi molto recenti sta iniziando ad emergere una serie studi che riguardano i suoi meccanismi di funzionamento e i processi cognitivi coinvolti. Gli studi che riguardano i meccanismi di attivazione del problem posing, i quali cercano di comprendere come sia possibile stimolare gli studenti ad attivare processi di creazione di nuovi problemi a partire da una situazione iniziale, ci informano che è possibile attivare il problem posing attraverso contesti, modalità e strategie di vario tipo[30]. Già Brown & Walter nella loro pubblicazione del 1983 hanno elaborato una specifica strategia utile ad attivare processi di problem posing, la quale prende il nome di "What If Not?", che consente agli studenti di imparare a creare nuovi problemi attraverso la negazione degli attributi di un problema iniziale. L'approccio al problem posing che utilizza il What If Not? è costituito da una serie di livelli, attraverso i quali è possibile generare problemi nuovi anche senza conoscere in anticipo i concetti matematici coinvolti nel testo del problema. I livelli si articolano, in maniera progressiva, secondo quanto viene di seguito descritto in base all'elaborazione data dai due autori:

- Livello 0: *Starting point*. Viene scelto un problema o un certo evento che possa stimolare la curiosità degli studenti e presentato in modo tale da favorire la creazione di problemi significativi per conoscere o approfondire un certo concetto o argomento matematico;

[29] Ing. *Method of Varying Inquiry*
[30] Calabrese, J.E., Capraro, M. M. & Thomposon, C.G. (2022), *ivi*., pp. 1-2.

- Livello 1: *Lista degli attributi*. Ciascuno studente, individualmente o, preferibilmente, in piccolo gruppo, stila una lista di attributi del problema;
- Livello 2: *What If Not?* Per ciascuno degli attributi presenti sulla lista viene generata una variazione attraverso la negazione. Rispetto ad un certo attributo X, ci si chiede: «What If Not X?» («Cosa succede se non X?»);
- Livello 3: *Problem posing*. Ciascuna alternativa generata attraverso il What If Not?, viene utilizzata per porre un nuovo problema riguardo all'argomento trattato;

Livello 4: *Problem solving*. Tra i vari problemi generati, si sceglie uno o più problemi a cui provare a dare una o più soluzioni.

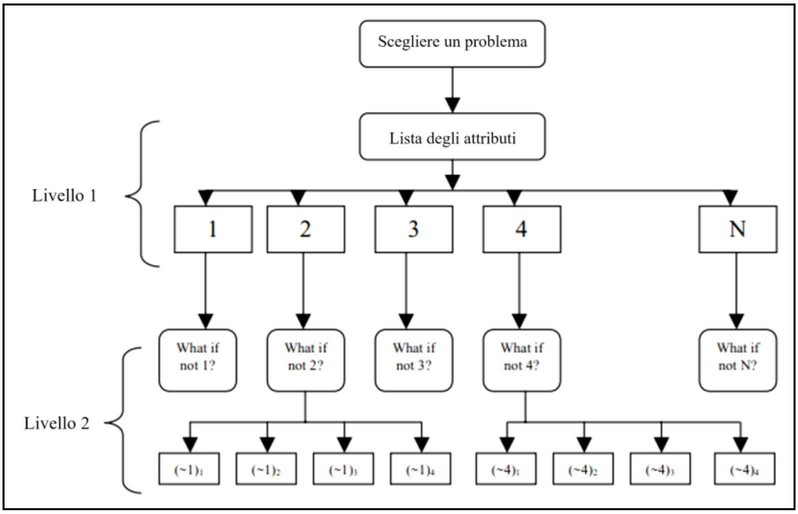


Figura 1.2.1. Descrizione schematica della strategia del "What If Not?"

Brown e Walter precisano che si tratti di uno schema non lineare, in cui ciascun livello può influenzare l'altro: ad esempio, da una domanda generata attraverso il What If Not?, potrebbero esserne generate altre, sottoforma di sotto-problemi durante la fase di risoluzione nel Livello 4, così come da un sotto-problema potrebbero scaturire nuovi attributi e nuove domande, dando vita ad un percorso che consente di osservare un fenomeno da più punti di osservazione. Il What If Not? costituisce una strategia di variazione che può essere molto utile soprattutto per gli studenti alle prime armi con il problem posing, in quanto fornisce una procedura che può fungere da guida per allenarsi a diventare un esperto problem poser; inoltre, può essere utilizzata anche senza avere solide conoscenze su un certo argomento, il che la rende utile nelle primissime fasi di approccio ad un concetto nuovo.

Studi successivi hanno mostrato che il meccanismo principale per attivare il problem posing è, infatti, la variazione[31], a prescindere dal fatto che avvenga o meno attraverso una negazione. Dato che si tratta di studi piuttosto recenti, quasi contemporanei al momento della stesura del presente elaborato, c'è sicuramente bisogno di ulteriori studi sui processi cognitivi che attivati nel momento in cui gli studenti eseguono una variazione. Si può comunque affermare che, indipendentemente dal fatto che si tratti di "What If?" o "What If Not?", la strategia che, in maniera più o meno consapevole, viene adottata per generare un problema nuovo è proprio quella di modificare uno o più attributi del testo iniziale, cioè, quella di eseguire una variazione. Calabrese, Capraro & Thompson (2022) e Zhang et al. (2022) hanno osservato che la maggior parte degli studenti, durante un compito aperto di problem posing, cioè in una situazione in cui gli studenti erano liberi di creare nuovi problemi senza alcun tipo di restrizione e senza specifiche istruzioni da parte dell'insegnante, metteva in atto meccanismi di variazione[32]. Un'ulteriore conferma giunge dal lavoro di Baumanns & Rott (2022), i quali hanno osservato che, lasciando gli studenti liberi di porre problemi attraverso modalità e strategie personali, quelle più utilizzate erano costituite dalla ricerca dei concetti matematici coinvolti nel problema e dalla variazione di uno o più attributi, secondo modalità simili a quelle What If Not?, anche senza introdurre una negazione[33]. Si tratta di risultati che non dovrebbero stupire molto, in quanto l' "arte" della variazione è insita in ciascuno di noi: ogni volta che osserviamo un fenomeno, che facciamo esperienza di una certa situazione, o quando veniamo a conoscenza di una certa informazione, siamo spinti a chiederci «Cosa succederebbe se…?», «Cosa succederebbe se non…?». Le persone hanno una naturale predisposizione a porsi domande di questo tipo per interrogarsi sulle cose del mondo, i cui tentativi di risposta – va ribadito – attivano il processo di ricerca che porta alla costruzione della conoscenza.

[31] Cai, J. & Rott, (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 61-71. Doi: 10.1007/s11858-023-01536-w

[32] Calabrese, J.E., Capraro, M. M. & Thompson, C.G. (2022), *ivi.*, p. 2.

Zhang, L. et al. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: the impact of task format and its relationship to problem solving. *Mathematics Education*, *54*, 497-512. Doi: 10.1007/s11858-021-01324-4

[33] Baumanns, L. & Rott, B. (2023), *ivi.*, p. 1382.

Accade ancora troppo spesso, però, che nelle aule scolastiche, soprattutto quelle di matematica, tale curiosità, tale spinta propulsiva a interrogarsi su ciò che è intorno propria dell'animo umano, invece di essere coltivata, venga in qualche modo sopita da una didattica ancora troppo tradizionale, in cui il la dimensione "formale", focalizzata sul *sapere* piuttosto che sul *saper fare*, viene mantenuta ancora nettamente separata dalla dimensione *reale*, continuando a focalizzarsi sull'acquisizione di un concetto piuttosto che sul suo apprendimento[34]. Il rischio di perpetuare questo tipo di sistema è alto, andando ad atrofizzare quelle che sono le vie principali e innate della conoscenza, di cui il porsi domande rappresenta un elemento cruciale.

La ricerca nel campo della didattica della matematica sta tentando oggi più che mai di venire in aiuto agli insegnanti, per aiutarli a indirizzare le loro pratiche verso un insegnamento nuovo ed efficace della disciplina, che tenga conto della naturale predisposizione degli studenti a porre domande e a ricercare soluzioni: la Metodologia della Ricerca Variata rappresenta, infatti, l'anello di congiunzione tra la teoria della variazione (*Variation Theory*) e l'apprendimento basato sulla ricerca (*Inquiry based Learning*), che rappresentano l'operazionalizzazione, rispettivamente, della variazione e della ricerca, al fine di migliorare il processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Prima di analizzare la metodologia MRV, vengono descritti sinteticamente i due approcci, in modo da poter comprenderne al meglio le caratteristiche e le potenzialità per una didattica della matematica efficace.

1.2.2. L'apprendimento basato sulla ricerca

Durante le lezioni di matematica di stampo più tradizionale – che lo si voglia o meno – il protagonista indiscusso della lezione resta, per la maggior parte del tempo, l'insegnante: decide cosa, quando e come gli studenti debbano apprendere, ponendosi al centro del processo di apprendimento e veicolando contenuti e modalità di svolgimento del pro-

[34] La contrapposizione tra dimensione *formale* e dimensione *reale* riguardo all'insegnamento della matematica trae ispirazione dal modello del "Ciclo virtuoso" elaborato da Swidan, Arzarello & Beltramino (2016), il quale verrà descritto nel dettaglio per comprendere le caratteristiche del modello del MRV, attraverso la descrizione fornita da Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023) nell'articolo *The Method of Varying Inquiry – A model for Simulating Inquiry-based Learning in Mathematics Classrooms*.

cesso. Non si tratta di una considerazione legata a una qualche possibile credenza su una certa superiorità insita nel ruolo dell'insegnante, ma piuttosto di una riflessione basata sul fatto che spesso, quello tradizionale, è l'unico modo di fare didattica che gli insegnanti conoscano e che, probabilmente, ricalca quello con cui gli è stato insegnato quando si trovavano dall'altra parte dei banchi di scuola. Accade, infatti, con più frequenza di quanto si pensi, che gli insegnanti non realizzino che ad oggi esiste a loro disposizione un ampio ventaglio di possibilità metodologiche e strumentali, che possano essere valutate e selezionate in base alle caratteristiche della classe, della disciplina e del contesto di apprendimento. Va anche detto, però, che gli scarsi risultati ottenuti in matematica da parte degli studenti a livello mondiale (salvo alcune brillanti eccezioni) sia nelle rilevazioni nazionali che internazionali[35], abbiano sollevato anche nel nostro paese notevoli discussioni e confronti sulla didattica della matematica. Negli ultimi anni una sempre più ampia porzione di insegnanti sta prendendo consapevolezza della necessità di un cambio di paradigma nell'insegnamento-apprendimento della matematica che veda lo studente al centro del processo, intento a costruire attivamente la propria conoscenza. Tale cambiamento è fortemente promosso dall'attività dinamica dei ricercatori nel campo della didattica della matematica, siano essi matematici, psicologici o pedagogisti, i quali grazie anche ai contributi che giungono dalle collaborazioni con gli insegnanti, hanno elaborato alcuni dei modelli più efficaci per l'insegnamento-apprendimento della matematica e delle scienze, tra i quali riveste un ruolo di prim'ordine l'apprendimento basato sulla ricerca, meglio conosciuto come "Inquiry Based Learning" (IBL).

L'IBL costituisce un approccio all'apprendimento che coinvolge direttamente gli studenti, i quali creano connessioni con il mondo reale attraverso l'esplorazione e il porre domande significative, ricercando connessioni con le esperienze di vita reale.[36] Si tratta di una metodologia in linea con quanto evidenziato nelle Indicazioni Nazionali rispetto al fatto che l'insegnamento della matematica debba "favorire l'esplorazione e la scoperta"

[35] Per quanto riguarda le indagini internazionali si fa riferimento alle prove elaborate da Invalsi, mentre per le rilevazioni internazionali ci si basa sui dati raccolti da OCSE-PISA e IEA-TIMSS.

[36] TEDx Talks. (2013, 9 giugno). *The power of student-driven learning: Shelley Wright at TEDxWestVanvouverED* [Video]. Disponibile da: https://www.youtube.com/watch?v=3fMC-z7K0r4

al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In qualsiasi prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali[37].

L'insegnante IBL guida gli studenti, li accompagna perché pongano domande significative rispetto al concetto in osservazione e tentino di trovare le risposte in totale autonomia all'interno di contesti collaborativi: l'attenzione si sposta dal *cosa* pensare al *come* pensare. L'ambiente prende le sembianze di un vero e proprio laboratorio, inteso sia come luogo fisico di sperimentazione sia come modalità in cui lo studente si sente coinvolto in modo attivo nel costruire il proprio apprendimento[38]. Secondo il modello proposto da Pedaste[39] (2016) il processo di inquiry si compone di 4 fasi: si inizia con l' "Orientamento", che avviene attraverso una discussione, ed è la fase in cui ci si rende conto dell'idea centrale. Da questa prima fase, si passa alla "Concettualizzazione", in cui gli studenti generano domande e formulano ipotesi, attraverso le quali è possibile avviare l' "Indagine" di ricerca vera e propria, in cui gli studenti esplorano, sperimentano e interpretano i dati, spesso in modo flessibile e dinamico. Si giunge alla "Conclusione" quando gli studenti arrivano ad una soluzione condivisa

[37] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p. 27.

[38] *Ibid*.

[39] Pedaste, M. (2016). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, *14*, 47-61, doi: 10.1016/j.edurev.2015.02.003.

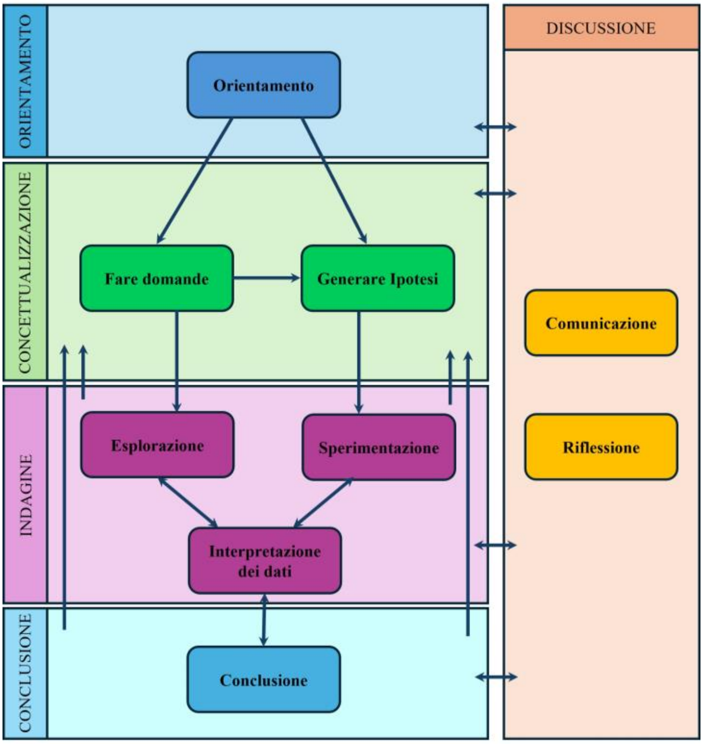


Figura 1.2.2. Rappresentazione grafica del modello IBL elaborato da Pedaste (2016)

Heather Banchi e Randy Bell[40] (2008) hanno definito 4 differenti tipi di inquiry che possono essere disposti lungo un continuum che va dall'inquiry strutturato, completamente centrato sull'insegnante, all'inquiry aperto, completamente centrato sullo studente:

- Livello 1: *Inquiry confermativo*. L'insegnante insegna i concetti, crea le domande e modella il processo di inquiry al posto degli studenti, i quali conoscono i risultati in anticipo;
- Livello 2: *Inquiry strutturato*. L'insegnante crea le domande iniziali e condivide le procedure, mentre gli studenti partecipano al processo attraverso la raccolta e l'analisi dei dati ed elaborano le conclusioni;
- Livello 3: *Inquiry guidato*. È la prima tipologia in cui si può realmente parlare di inquiry, in quanto gli insegnanti forniscono le

[40] Banchi, H. & Bell, R. (2008). The Many Levels of Inquiry. *Science and Children, 42(2)*, 26-29.

iniziali domande di ricerca, ma gli studenti sono i protagonisti del processo attraverso la progettazione delle procedure;

- Livello 4: *Inquiry vero* o *Inquiry aperto*. In questo tipo di inquiry gli studenti formulano le domande, progettano le sperimentazioni e le indagini di ricerca, raccolgono i dati e condividono le loro scoperte.

L'insegnate svolge un ruolo cruciale non solo nella scelta del livello di inquiry e nella progettazione del percorso, ma anche – e soprattutto – nell'aiuto fornito agli studenti, mettendo in atto strategie di scaffolding attraverso input adeguati durante la fase di creazione delle domande, nella fase investigativa e in quella di condivisione. Gli studenti, mediante il lavoro di gruppo, cooperano, discutono, esplorano possibilità ed elaborano domande e ipotesi di ricerca, ricercano soluzioni esplicative ed espongono i loro punti di vista, cercando di arrivare a una rappresentazione/spiegazione condivisa dell'argomento preso in esame.

L'IBL è un approccio che, grazie alla sua versatilità, può essere applicato a qualsiasi disciplina nell'ambito delle STEM, in cui la matematica entra pienamente in gioco. L'idea di fondo è, infatti, quella di coltivare la creatività e lo spirito di ricerca insito nella natura di ogni studente, per far sì che ognuno possa individuare il proprio canale conoscitivo, sfruttandolo per porsi domande significative sia rispetto all'argomento in esame sia rispetto alle proprie caratteristiche personali e, allo stesso tempo, imparare a condividere il proprio punto di vista, attraverso le modalità argomentative e i linguaggi propri di ciascuna disciplina.

Le tipologie di inquiry più efficaci, che prevedono un coinvolgimento completamente attivo dello studente, sono costituite dall'inquiry guidato e dall'inquiry aperto. Il gruppo di ricerca di Ferdinando Arzarello, Annalisa Cusi, Eleonora Faggiano, Ornella Robutti, Osama Swidan e Theodosia Prodromou, ha cercato di capire come potenziare l'uso di queste due tipologie di inquiry nell'insegnamento-apprendimento della matematica[41]: uno dei risultati di tale ricerca è rappresentato dall'elaborazione della Metodologia della Ricerca Variata.

1.2.3. *La Teoria della Variazione*

Gli studi sul problem posing e le ricerche che riguardano i suoi meccanismi di attivazione e di regolazione hanno messo in luce che molti

[41] Cusi, A. et al. (6 novembre 2020). *La metodologia della ricerca variata: un'esperienza di didattica a distanza nei licei matematici*.

studenti, quando lasciati liberi di generare i propri problemi in maniera spontanea, utilizzino la variazione come meccanismo principale di attivazione del problem posing. La spiegazione potrebbe essere dovuta al fatto che la variazione rappresenti una strategia che consente di comprendere meglio le caratteristiche principali di un problema o di un fenomeno, in quanto gli studenti, variando intenzionalmente alcune caratteristiche e lasciandone inalterate altre, riescono a concentrarsi su cosa accade per ogni specifico caso. In questo modo si può riflettere su ogni caso isolatamente, senza essere sovrastati dalla complessità che deriva dall'intreccio di più informazioni, e ragionare su ciò che rende simili o differenti le specifiche situazioni.

La Teoria della Variazione, elaborata da Marton & Tsui[42] (2004), riconoscendo le potenzialità della variazione e le possibilità che essa offre in ambito didattico, la pone al centro delle attività di insegnamento e di apprendimento delle STEM. L'idea di fondo parte dal presupposto che, per scoprire le caratteristiche chiave di un oggetto di apprendimento, ci sia bisogno di fare esperienza della variazione e dell'invariabilità e, per tale ragione, vengono creati contesti in cui c'è sempre qualcosa che varia, mentre qualcos'altro rimane invariato. In questo modo gli studenti possono prestare attenzione a ciò che varia e a ciò che resta uguale, dopo aver cambiato una o più caratteristiche di una situazione, e osservare le conseguenze che ne derivano. Dal punto di vista didattico, quindi, la Teoria della Variazione ritiene che l'apprendimento venga generato dal cambiamento apportato a una situazione di riferimento (sia essa una singola domanda, un problema, una tabella, un evento o una qualsiasi attività iniziale di stimolo), la quale viene scoperta, osservata, analizzata e compresa a partire da ciò che varia e ciò che resta uguale. Tale concezione, dal punto di vista epistemologico, ricalca in pieno il metodo della ricerca scientifica, che prevede che una variabile venga presa in esame attraverso la variazione dei suoi valori, mantenendo fisse le altre, al fine di osservare le relazioni esistenti[43].

[42] Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, Nj: Lawrence Erlbaum.

[43] Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 42 (5), A-B*, 541-554.

Secondo il modello elaborato da Hasan, Khan & Foysal Ahmed (2024) le componenti chiave per progettare una lezione basata sulla Teoria della Variazione sono[44]:

- *Oggetto di apprendimento*. La scelta dell'oggetto di apprendimento è fondamentale per la buona riuscita dell'obiettivo di apprendimento. A tale scopo gli insegnanti cercano di sviluppare un modo efficace di fare esperienza del fenomeno in questione, che tenga conto della capacità e delle caratteristiche degli studenti di affrontare le situazioni nuove in cui esso compare[45]. La scelta dell'oggetto di apprendimento costituisce un prerequisito fondamentale per creare un contesto di apprendimento efficace che tenga conto sia degli obiettivi del curricolo sia dello sviluppo di tutte quelle abilità e competenze che permettono di applicare le conoscenze e che è possibile sviluppare attraverso la didattica fondata sulla variazione;
- *Modelli di variazione*. Prima di poter progettare lezioni in classe, l'insegnante deve conoscere i quattro principali modelli di variazione (separazione, contrasto, generalizzazione e fusione) per sapere quali e come utilizzarli nei contesti di apprendimento;
- *Aspetti critici*. L'aspetto critico è la caratteristica o la dimensione dell'oggetto di apprendimento che viene variata di proposito. Si tratta degli elementi chiave che lo studente dovrebbe individuare per costruire una comprensione significativa dell'argomento. Solo se gli studenti riescono a riconoscere cosa è importante, allora possono identificare i modelli e le strutture sottostanti, scoprire i principi generale e fare connessioni.

Strutturare la consapevolezza. Si riferisce a come gli studenti diventano consapevoli degli aspetti cristici e delle variazioni per costruire la propria conoscenza dell'argomento trattato. Coinvolge i processi cognitivi degli studenti, quali, la loro capacità di identificare, distinguere e determinare le caratteristiche chiave attraverso le variazioni. Durante la sviluppo della consapevolezza, lo studente può costruire connessioni e significati più profondi attraverso le variazioni, che consentono di costrui-

[44] Hasan, M., Khan, M.S.H., Foysal Ahmed, A.K.M. (2024). Application of variation theory in STEM education: A comprehensive guideline for STEM teachers. *Jour (12)*.

[45] Pang, M.F. & Ki, W.W. (2016). Revisiting the idea of "critical spects". *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 323-336. Doi: 10.1080/00313831.2015.1119724

re una conoscenza comprensiva e olistica. Gli insegnanti costruiscono intenzionalmente le situazioni di apprendimento in modo che abbiano un impatto sulla struttura di consapevolezza degli studenti, guidando gli studenti a porre attenzione su ciascuno degli aspetti critici specifici dell'argomento trattato, considerandolo uno alla volta.

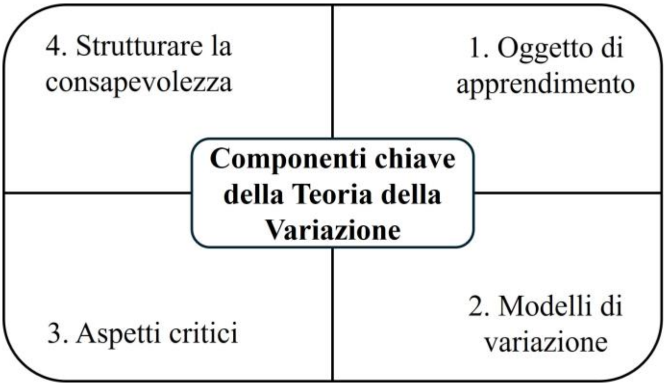


Figura 1.2.3. Aspetti chiave della Teoria della Variazione (Hasan, Khan & Foysal Ahmed,2024)

La Teoria della Variazione costituisce da molto tempo il perno della didattica tradizionale cinese, la quale – secondo alcuni autori[46] – ha consentito il successo in matematica di molti studenti, grazie alla loro abilità di porre domande e problemi significativi a partire dalla variazione dei testi e delle situazioni proposte. La Teoria della Variazione, così come proposta dalla pedagogia cinese classica, si basa su alcuni modelli di variazione[47]:

- *Separazione*. Tale principio ha alla base l'idea che per conoscere un oggetto di apprendimento bisogna variare ciascuna delle sue caratteristiche in maniera separata rispetto alle altre, modificando la caratteristica selezionata mentre le altre vengono mantenute fisse. Rientra in questo principio anche quello del *Contrasto*, in quanto accade spesso che per comprendere l'oggetto di apprendimento, risulta particolarmente utile metterlo a confronto con qualcosa di diverso (come, ad esempio, accade nel caso del What If Not?, il quale tiene conto del potenziale derivato dal considerare il contrario di una determinata caratteristica di un problema);

[47] Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004), *ivi*., pp. 350-351.

- *Generalizzazione*. Questo principio si fonda sull'idea che per ottenere una reale comprensione dell'oggetto di apprendimento, sia necessario fare tante esperienze su di esso nei più svariati contesti a cui fa riferimento (ad esempio, per capire cosa significhi "tre" bisogna fare una varietà di esperienze di situazioni in cui appare il "tre"). In questo modo, ad un certo punto, lo studente può identificare l'oggetto di apprendimento come il fattore che accomuna le diverse situazioni, il quale è, appunto, il meccanismo alla base della generalizzazione.
- *Fusione*. Dopo aver analizzato separatamente i vari aspetti critici dell'oggetto di apprendimento, c'è bisogno di riunificare l'intero, in modo che se ne possa fare un'esperienza simultanea e considerare insieme le sue caratteristiche.

Anche la Teoria della Variazione è in linea con un'idea di apprendimento che vede lo studente al centro del processo come attivo protagonista della costruzione della propria conoscenza. Lo studente è libero di condurre le proprie variazioni, individualmente, ma soprattutto attraverso i lavori di gruppo: egli osserva, genera domande e problemi, riflette su di essi, formula ipotesi, esplora possibili soluzioni e, attraverso il confronto con i pari, impara ad accogliere diversi punti di vista e a ricercare significati condivisi durante le discussioni di gruppo.

In questa prospettiva l'insegnante riveste un ruolo fondamentale nell'attuare le opportune strategie di scaffolding per aiutare gli studenti a familiarizzare con la strategia della variazione, prepara attività significative cercando di prevedere i comportamenti degli studenti, li stimola ad osservare gli aspetti chiave dell'argomento e a mettere in evidenza i contenuti propri della disciplina che emergono durante le discussioni collettive.

Dalla descrizione dell'apprendimento basato sulla ricerca e della teoria della variazione, si può osservare come i due metodi, oltre che ad essere accomunati dalla stessa idea di apprendimento, si configurino come due facce della stessa medaglia, completandosi a vicenda. Se da un lato, infatti, la teoria della variazione è interessata a individuare strategie efficaci per far in modo che gli studenti si pongano domande significative su un oggetto dell'esperienza, l'apprendimento basato sulla ricerca offre strumenti e strategie efficaci affinché, a partire da tali domande significative, si possa giungere, attraverso i processi chiave del metodo scientifico, ad una comprensione chiara e completa dei suoi significati. Variazione e ricerca, inoltre, rappresentano l'anello di congiunzione tra problem posing e problem solving, in quanto con la teoria della variazione viene fornita una possibile spiegazione su quali siano i meccanismi di attivazione e di funzionamento del problem posing, mentre mediante l'apprendimento basato sulla ricerca, viene mostrata una delle vie più efficaci per potenziare l'azione congiunta di problem posing e problem solving in ambito didattico. Dato il crescente interesse della ricerca verso l'argomento, ci si attende che studi futuri possano approfondire tale intuizione, in modo da ottenere ulteriori evidenze dei benefici offerti dall'azione didattica condotta integrando le due teorie.

La Metodologia della Ricerca Variata, tenendo conto dell'elevato potenziale didattico dei due approcci, si propone come un modello nuovo, i cui benefici sono stati già stati osservati in diversi studi condotti nelle aule scolastiche, che tenta di sfruttare quanto di meglio possa emergere da un'azione congiunta di variazione e ricerca nell'ambito della didattica della matematica.

1.2.4. La Metodologia della Ricerca Variata: caratteristiche, potenzialità, nuove possibilità

In questa sezione si cercherà di illustrare nel dettaglio la Metodologia della Ricerca Variata (MRV), descrivendone i presupposti teorici, le caratteristiche specifiche, le modalità di applicazione che consentono di ottenere risultati efficaci durante i processi di insegnamento-apprendimento, le implicazioni e le possibilità che un suo utilizzo determina nell'ambito della didattica della matematica. Durante tale descrizione verranno presi come riferimento gli elaborati originati dagli studi di Swidan, Cusi, Robutti e Arzarello (2023).

Le sperimentazioni condotte negli ultimi anni per osservare gli effetti didattici di MRV hanno mostrato che, grazie all'uso di tale modello nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica, gli studenti possono sviluppare competenze fondamentali in matematica come rappresentare, spiegare i fenomeni, costruire e descrivere modelli matematici, formulare definizioni e dar loro una spiegazione, ponendo domande e generando problemi significativi[48].

Swidan O., Cusi A., Robutti O. e Arzarello F. (2023) definiscono la Metodologia della Ricerca Variata – MRV (ing. *Method of Varying Inquiry – MVI*) secondo quanto segue:

[48] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi.*, pp. 2-11.

> MVI consists of designing activities as challenging tasks for students (as in the inquiry approach), in meaningful contexts (real-word or mathematical), by varying some variables of phenomena while keeping the others invariant (as in variation theory) to let students discern the object of learning embedded in the phenomena[49].

La metodologia, come si può osservare dalla definizione, rappresenta la congiunzione tra la teoria della variazione e l'apprendimento basato sulla ricerca, considerando gli aspetti più efficaci che ciascuno dei due approcci fornisce nell'ambito della didattica della matematica. In linea con i fondamenti della teoria della variazione, si varia una caratteristica dell'oggetto di apprendimento, mantenendo le altre invariate «per vedere l'effetto che fa»[50], mentre per quanto riguarda l'apprendimento basato sulla ricerca, anche secondo il modello MRV l'apprendimento si svolge con le modalità e gli strumenti della ricerca scientifica, trasformando gli studenti in veri e propri studenti-ricercatori[51], i quali pongono e si pongono problemi, formulano ipotesi, elaborano soluzioni, che espongono alla classe attraverso argomentazioni che usano il linguaggio proprio della matematica.

Si tratta di un modello di matrice socio-costruttivista, movimento psicopedagogico sviluppatosi in Occidente a partire dagli anni '70 del secolo scorso, grazie agli approfondimenti dell'opera di Vygotskij da parte di studiosi come Jerome Bruner. Il socio-costruttivismo nasce dall'unione dei caratteri fondamentali del costruttivismo di origine piagetiana, secondo il quale la mente costruisce attivamente i significati della realtà e le strutture mentali che la costituiscono, e l'interazionismo sociale di origine vygotskijana, che evidenzia come tale costruzione avvenga per mezzo di relazioni sociali. La mente, dunque, ha un ruolo attivo nella strutturazione del significato dell'esperienza e, allo stesso tempo, è il ri-

[49] Trad. it.: «La metodologia della ricerca variata consiste nel progettare attività nella forma di compiti sfidanti per gli studenti (come nell'approccio basato sulla ricerca), in contesti significativi (del mondo reale o matematici), variando alcune variabili di un fenomeno mentre si tengono invariate le altre (come nella teoria della variazione) per portare gli studenti a scorgere l'oggetto dell'apprendimento incorporato nei fenomeni» (Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. e Arzarello, F. (2023). The Method of Varying Inquiry – A model for Simulating Inquiry-based Learning in Mathematics Classrooms. *For the Learning of Mathematics*, *43*(1), 14-18.

[50] Arzarello, F. (2015). *Per un apprendimento sensato della matematica*. 2ª scuola estiva per insegnanti CIIM AIRDM (31 agosto 2015), Marina di Pietrasanta.

[51] *Ibid*.

sultato di processi di tipo sociale. Il socio-costruttivismo ritiene che i concetti, e le strutture mentali, secondo quanto teorizzato da Vygotskij, in prima istanza si sperimentino e si costruiscano nell'interazione con gli altri e che, solo in un secondo momento, vengano interiorizzati entrando a far parte del patrimonio cognitivo individuale.

A partire dalla sua relazione con la teoria della variazione e con l'apprendimento basato sulla ricerca e dall'influenza socio-costruttivista che lo permea, nel modello di MRV è stata sviluppata una serie di caratteristiche fondamentali che verranno descritte di seguito e che la rendono una metodologia che ad oggi è in grado di rispondere alle richieste di nuovi ed efficaci strumenti e strategie didattiche per l'insegnamento della matematica.

1.2.4.1. Il laboratorio matematico

Il laboratorio, come riportato Indicazioni Nazionali,

> [è] inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere i dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive[52].

Si tratta, di un costrutto italiano, elaborato all'interno del documento di indirizzo della scuola italiana, per dare forma ad una strategia didattica attiva che preveda il pieno coinvolgimento dello studente. Il laboratorio, infatti, non è da considerarsi solo come "luogo fisico" in cui condurre sperimentazioni, ma soprattutto come modalità operativa di apprendimento in cui lo studente venga posto al centro della costruzione dei suoi apprendimenti. Viene coinvolto nel modello di MRV in quanto approccio basato sul gruppo e sul lavoro con i pari, con cui gli studenti elaborano le loro domande e ipotesi, sulle discussioni in classe condotte dall'insegnante, e che predilige l'agire attraverso il problem posing e il problem solving[53].

L'uso del laboratorio, così inteso, può dunque facilitare la costruzione di significati matematici attraverso l'interazione sociale, posta al centro del modello.

[52] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p.40

[53] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi.*, pp. 2-11.

1.2.4.2. Importanza della dimensione sociale dell'apprendimento

Nel modello MRV, in linea con il pensiero scio-costruttivista, l'alunno è posto al centro del suo processo di apprendimento attraverso la collaborazione e il confronto con i pari. Il lavoro di gruppo, la formulazione condivisa delle domande e dei problemi, la discussione collettiva e il confronto tra i diversi punti di vista consentono di arrivare a una rappresentazione condivisa del fenomeno osservato. Le Indicazioni Nazionali evidenziano l'importanza della dimensione sociale nel processo di insegnamento-apprendimento, affermando che il compito della scuola è proprio quello di «incoraggiare l'apprendimento collaborativo»:

> Imparare non è solo un processo individuale. La dimensione sociale dell'apprendimento svolge un ruolo significativo. In tal senso, molte sono le forme di interazione e collaborazione che possono essere introdotte (dall'aiuto reciproco all'apprendimento cooperativo, all'apprendimento tra pari), sai all'interno della classe, sia attraverso la formazione di gruppi di lavoro con alunni di classi e di età diverse[54].

Nell'apprendimento della matematica, il confronto con i pari rappresenta un momento fondamentale per comparare i diversi punti di vista e negoziare significati. È, dunque, importante saper esporre il proprio punto di vista, le proprie ipotesi e i propri ragionamenti in maniera chiara e precisa, considerando anche quanto l'abilità di argomentazione costituisca un aspetto fondamentale della matematica e del suo metodo.

Un ambiente di apprendimento collaborativo possiede, quindi, una duplice valenza: da un lato permette di esplorare e osservare un fenomeno o un concetto matematico da più punti di vista, consente di riflettere, costruire domande, problemi, formulare ipotesi e costruire significati condivisi che nascono dal confronto tra pari; dall'altro, permette di allenarsi ad argomentare in maniera chiara ed efficace, usando il linguaggio specifico della matematica, con cui nella scuola primaria gli alunni iniziano a familiarizzare, arrivando progressivamente a una completa padronanza nei livelli successivi.

[54] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p.27

1.2.4.3. L'argomentazione riflessiva

I processi legati alla rappresentazione, alla giustificazione e alla dimensione sociale dell'apprendimento della matematica interagiscono in maniera sinergica attraverso la promozione dell'argomentazione riflessiva. Tale costrutto è stato teorizzato dal Michael H. G. Hoffmann (2016), il quale lo definisce come:

> […] un processo in cui la costruzione di argomenti viene utilizzata, intenzionalmente o non intenzionalmente, per stimolare uno o più dei seguenti processi: la riflessione sulla qualità dei propri argomenti; la riflessione sulla qualità del proprio modo di ragionare (il processo e il suo contenuto); l'identificazione di motivazioni per migliorare la qualità dei propri argomenti e ragionamenti; la ricerca creativa di modi per realizzare questo miglioramento; o la realizzazione di un cambiamento di prospettiva su uno di questi aspetti[55].

L'argomentazione riflessiva può essere considerato un processo centrale all'interno dei contesti di insegnamento-apprendimento della matematica, secondo l'idea che lo sviluppo delle competenze argomentative favorisca in maniera decisiva anche quello del pensiero matematico[56]. L'argomentazione riflessiva, infatti, così come teorizzata da Hoffmann, può essere attivata secondo tre diversi approcci, ciascuno dei quali coinvolge processi e abilità fondamentali per forgiare la competenza matematica. Il primo approccio ("approccio semiotico") fa leva sulle rappresentazioni, utilizzate per riflettere e verificare le proprie argomentazioni, in quanto rappresentano un modo concreto per osservare il proprio ragionamento. Il secondo approccio è di tipo "sociale", dal momento che considera l'argomentazione come dialogo su un argomento matematico tra individui. Come già osservato nel paragrafo precedente, il confronto dialogico con un pari, consente di confrontare il proprio punto di vista con quello degli altri, arricchendo la riflessione e la comprensione dell'argomento trattato. Mentre il terzo, quello "guidato da modelli", fa riferimento al ruolo del docente, in quanto modello di riferimento per imparare a costruire argomentazioni adeguate per condurre ragiona-

[55] Cusi, A. (2020). L'argomentazione riflessiva come strumento a supporto dei processi di valutazione formativa: il ruolo fondamentale del docente. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *8*, 9-27. Doi: 10.33683/ddm.20.8.1

[56] *Ibid.*

menti efficaci[57]. L'approccio MRV favorisce le tre tipologie di approccio all'argomentazione riflessiva, mediante il ricorso sia all'elaborazione di rappresentazioni canoniche e non canoniche, elaborate dagli studenti con lo scopo di poter "guardare" concretamente e avere uno strumento per riflettere e verificare i propri ragionamenti, sia alla dimensione sociale dei processi d'apprendimento, che considera l'altro come co-partecipante alla costruzione della propria comprensione di un argomento. I compagni diventano interlocutori fondamentali per arricchire la riflessione e, allo stesso tempo, l'insegnante assume il ruolo di guida esperta, in grado di mostrare agli alunni le modalità proprie del fare matematica.

1.2.4.4. Pensiero ipotetico, argomentazione e "senso per la matematica"

A. Schoenfeld (1992) parla di "senso per la matematica" facendo riferimento alla capacità di elaborare un personale punto di vista attraverso processi di matematizzazione e astrazione e ad avere la tendenza ad applicare questi processi ai contesti più diversi, includendo lo sviluppo delle competenze del mestiere e l'uso degli strumenti della matematica per giungere a una comprensione strutturale dei fenomeni[58]. Sviluppare il senso per la matematica significa, quindi, imparare a pensare matematicamente. Parlare di senso della matematica pone gli insegnanti di fronte al compito di costruire un metodo specifico per l'insegnamento della matematica, di cui l'argomentazione fa parte, il cui sviluppo viene considerato di primaria importanza già a partire dai primi approcci didattici alla disciplina. Le Indicazioni Nazionali concordano nell'affermare che o sviluppo di tale atteggiamento dovrebbe essere l'obiettivo principale dell'insegnamento-apprendimento della matematica. Per tali ragioni l'approccio MRV dedica particolare attenzione non solo al versante contenutistico, ma soprattutto ai processi e agli aspetti cognitivi e metacognitivi dell'apprendimento della matematica, tra i quali l'argomentazione riveste un ruolo significativo. L'attività argomentativa, in linea con quanto affermato da Arzarello (2019) permette di muoversi lungo due direzioni diverse e complementari: da un lato favorisce i pro-

[57] *Ibid*.

[58] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In Baumanns, L. & Rott, B. (2023). *Identifying metacognitive behavior in Problem-Posing Processes. Development of a framework and proof of concept* (pp. 1381-1406).

cessi di interpretazione, attraverso l'esposizione del proprio punto di vista e del proprio ragionamento nel tentativo di fornire una spiegazione, dall'altro consente di fare previsioni, nel momento in cui vengono elaborate ipotesi e riflessioni[59]. Il modello MRV favorisce l'argomentazione che emerge nei momenti di riflessione e discussione tra pari, sia come strumento per la costruzione di nuovi significati sia attraverso l'uso di forme come "se…allora" e "se non…allora" per formulare e giustificare le proprie conclusioni, contribuendo al miglioramento dell'abilità di presentare le informazioni in modo fluido e convincente[60].

1.2.4.5. Il ciclo virtuoso

Il modello del ciclo virtuoso, che è alla base del modello di MRV, costituisce il tentativo di Swidan, Arzarello & Beltamino (2016) di formalizzare il processo di pensiero che accompagna la costruzione del senso matematico dei concetti e dei fenomeni oggetto di apprendimento.
Il MRV viene applicato in classe attraverso momenti ben strutturati che tengono conto del ciclo virtuoso, il quale rende evidente come la matematica realizzi e spieghi sul piano formale gli aspetti informali della realtà. Il ciclo virtuoso, attraverso la sua spiegazione del meccanismo che è alla base dell'apprendimento di concetti matematici, fornisce una risposta a una delle questioni più ostiche della matematica, in quanto permette di comprendere il motivo che è alla base della diffusa difficoltà nell'apprendimento della disciplina. Il completamento del ciclo consente di rispondere a una delle domande più frequenti che vengono poste dagli studenti che riguardano il significato che una certa conoscenza matematica riveste nella vita quotidiana: porta a rispondere al "perché è" e a costruire il senso matematico delle cose.

Secondo quanto riportato da Arzarello (2015, 2019) e Swidan et al. (2023), alle cui letture si rimanda per ulteriori approfondimenti, nel pensiero matematico il ragionamento formale (teorico, matematico), inteso come proprietà che vengono usate, procedure tipiche, ecc., e quello informale (empirico, fenomenico) sono profondamente intrecciati e nel passaggio da un sistema all'altro si ha la comprensione matematica degli oggetti. Il ragionamento formale si intreccia a quello informale secondo una specifica successione di momenti significativi che si presentano du-

[59] Arzarello, F. (2019), *ivi*.
[60] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi*., pp. 2-11.

rante l'insegnamento-apprendimento di un concetto matematico, i quali vengono descritti dagli autori nel modo seguente[61]:

- *Rappresentazione di aspetti della situazione (connessi a un fenomeno in un contesto matematico o di vita reale) all'interno del sistema formale*.
  È la fase in cui, durante una lezione dedicata a un certo concetto matematico, si osserva una formula, un'espressione, un problema, una tabella, ecc.
- *Trattare la rappresentazione all'interno di un sistema formale o conversioni tra sistemi verso una generalizzazione in una classe di sistemi formali.*
  Grazie agli strumenti offerti dalla disciplina, vengono realizzate diverse rappresentazioni del concetto, le quali vengono osservare all'interno di una categoria esplicativa di tipo matematico, favorendo la generalizzazione del concetto.
- *Interpretazione della generalizzazione in relazione a una famiglia di situazioni.*
  A questo punto ci si chiede come sia possibile interpretare i risultati ottenuti nel sistema formale rispetto alla situazione reale/informale iniziale o a quelle osservate nella fase precedente.
- *Interpretazione della situazione iniziale all'interno di una famiglia di situazioni.*
  Gli studenti arrivano a comprendere che la situazione iniziale e quelle osservate nel corso del processo siano situazioni specifiche di una classe di situazioni per cui è valido il concetto matematico preso in esame. Perché il ciclo funzioni c'è bisogno che al termine ci sia una rilettura della situazione iniziale, la quale permette di esplorare la situazione come un caso particolare di una famiglia di situazioni[62].

[61] La descrizione delle fasi del ciclo virtuoso viene ripresa dall'articolo di Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), i quali ne forniscono una spiegazione esaustiva e dettagliata.

[62] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi.*, p. 7.

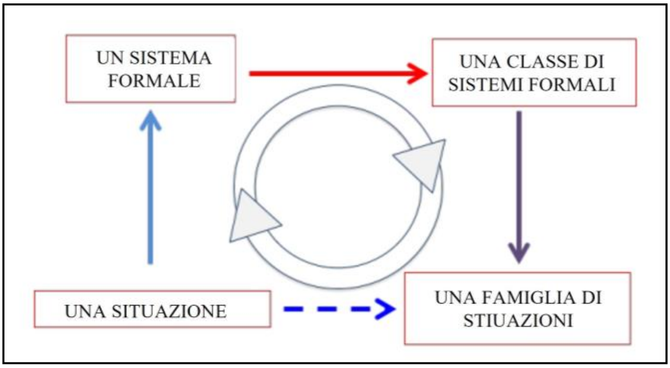


Figura 1.2.4. Il ciclo virtuoso (da Swidan et al, 2023)

Si ha un'interruzione del ciclo virtuoso, quando si verifica il solo passaggio da un sistema formale all'altro, producendo quella che Arzarello (2015, 2019) definisce "sospensione di senso", cioè un blocco sulla comprensione del significato che nella realtà riveste il concetto matematico osservato. Da qui, si innesca tutta una serie di conseguenze, quali il considerare la matematica come semplice applicazione di formule a contesti problematici preformati, abilità di esecuzione degli esercizi proposti dal libro di testo, l'orientamento verso un'ottica di performance piuttosto che di competenza e il considerare l'errore come un fallimento e non come parte del processo di apprendimento della matematica, che causano quell'insicurezza che porta alla cosiddetta "paura della matematica". Il MRV utilizza il ciclo virtuoso in maniera operativa, elaborando in base ad esso precisi momenti didattici che, attraverso gli ulteriori strumenti elaborati nel modello, possono contribuire alla costruzione di un apprendimento significativo ed efficace dei concetti matematici.

1.2.4.6. Le rappresentazioni matematiche e l'uso del linguaggio algebrico

Il MRV rientra tra i modelli di insegnamento-apprendimento della matematica volti a fornire agli studenti gli strumenti, le procedure e le metodologie proprie della disciplina. Si è osservato l'importanza che nel modello rivestono il confronto con i pari, attraverso la modalità della discussione, l'abilità di argomentare, di sostenere le proprie ipotesi e spiegare il proprio punto di vista in maniera chiara e precisa. Un aspetto strettamente collegato all'argomentazione e all'abilità di ragionare in termini matematici e che da sempre riveste un ruolo fondamentale in matematica è costituito dall'abilità di rappresentare. La matematica, infatti, è una disciplina che per dare un senso ai fatti ed eventi del sistema informale, utilizza un sistema formale dotato di numeri e strutture, utilizzando un linguaggio e degli strumenti specifici. Le rappresentazioni matematiche fanno parte del linguaggio stesso della matematica, del modo in cui essa si esprime e cerca di dare un significato alle cose. Le Indicazioni Nazionali riconoscono l'importanza dell'abilità di saper rappresentare attraverso gli strumenti matematici, prevedendo che il suo allenamento inizi già a partire dalla scuola primaria. Tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria si legge che l'alunno «Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, …)»[63] e al termine della classe quinta gli alunni dovranno essere in grado di «rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni» e di «rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimono la struttura»[64].

La rappresentazione ha una duplice valenza: da un lato è utile per visualizzare meglio la disposizione delle variabili di un compito o di un problema di matematica e, dall'altro, attraverso le rappresentazioni, anche non canoniche, delle quantità numeriche, favorisce la possibilità da parte degli studenti di cogliere i processi e le relazioni che legano le quantità. Grazie all'uso di strumenti di rappresentazione, gli studenti possono essere aiutati ad esplicitare e argomentare il ragionamento elaborato per risolvere un certo compito di matematica. In questo senso, le rappresentazioni matematiche sono strettamente collegate allo sviluppo del linguaggio algebrico, che riacquista il suo vero e pieno significato di motore delle spiegazioni matematiche dei fenomeni. L'insegnante può stimolare lo studente a spiegare il significato dei termini utilizzati per risolvere un determinato problema e, attraverso l'argomentazione, lo studente può esplicitare il proprio ragionamento, cogliendo le relazioni tra le quantità. Il linguaggio matematico utilizzato consente in questo modo di fare un passo avanti per generalizzare l'applicazione del concetto in analisi mediante l'uso del linguaggio matematico. A partire dalle prime acquisizioni in termini di sviluppo dell'abilità di rappresentazione, l'obiettivo del MRV è, dunque, anche quello di giungere progressi-

[63] Indicazioni Nazionali, *ivi.*, p. 50

[64] *Ibid*.

vamente alla scoperta dell'algebra come linguaggio proprio della matematica.

1.2.4.7. I livelli di MRV

Nell'esecuzione del modello di MRV in classe, i suoi autori hanno elaborato una serie di livelli, che rappresentano momenti specifici del processo di apprendimento, volti a promuovere lo sviluppo delle abilità matematiche finora elencate e a far in modo che gli studenti costruiscano, con l'adeguato supporto dell'insegnante, la propria conoscenza dell'oggetto di studio.
In base a quanto riportato da Swidan et al. (2023), i livelli si articolano secondo quanto segue[65]:

- *Punto di partenza* (*Starting point*). L'insegnante presenta alla classe un compito o un'attività che introduce una situazione, la quale è stata progettata dall'insegnante stesso perché gli studenti, attraverso la loro indagine, possano porre l'attenzione su caratteristiche specifiche dell'oggetto di apprendimento.
  Si tratta di un momento decisivo di MRV, in quanto ciascun tipo di compito o attività può mettere in evidenza alcuni precisi aspetti dell'oggetto di apprendimento piuttosto che altri. Ciò significa che ciascun tipo di compito o attività porterà gli studenti a focalizzarsi su dimensioni diverse della variazione.
- *Fare un elenco delle osservazioni.* Proprio come per il What If Not? di Brown & Walter, anche nel modello di MRV gli studenti stilano un elenco delle caratteristiche osservate. Le osservazioni potranno essere molto diverse tra loro e alcuni studenti potrebbero porre maggiore attenzione su un particolare aspetto, mentre per altri ne risulterà più evidente un altro.
- *Lavoro di gruppo e discussioni collettive*. Gli studenti lavorano in gruppo per scrivere osservazioni ed ipotesi. Allo stesso tempo, l'insegnante monitora gli studenti e li supporta in modo che essi condividano le loro idee all'interno del gruppo di lavoro. Inoltre, aiuta gli studenti in difficoltà fornendo gli input adeguati perché essi si focalizzino su certi aspetti specifici (variabili e/o relazioni) della situazione, che sono esattamente quelli che dovranno essere generalizzati per arrivare alla comprensione del concetto matematico. Durante le prime esperienze con MRV, probabilmente gli

[65] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi.*, pp. 5-6.

studenti avranno bisogno di un maggior supporto da parte dell'insegnante, di cui ci si aspetta una progressiva diminuzione in funzione del fatto che gli studenti acquisiscano familiarità con la metodologia. Dopo il lavoro in gruppi, agli studenti viene chiesto di condividere le loro osservazioni con la classe, le quali vengono annotate dall'insegnante sulla lavagna. In questa fase l'insegnante conduce la discussione, fornendo specifici input perché gli studenti condividano le loro osservazioni, ipotesi e spiegazioni, e indirizza la loro attenzione su aspetti significativi connessi all'argomento in analisi. L'insegnante, inoltre, stimola gli studenti a presentare le loro idee nella forma del "se…allora" e del "se non…allora", in modo che essi imparino ad argomentare secondo il linguaggio matematico. A tale scopo, l'insegnante chiede chiarimenti e formula domande del tipo "Come possiamo esprimere meglio questa idea per presentare le osservazioni in modo più preciso?", ecc.

- *E se…? E se non…? (What If? What If Not?)*. A questo punto, dalla discussione si passa all'attività di problem posing: gli studenti variano la situazione di partenza, osservando che cosa succede in base alla variabile che viene modificata. Lo spirito è proprio quello di cercare di capire e spiegare *come sarebbe se…?*
- *Metariflessione*. Come già osservato in precedenza, la metariflessione ha un ruolo fondamentale nell'apprendimento della matematica. Fanno parte di questo tipo di attività sia il cercare somiglianze e differenze all'interno di una classe di situazioni, riflettendo su di esse, sia gli interventi prodotti dagli studenti durante i momenti di discussione. In questa fase entrano in gioco il linguaggio algebrico, l'abilità di rappresentare e di argomentare nel momento stesso in cui gli alunni provano a fornire spiegazioni matematiche del concetto. Questa fase è fondamentale anche per il ciclo virtuoso, perché è qui che si cerca di compiere la conversione dalla forma orale al registro simbolico, cercando di riportare tutto al linguaggio matematico e generalizzare il concetto per una famiglia di situazioni. La metariflessione, infatti, si attiva nel momento in cui agli studenti viene chiesto di collegare la situazione reale/matematica specifica con la conoscenza teorica.

  Il compito dell'insegnante è quello di stimolare gli studenti perché identifichino le connessioni tra le spiegazioni fornite e di portare gli studenti ad esplicitare i concetti matematici presenti negli esempi proposti. In questo modo il ciclo virtuoso può essere completato, intrecciando problem posing, problem solving, argomentazioni e conoscenze degli studenti.

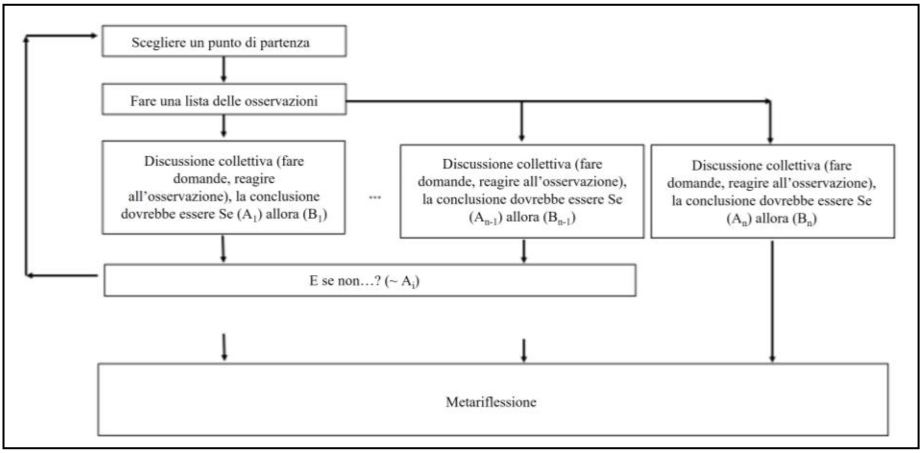


Figura 1.2.5. I livelli della Metodologia della Ricerca Variata (adattamento da Swidan et al., 2023

Attraverso la descrizione dei livelli che costituiscono il MRV, si può comprendere quanto esso costituisca una metodologia elaborata secondo riferimenti teorici e idee ben precise della matematica e del suo insegnamento. Il modello è stato progettato dai suoi autori fin nei minimi dettagli perché possa costituire un valido strumento operativo per gli insegnanti che intendano utilizzarlo nella pratica in classe. In funzione della sua complessità, teorica e strutturale, l'adozione del modello di MRV, implica una serie di considerazioni didattiche, anche per quanto riguarda la professionalità del docente. Nel paragrafo successivo si cercherà di mettere in luce tali implicazioni e di fornire una lettura sulla rilevanza didattica del modello.

1.2.5. Implicazioni didattiche della Metodologia della Ricerca Variata: verso una nuova professionalità del docente di matematica

Il MRV costituisce una metodologia che promuove un cambio di prospettiva rispetto al processo d'insegnamento-apprendimento della matematica. La scelta della metodologia MRV implica che l'insegnante accolga una precisa visione dell'insegnamento della matematica in classe, il che comporta un profondo cambiamento dei fattori coinvolti nel processo di apprendimento. Considerando il ruolo assunto dai soggetti dell'apprendimento, la Metodologia della Ricerca Variata pone al centro del processo lo studente, il quale, in quanto protagonista attivo, è lasciato libero di costruire le proprie conoscenze, abilità e competenze: il focus si sposta da ciò che gli insegnanti stanno insegnando a ciò che gli studenti stanno apprendendo. Si osserva un radicale cambio di prospettiva, in cui l'insegnante passa dall'essere un trasmettitore di conoscenze ad assumere il ruolo di guida esperta del processo di apprendimento dei suoi studenti. L'insegnante facilita il processo di apprendimento all'interno di un contesto in cui si chiede agli studenti di assumersi l'importante responsabilità del proprio apprendimento; stimola gli studenti attraverso varie tipologie di scaffolding, consentendo loro di divenire progressivamente più autonomi sia nell'abilità di problem posing e solving attraverso la strategia dell' "E se..?" ("What If?") e dell' "E se non…?" ("What If Not?"), sia nell'argomentare facendo uso delle rappresentazioni matematiche; inoltre, ha l'importante compito di facilitare il passaggio, attraverso domande opportune rivolte agli studenti, da una fase all'altra del ciclo virtuoso, mediante la promozione delle conversioni tra il sistema formale e informale, conducendo gli studenti verso la generalizzazione dei concetti matematici rispetto alle famiglie di situazioni.

Alla luce dell'importante ruolo svolto dal docente per un uso efficace del modello, una volta superate le possibili rigidità al cambiamento legate alla sicurezza che può fornire l'approccio tradizionale, è prevista una formazione iniziale che gli consenta di progettare e condurre lezioni coinvolgenti e di scegliere attività che favoriscano la possibilità da parte degli studenti di mettere in evidenza gli aspetti che si vuole approfondire del concetto matematico selezionato. La Metodologia della Ricerca Variata richiede, infatti, che gli insegnanti siano in grado di guidare l'attenzione degli studenti sulle strutture matematiche presenti nelle attività e negli elaborati degli alunni[66]. L'insegnante MRV, inoltre, è in grado non solo di progettare percorsi di apprendimento, ma anche di prevedere quelle che potrebbero essere le reazioni dell'alunno durante lo svolgimento dei livelli che costituiscono il modello e di tenerne conto in fase di progettazione[67].

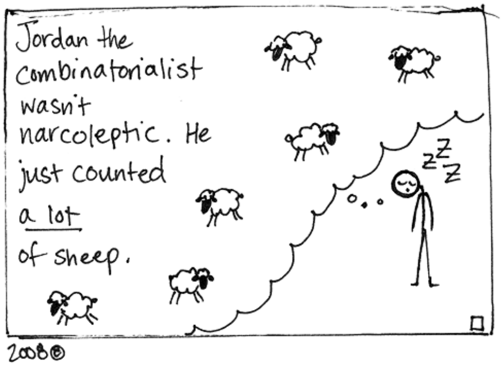
Al di là delle difficoltà, facilmente superabili grazie alla possibilità e alla volontà da parte degli insegnanti di apprendere nuovi metodi di insegnamento della matematica, il MRV offre numerose opportunità, tra

[66] Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O. & Arzarello, F. (2023), *ivi.*, pp. 5-6.

[67] *Ibid.*

cui la possibilità di divenire consapevoli dei processi di apprendimento dei propri studenti e di come essi costruiscano la loro conoscenza matematica. Si tratta di una metodologia che riconosce agli insegnanti il ruolo di professionisti dell'insegnamento, non soltanto sul piano delle conoscenze, ma soprattutto dal punto di vista strumentale e metodologico; può dunque rappresentare un'opportunità per aiutare gli insegnanti di matematica a svilupparsi sul piano professionale, ma anche per caratterizzare formalmente le modalità con cui già lavorano in classe, fornendo, in questo caso, strumenti per integrarle e perfezionarle.

Capitolo secondo
Il calcolo combinatorio nella scuola primaria



Adattamento da Brown Sharpie, *The Combinatorialist*, 2008.

2.1. Che cos'è la combinatoria?

La combinatoria costituisce una delle branche più antiche della matematica, le sue origini risalgono a tempi antichi… già nel I secolo erano noti i "quadrati magici"! Il suo studio sistematico inizia nel XVII secolo quando, con la *Dissertatio de arte combinatoria* (1666), Gottfried Leibniz gettò le basi per renderla una disciplina autonoma. A distanza di secoli, quando in matematica si parla di combinatoria, ancora oggi si fa confusione rispetto a una sua definizione univoca. Richard Anthony Brualdi, professore emerito di combinatoria all'Università del Wisconsin-Madison, la definisce nel seguente modo:

> Combinatorics is concerned with arrangements of the objects of a set into patterns satisfying specified rules… Thus, a general description of combinatorics might be that *combinatorics is concerned with existence, enumeration, analysis, and optimization of discrete structures*.[68]

[68] Brualdi, R. A. (2004). Introductory combinatorics (4th ed.). In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. Doi: 10.1016/j.jmathb.2020.100783 (Trad. it: "La combinatoria si occupa della disposizione degli oggetti di un insieme all'interno di modelli che soddisfino determinate rego-

La maggior parte delle definizioni convergono sull'idea che la combinatoria, come parte della matematica discreta, cioè di quella branca della matematica che ha a che fare – usando una spiegazione "grossolana" – con insiemi finiti o comunque numerabili, con strutture e insiemi finiti e discreti, rispondendo a domande che riguardano l'esistenza, l'enumerazione e le proprietà di tali strutture.

Per i meno addetti ai lavori, si potrebbe dire, come già qualcuno di più esperto ha affermato, che la combinatoria sia prima di tutto l' "arte di contare…senza contare"[69], rispondendo in prima istanza alla domanda «quanti sono?». Molti potrebbero forse considerare banale una domanda di questo tipo, soprattutto quando a dover essere contato è un numero "piccolo" di oggetti, trascurando in questa sede il fatto che, anche in questo caso, bisognerebbe tener conto del fatto che anche per definire "piccolo" un certo numero bisognerebbe comunque individuare un parametro di confronto che ci porti a considerarlo tale… il punto è che quando il numero di oggetti diventa molto grande – si pensi, ad esempio, al numero di parole che si può formare con le 21 lettere del nostro alfabeto – diventa quasi impossibile nella pratica riuscire a fare un elenco completo di tutti i "casi", con il rischio di fare la stessa fine di Jordan nella vignetta in epigrafe! E, soprattutto, qualora anche fossimo riusciti a contarli tutti, saremmo sicuri di averli elencati tutti, ma "proprio" tutti? C'è un modo per esserne sicuri senza dover ricominciare da capo? La combinatoria ci viene in aiuto: essa, infatti, fornisce gli strumenti di calcolo per la costruzione e la misurazione del numero di raggruppamenti che si possono formare a partire da una determinata quantità di elementi di un dato insieme, in modo che vengano rispettate determinate regole. In combinatoria spesso si è più interessati al numero delle combinazioni, rispetto alla conoscenza delle combinazioni stesse.

A primo impatto, potrebbe sembrare una matematica "diversa" rispetto a quella con cui si è più soliti entrate in contatto, lo stesso Eulero, davanti al famoso problema dei sette ponti di Königsberg, inizialmente non lo considerò come un problema "matematico", per il fatto che fosse piuttosto diverso rispetto alle altre aree più note della matematica in voga all'epoca, nonostante la soluzione che vi fornì sia oggi alla base della

le… Pertanto, una descrizione generale della combinatoria potrebbe essere che la combinatoria si occupa dell'esistenza, dell'enumerazione, dell'analisi e dell'ottimizzazione di strutture discrete").

[69] De Pretis, V. (2002). *La combinatoria. Primi elementi per la scuola dell'obbligo*. Disponibile da https://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/MD2014/Combinatoria.pdf

teoria dei grafi, uno dei capisaldi della combinatoria (e della topografia).[70] La combinatoria costituisce piuttosto la matematica con cui, in maniera più o meno consapevole, ognuno di noi ha a che fare ogni giorno, dal momento che, in quanto base del sistema computazionale, è divenuta parte integrante della vita quotidiana del XXI secolo. Quando, ad esempio, si preme "A" sulla testiera del pc o dello smartphone, perché la lettera appare sullo schermo? Oppure, ci si è mai chiesti come avvenga una comune comunicazione satellitare? Si tratta di domande che portano inevitabilmente a parlare della natura e delle applicazioni della matematica, considerando anche che la combinatoria, dal momento in cui le scienze hanno dovuto fare i conti con il "discreto" della realtà, stia diventando sempre più utile per l'elaborazione di modelli e teorie in tutti i settori della scienza.

Nonostante si tratti di un'importante branca della matematica, al pari dell'algebra, sembra che la combinatoria non abbia ancora acquisito lo stesso rilievo all'interno dei curricoli di matematica. La maggior parte degli studenti incontrino argomenti di combinatoria soltanto a livello universitario, mentre i più fortunati possono imbattersi in essi alla scuola secondaria, dedicandovi un tempo che non va al di là di qualche lezione, se paragonata ad un qualsiasi altro argomento di matematica trattato, e ancor più raramente, sia nel nostro paese che all'estero, se ne intravede qualche introduzione a livello di scuola primaria, nonostante numerose ricerche in campo educativo ne abbiano dimostrato l'utilità. Il matematico Gian Carlo Rota in *Analisi combinatoria*, nel 1973, in maniera elegante e completa aveva già ben sintetizzato quanto finora affermato, invitando ad una maggior presenza della combinatoria già a partire da livelli di istruzione più precoci:

> Quasi tutta la matematica classica, dall'algebra elementare alla teoria delle equazioni differenziali, è applicabile al mondo reale solo nell'ipotesi che questo sia costituito di oggetti e di eventi a carattere continuo. Però, in molte situazioni comuni in fisica e in chimica ed in altre scienze, si può parlare realisticamente solo di collezione di oggetti a carattere discreto, i quali agiscono in combinazione, un passo per volta; la matematica applicata a tali situazioni si chiama analisi combinatoria. Molti problemi di analisi combinatoria, tra i più interessanti, si sono presentati nella forma di ingegnosi indovinelli, a sfida di matematici e non

[70] Menietti, E. & Bautino, M. (2 marzo 2023). Come sette ponti portarono a una nuova matematica. *Il Post*. Disponibile da https://www.ilpost.it/2023/03/02/sette-ponti-teoria-grafi/ .

matematici assieme: a prima vista, alcuni di essi possono sembrare addirittura frivolezze, eppure quasi tutti hanno delle applicazioni immediate ed importanti a problemi scientifici concreti. Il campo vasto e mal definito della matematica applicata si va rapidamente dividendo in due parti distinte, con pochissimo in comune. La prima comprende la variopinta discendenza di ciò che nel secolo scorso si chiamava meccanica razionale o meccanica analitica, ed include imprese venerande ed illustri come la meccanica del continuo, la teoria della elasticità e l'ottica geometrica, al pari di sviluppi moderni quali la teoria dei plasmi, la teoria degli sviluppi supersonici e così via. Questa parte è in via di rapida trasformazione, anche per l'introduzione di calcolatori automatici veloci. La seconda parte, invece, concentra il suo interesse sui cosiddetti fenomeni discreti, sia in matematica, che nelle scienze naturali. Il termine combinatoria, introdotto dal filosofo e scienziato tedesco G.W. Leibniz in un suo classico trattato, è ormai di uso generale fin dal secolo XVII. Problemi di tipo combinatorio s'incontrano in quantità sempre crescente in ogni ramo della scienza, anche in quelli dove raramente si ricorre alla matematica. Si fa strada l'idea che le scienze della vita, raggiunto lo stadio in cui diventa indispensabile un apparato matematico, dovranno ricorrere soprattutto alla teoria combinatoria: questo è già evidente in quelle branche della biologia come la genetica e la biologia molecolare, in cui la ricchezza di dati sperimentali permette la graduale elaborazione di teorie solidamente fondate. La fisica stessa, da tempo fonte di tante ricerche matematiche, si trova oggi di fronte a problemi difficili, in meccanica statistica e in teoria delle particelle elementari, che non possono essere risolti finché non si saranno elaborate teorie completamente nuove, di natura combinatoria, per comprendere la struttura discontinua del mondo molecolare e subatomico. A tutti questi incentivi dobbiamo aggiungere il calcolo automatico veloce, il quale esige l'impiego di teorie combinatorie, come guida indispensabile all'azione concreta. L'interesse per i problemi combinatori è stato poi grandemente stimolato anche dalla possibilità di saggiare, a mezzo di calcolatori automatici, congetture del tutto inaccessibili. Tutti questi sintomi basterebbero già a pronosticare una più intensa attività di ricerca in teoria combinatoria. Un altro indizio, forse più importante, è dato dall'impulso verso indagini di tipo combinatorio, che si sviluppa nel seno stesso della matematica.

L'obiettivo di questo capitolo è quello di conoscere il calcolo combinatorio, che è a fondamento della combinatoria enumerativa, e le sue potenzialità didattiche all'interno del contesto scolastico, per comprendere come sia possibile e quanto sia importante introdurre tale argomento nel curricolo di matematica già a partire dalla scuola primaria.

.

2.2. Il calcolo combinatorio

Si è detto che spesso in combinatoria si è più interessati al numero dei casi, rispetto a come effettivamente essi si presentino[71], cercando di rispondere alla domanda: "Quanti sono?". Il calcolo combinatorio si occupa dello sviluppo di modalità che permettano di ottenere il numero di casi o raggruppamenti distinti che si possono presentare a partire da un certo numero di elementi di uno o più insiemi, senza ricorrere alla loro enumerazione esplicita. Si tratta della branca della matematica che studia, quindi, i modi di raggruppare e ordinare oggetti presi da un insieme assegnato, con l'obiettivo finale di contare il numero dei possibili raggruppamenti e ordinamenti. Ad esempio, in quanti modi diversi si può realizzare una bandiera tricolore con una tavolozza da 5 colori? Quanti sono gli anagrammi della parola ROMA? In quanti modi si possono scegliere tre numeri diversi compresi tra 1 e 50 in modo che la loro somma sia divisibile per 4? Nel menù di un ristorante si può scegliere tra cinque primi piatti, sei secondi e sette dessert: quanti tipi di pasti con almeno una portata diversa può somministrare il ristorante? In quanti modi diversi posso scegliere i 3 protagonisti dello spettacolo di fine anno in una classe di 21 alunni? Per rispondere a queste domande, bisogna prima disporre di informazioni fondamentali che riguardano:

- Il numero di elementi disponibili;
- Il numero di elementi che costituiscono un singolo raggruppamento (o caso) o numero di posti;
- Alcune regole per procede alla costruzione dei raggruppamenti o casi. Tali regole differiscono grandemente in base al fatto che si possano usare tutti gli elementi disponibili oppure una sola parte di essi, o che lo stesso oggetto possa essere utilizzato una sola volta o più volte all'interno di uno stesso raggruppamento e, in questo caso, occorre stabile se è fissato o meno il numero di possibili ripetizioni; altre regole si basano sul fatto che l'ordine in cui vengono disposti gli elementi nei raggruppamenti sia più o meno importante.[72]

In base alle scelte che si realizzano per ciascuno dei punti elencati, c'è una variazione sia del numero che del tipo di raggruppamenti, con

[71] De Pretis, V. (15 maggio 2002). *La combinatoria. Primi elementi per la scuola dell'obbligo*. Disponibile da https://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/MD2014/Combinatoria.pdf

[72] *Ibid*.

l'utilizzo di modelli di calcolo combinatorio differenti, di cui andremo a descriverne i principali coinvolti nel presente studio. Il problema, che riguarda sia gli addetti al settore che i neofiti, è che non sempre è facile individuare il modello più adeguato per rispondere alla situazione che si ha davanti… ma forse è proprio tale peculiarità a rendere la combinatoria così affascinante e, soprattutto, a proporla come un argomento efficace per lo sviluppo di una buona competenza in matematica.

Per entrare nel vivo della questione, bisogna prima di tutto fissare i valori di n, numero di elementi disponibili, e i valori di k, numero di elementi contenuti in un singolo raggruppamento o numero di posti. Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli n elementi sono i 7 alunni, mentre il numero k di posti è costituito dalle 5 sedie.
Una volta fissati n e k, possiamo dire che il calcolo combinatorio fornisce gli strumenti di calcolo per determinare il numero di raggruppamenti che si possono formare con un numero k di oggetti presi da un insieme contenente n elementi, con $n \geq k$, secondo modalità diverse:

a. Se i k oggetti formano gruppi ordinati, si parla di *disposizioni*;
b. Se i k oggetti formano gruppi non ordinati, si parla di *combinazioni*;
c. Se $k = n$ i gruppi ordinati prendono il nome di *permutazioni*.[73]

2.2.1. Permutazioni, disposizioni, combinazioni semplici: informazioni preliminari

Nel presente paragrafo è stata elaborata un'introduzione alle permutazioni e disposizioni semplici in modo da fornire informazioni preliminari sui due modelli di calcolo combinatorio che riguardano il presente studio, al fine di poter cogliere aspetti salienti della sperimentazione descritta nel Capitolo 3. Si aggiunge qualche informazione di base sulle combinazioni semplici, allo scopo di poter cogliere le somiglianze e le differenze tra i diversi modelli e potersi fare un'idea generale dell'argomento trattato.

2.2.1.1. Permutazioni semplici

Si parla di *permutazioni* nelle situazioni in cui:

[73] Università di Pisa, dipartimento di matematica (2017). *Il calcolo combinatorio*. Disponibile da https://people.dm.unipi.it/gelli/2017/chimica17/combinatoria2.pdf.

- si ha un numero di elementi disponibili *n;*
- ciascun elemento di *n* viene preso una sola volta per formare raggruppamenti di *n* posti, in quanto $k = n$;
- un raggruppamento differisce da un altro per l'*ordine* in cui gli elementi vengono disposti.

Dato un insieme A di *n* elementi diversi tra loro, si dicono permutazioni di tali *n* elementi, tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli *n* elementi, prendendoli tutti ($k = n$), considerando l'ordine in cui vengono disposti.
Se lo stesso elemento non può presentarsi più di una volta all'interno dello stesso raggruppamento, si parla di *permutazioni semplici* (es. quante parole puoi formare con le lettere A, B, C, D?); in presenza di ripetizione degli elementi, si parla di *permutazioni con ripetizione*.
Nel caso delle permutazioni semplici (P_n), per capire come calcolare a priori il numero di casi senza doverli necessariamente enumerare attraverso strumenti di rappresentazione e, nel caso lo si abbia fatto, per essere certi di aver considerato tutti i possibili casi, partiamo dall'esempio precedente, posto tra parentesi: date 4 lettere diverse (A, B, C, D), per il primo posto ci sono 4 possibili scelte tra le 4 lettere (*n*); un volta scelta la prima lettera, per la scelta della lettera da inserire al secondo posto ci sarà una scelta in meno perché una lettera è già stata scelta e non è possibile ripetere lo stesso elemento, quindi, si avrà *n-1* scelte; una volta scelti i primi due elementi, per lo stesso ragionamento, al terzo posto si avrà *n-2* scelte e, per l'ultimo posto, si avrà *n-3* scelte. Tale ragionamento è alla base di una delle operazioni più importanti del calcolo combinatorio e è presente nella formule di risoluzione di molti suoi problemi. L'operazione, chiamata *fattoriale di n*, costituisce il prodotto di *n* fattori interi decrescenti da *n* a 1 e si indica con il simbolo *n!* (si legge: «n fattoriale»), che – non a caso – è anche il simbolo con cui si indicano le permutazioni semplici di *n* elementi:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Nei casi in cui *n* è costituito da un numero di elementi enumerabile, è possibile visualizzare i casi attraverso strumenti di rappresentazione, indispensabili per approcciare al calcolo combinatorio.
Per l'esempio proposto, si è scelto di rappresentare i casi mediante una tabella, secondo quanto segue:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Tabella 2.1. Elenco delle permutazioni di A, B, C, D

Di fronte a numeri più grandi (anche n = 5 o 6 potrebbe essere considerato tale), è molto più difficile riuscire ad elencare tutti i possibili casi, ragion per cui ricorrere alla formula risulta sicuramente più agevole. È comunque opportuno sottolineare che le modalità di rappresentazione costituiscono uno strumento indispensabile e complementare all'uso delle formule per ragionare sui problemi di combinatoria e, soprattutto, per "visualizzare" il processo che concretamente conduce alla formula, la quale costituisce il linguaggio matematico per esprimerlo.

2.2.1.2. *Disposizioni semplici*

Si parla di *disposizioni* nelle situazioni in cui:

- si ha un numero di elementi disponibili n;
- ciascun raggruppamento contiene k elementi ($k \leq n$), tutti diversi tra loro;
- per differenziare i raggruppamenti, ciascun elemento può essere sostituito con gli elementi rimanenti e/o si può variare l'ordine in cui sono disposti gli elementi.

Dato un insieme A di n elementi distinti e un numero $k \leq n$, si dicono *disposizioni semplici* ($D_{n,k}$) di tali n elementi presi a k a k, tutti i raggruppamenti formati da k degli n elementi dell'insieme A in modo che in ciascun raggruppamento figurino k oggetti senza ripetizione e che ciascun raggruppamento differisca dall'altro per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli stessi elementi si presentano. In presenza di ripetizione degli elementi, di parla di *disposizioni con ripetizione*.

Le disposizioni sono i raggruppamenti realizzati quando il numero degli elementi è diverso rispetto al numero di posti a disposizione e quando conta l'ordine con cui gli elementi vengono disposti. La situazione è simile a quella delle permutazioni, con la differenza che k può anche essere minore di n. Ad esempio, se si vuole eleggere, tra i 20 soci di una cooperativa, un presidente, un vicepresidente e un segretario, possiamo scegliere in n modi diversi la persona da eleggere al primo posto, cioè come presidente; una volta eletto il presidente, ci sono n-1 modi diversi per eleggere al secondo posto, cioè come vicepresidente, (possono essere eletti tutti, tranne la persona che è stata eletta presidente); e, una volta eletti presidente e vicepresidente, si può eleggere al terzo posto, come segretario in n-2 modi quello da mettere al terzo posto; poiché i posti sono k, all'ultimo posto potremmo scegliere tra n-(k-1) persone (tutti meno i k-1 già eletti). Tale concetto, nel linguaggio matematico, viene espresso nel modo seguente:

$$\mathrm{D}_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dato che, come abbiamo visto, k può essere minore o uguale a n, si intuisce che nel caso in cui $k = n$, le disposizioni semplici coincidono con le permutazioni semplici di n elementi.

2.2.1.3. *Combinazioni semplici*

Si parla di *combinazioni* nelle situazioni in cui:

- si ha un numero di elementi disponibili n;
- ciascun raggruppamento contiene k elementi ($k \leq n$), tutti diversi tra loro;
- due raggruppamenti differiscono se hanno almeno un elemento diverso;
- non ha importanza l'ordine con cui vengono disposti gli elementi.

Le combinazioni di n elementi presi a k a k ($C_{n,k}$), sono il numero di raggruppamenti non ordinati di numerosità k. Dato che l'ordine non conta, *ab* viene considerato uguale a *ba*, dal momento che i raggruppamenti sono formati dagli stessi elementi (a, b). Le combinazioni possono essere senza ripetizione (*combinazioni semplici*) o con ripetizione (*combinazioni con ripetizione*). La situazione è simile a quella delle disposizioni semplici, in cui però i casi formati dagli stessi elementi vengono considerati diversi in base al diverso ordine con cui vengono disposti (nelle disposizioni semplici $ab \neq ba$). Ad esempio, quante commissioni diverse si possono formare scegliendo 5 rappresentati in un gruppo di 30 persone? In questo problema, ci si sta chiedendo «quante combinazioni di 30 elementi di classe 5 si possono formare?». In apparenza il problema potrebbe sembrare simile a quello dei 20 soci della cooperativa nel paragrafo precedente, ma in questo caso i raggruppamenti costituiti dagli stessi elementi vanno contati una sola volta, dato che non si è interessati all'ordine.

Per via della sottile somiglianza con le disposizioni, può accadere che il termine "combinazione" venga usato in modo improprio, come, ad esempio, quando viene usato per definire il gruppo di cifre necessarie per aprire una cassaforte. In questo caso, infatti, si tratta di disposizioni, poiché è importante anche l'ordine con cui le cifre vengono composte, in particolare, in questo caso di parla di disposizioni con ripetizione, poiché la stessa cifra può essere usata più volte[74]! Non ci addentreremo oltre nel discorso sulle combinazioni, in quanto per i fini di tale elaborato, ci basta sapere che tra permutazioni, disposizioni e combinazioni esiste un filo conduttore che in ogni situazione induce a riflettere su quale sia il punto di vista migliore per osservarla e analizzarla e, soprattutto, a ragionare su aspetti di identità e ordine, fondamentali per discriminare tra le varie forme più adatte allo specifico caso.

2.3. Il calcolo combinatorio nella scuola primaria

2.3.1. Insegnare la combinatoria

Da qualche anno, diversi paesi nel mondo, come Germania, Israele, Brasile e Spagna,[75] hanno iniziato ad estendere lo studio della combinatoria anche ai gradi d'istruzione pre-universitari, attribuendole una forte presenza all'interno dei curricoli dei diversi ordini e gradi. Ad oggi, ci sono a disposizione diversi studi che, pur richiedendo uno studio sistematico sull'argomento, hanno aperto la strada alla possibilità di inserire l'insegnamento della combinatoria già nella scuola primaria (English, 1991, 1993, 1999, 2005; Feudenthal & Gazit, 1988; Maher & Martino, 1996; Arwadi et al., 2017; Posicelskaya, 2023). Le indicazioni nazionali di molti paesi, sottolineando l'importanza di fornire agli studenti di tutti i livelli opportunità per impegnarsi nei processi matematici fondamentali, quali rappresentare, argomentare, astrarre, generalizzare e individuare rela-

[74] De Pretis, V. (2002), *ivi.*, pp. 5-6.

[75] Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. Doi: 10.1016/j.jmathb.2020.100783.

zioni, vedono nei problemi di combinatoria un'occasione significativa di apprendimento per imparare a ragionare "matematicamente" e allenare a tutti quei processi che si sono mostrati fondamentali per costruire la competenza matematica. Diversamente da quanto si potrebbe ingenuamente pensare, la letteratura in didattica della matematica, che da quasi un lustro si dedica all'insegnamento della combinatoria, ha fornito e continua a fornire numerose evidenze riguardo agli effetti positivi che l'insegnamento della combinatoria riveste per l'apprendimento degli studenti, non solo rispetto all'argomento specifico che – come già osservato – risulta strettamente legato ai contesti di vita quotidiana del XXI secolo e fornisce strumenti per le più recenti modellizzazioni in tutte le discipline scientifiche, ma soprattutto per lo sviluppo di tutte quelle abilità che sono fondamentali per forgiare la "mente matematica". Già nel 1970 il professor J. N. Kapur nel suo articolo pubblicato in *Educational Studies in Mathematics*, intitolato "Combinatorial analysis and school mathematics", ha individuato un'ampia serie di motivazioni sull'importanza e sui benefici dell'insegnamento della combinatoria a partire da gradi d'istruzione più precoci:

> Combinatorial mathematics is an essential component of the mathematics of the discrete and as such it has an important role to play in school mathematics. This role has been little exploited so far.
>
> Some of the reasons which make combinatorial analysis important in school mathematics are the following:
>
> (a) Since it does not depend on calculus, its problems can be taken up at an early stage in the school curriculum. In fact it has problems suitable for all grades.
> (b) It can be used to train students in the concepts of enumeration (counting with counting through counting without counting), making conjectures, generalizations, optimization, existence, systematic thinking, etc.
> (c) Applications to physics, chemistry, biology, network analysis, design of experiments, communication theory, symmetry, probability, dynamic programming, number theory, topology, recreational mathematics, etc. can be indicated.
> (d) The need for creation of more mathematics can be created in the minds of students. A large number of challenging problems can be indicated to them.
> (e) Distinction between plausible and rigorous proofs can be brought out.
> (f) Enough motivation for working with computers can be provided.

(g) Students can appreciate the powers and limitations of mathematics as well as the powers and limitations of computers through combinatorial mathematics.
(h) It can help in the development of concepts of mapping, relations, functions, equivalence relations, equivalence classes, isomorphisms, etc. rather clearly.
(i) Some of the great victories of the human mind over challenging problems can be indicated.
(j) Most of the combinatorial problems and their applications have been developed recently and so students can get a feeling for the growth of mathematics.
(k) This can help in developing the combinatorial attitude of mind which examines all possibilities, enumerates them and finds out the best possibility and thus leads to clearheaded thinking.[76]

Gli studi successivi hanno confermato l'efficacia dell'insegnamento della combinatoria, mostrando che gli studenti, nel momento in cui tentano di risolvere un problema di tipo combinatorio, attivano processi fondamentali per lo sviluppo delle abilità che costituiscono la competenza matematica[77]. In base ai risultati ottenuti finora sembrerebbe, dunque, che la combinatoria preveda metodi, strategie operative e strumenti

[76] Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics, Educational Studies in Mathematics. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783. In questo brano l'autore fornisce una serie di fattori che motivano all'insegnamento della combinatoria: a) assenza di dipendenza dal calcolo che fa in modo di poter anticipare l'inserimento del calcolo combinatorio precocemente; b) aiuta nell'allenamento dell'enumerazione, del fare congetture, della generalizzazione, pensiero sistematico, ecc.; c) ha numerose applicazioni in molte discipline, tra cui fisica, chimica, biologia, ecc.; d) amplia la visione che gli studenti hanno della matematica; e) sviluppa l'argomentazione; f) motiva nell'uso del computer; g) aiuta gli studenti ad apprezzare i limiti e le potenzialità dei computer; h) può aiutare nello sviluppo di mappature, relazione, funzioni e ad osservare più chiaramente; i) propone problemi sfidanti; j) molte della applicazioni della combinatoria sono recenti, facendo in mod oche gli studenti percepiscano la crescita della matematica; k) aiuta a sviluppare la predisposizione mentale tipica della combinatoria, la quale esamina tutte le possibilità, le enumera e scopre la possibilità migliore, migliorando i processi di pensiero.

[77] English, L. D. (2005). *Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning*. Doi: 10.1007/0-387-24530-8_6

che favoriscono lo sviluppo delle abilità inerenti alle tre macro-aree (conoscere, argomentare, risolvere problemi) che definiscono la competenza matematica.[78]

Il discorso si inserisce pienamente all'interno della questione, sempre più urgente e necessaria, su quali siano gli strumenti e i metodi più adeguati per una didattica della matematica di qualità, una didattica che allo stato attuale sembra non riuscire ancora a garantire pari opportunità nell'apprendimento della disciplina agli studenti di ogni ordine e grado. Sono sempre di più gli insegnanti di matematica che reclamano strumenti e metodi efficaci per ampliare la loro "cassetta degli attrezzi" in modo da rispondere alle richieste formative e ai bisogni dei loro studenti. L'introduzione della combinatoria nei curricoli di matematica sembra poter rispondere alle necessità di insegnanti e studenti, proponendosi, ferma della sua secolare tradizione, come un argomento "nuovo", efficace e senza dubbio dotato di fascino, la cui trascuratezza negli anni può essere perdonata nel momento in cui sono in molti ad oggi, in ogni settore scientifico, a riconoscerne l'utilità (nonché la necessità) per l'elaborazione di nuovi modelli e teorie per spiegare fenomeni discreti. Allo stesso modo, in campo didattico, iniziare a riconoscere la validità della combinatoria significa che la scuola si stia muovendo in maniera concreta, cominciando ad interrogandosi sugli aspetti che possano realmente condurre ad un insegnamento della matematica equo e di qualità, per consentire a tutti gli studenti – e non solo a quelli "più dotati" – di avere pari opportunità nello sviluppo della competenza matematica.

Nei paragrafi successivi si andrà ad osservare quali aspetti metodologici e strumentali rendano l'insegnamento della combinatoria utile per lo sviluppo delle abilità matematiche e verrà posta attenzione su quanto questi aspetti metodologici e strumentali risultino in linea con i presupposti teorici e operativi del Metodo della Ricerca Variata, riflettendo sulle opportunità che una loro integrazione potrebbe fornire per la didattica della matematica.

2.3.2. Perché insegnare combinatoria

Insegnare la combinatoria in classe può favorire lo sviluppo delle abilità fondamentali per la competenza matematica già a partire dalla terza primaria, con l'introduzione del calcolo combinatorio[79]. Di seguito ven-

[78] Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020), *ivi.*, p.4.

[79] *Ibid.*

gono analizzati nel dettaglio gli aspetti, le caratteristiche metodologiche, strategiche e strumentali emersi dalla ricerca sul campo a favore dell'insegnamento della combinatoria.

2.3.2.1. La combinatoria è accessibile

Parlare di "accessibilità" in riferimento ai contesti di insegnamento-apprendimento della matematica, significa considerare il fatto che, di fronte ad un argomento accessibile, gli studenti possono avere una maggiore possibilità di comprendere i concetti che lo costituiscono, riuscendo allo stesso tempo ad essere più motivati e coinvolti nello svolgimento delle attività e nella risoluzione dei problemi. Dire che la combinatoria sia "accessibile", non significa che sia più "facile" – gli studenti mostrano difficoltà anche di fronte a problemi di calcolo combinatorio! –, ma vuol dire riconoscere un aspetto fondamentale che riguarda la combinatoria e, più specificatamente, il calcolo combinatorio e, cioè, che i problemi proposti fanno riferimento a contesti che, nella maggior parte dei casi, sono particolarmente familiari per gli studenti, il che rende le domande di facile comprensione. Inoltre, spesso nei testi dei problemi non è presente una terminologia tecnica impegnativa. Andrebbe aggiunto che, a meno che le quantità non siano grandi al punto da non essere enumerabili, per la risoluzione dei problemi di calcolo combinatorio non è richiesto di possedere un bagaglio consistente in termini di prerequisiti, rispetto a come potrebbe diversamente avvenire in una richiesta del tipo: «Dimostra $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$», in cui è necessario che lo studente riconosca che si tratti del quadrato di un binomio o che comunque abbia familiarità con il calcolo polinomiale. Per rispondere a problemi di calcolo combinatorio, il più delle volte, può essere utile anche il solo conteggio concreto dei numeri. Per fare un esempio esplicativo, consideriamo il problema utilizzato da Maher, Sran, & Yankelewitz (2011) in una delle loro sperimentazioni sull'insegnamento della combinatoria:

Kenilworth Pizza has asked us to help design a form to keep track of certain pizza choices. They offer a cheese pizza with tomato sauce. A costumer can then select from the following toppings: peppers, sausage, mushrooms, and pepperoni. How many choices for pizza does a customer have? List all the possible choices. Find a way to convince each other that you have accounted for all possibilities. [80]

Osservando il testo in termini di accessibilità, si nota che non è difficile capire cosa venga richiesto dal problema, dato che quella di ordinare la pizza è una situazione concreta con cui gli studenti possono avere un'elevata familiarità; inoltre, nel testo non compaiono termini matematici. Il problema posposto dai tre ricercatori è stato risolto anche da studenti della classe quinta primaria (5° grado) e anche altre sperimentazioni sull'insegnamento del calcolo combinatorio hanno riportato risultati simili[81]. L'accessibilità, infatti, porta con sé un'importante implicazione in quanto, il fatto che un problema di calcolo combinatorio possa essere risolto anche da alunni più piccoli, può costituire un'importante opportunità per prendere in considerazione il suo insegnamento anche nella scuola primaria.

2.3.2.2. *La combinatoria promuove la discussione tra pari*

Il confronto con i pari è un aspetto fondamentale per lo sviluppo della competenza matematica già a partire dalla scuola primaria: giustificare le proprie soluzioni, infatti, rappresenta un'opportunità per imparare ad argomentare e individuare i concetti matematici che sono alla base delle attività svolte, sviluppando allo stesso tempo, il linguaggio matematico e competenze trasversali fondamentali come negoziazione, prendere decisioni, ascolto attivo, costruire il senso della realtà (sense-making).

Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni

[80] Trad. it. «Kenilworth Pizza ci ha chiesto aiuto per costruire un format per tenere traccia di alcune scelte sulla pizza. [La pizzeria] offre una pizza al formaggio con la salsa di pomodoro. Un cliente può poi scegliere tra i seguenti condimenti: peperoni, salsiccia, funghi e salame piccante. Quante scelte ha il cliente per la sua pizza? Elenca tutte le possibili scelte. Trovate un modo per convincervi a vicenda di aver contato tutte le possibilità».

[81] Per ulteriori approfondimenti, si veda English, 1991, 1993; Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Fischbein & Gazit, 1988; Fischbein, Pampu, & Manzat, 1970; Maher & Martino, 1996a; Maher & Martino, 1996b.

problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive[82].

Durante lo svolgimento delle sperimentazioni sull'insegnamento della combinatoria spesso è accaduto che gli studenti si ritrovassero spontaneamente a confrontarsi sui problemi per capire le soluzioni prodotte dagli altri e, allo stesso tempo, verificare le proprie[83]. Si pensa che questa tendenza al confronto con gli altri si manifesti in virtù del fatto che spesso i problemi di combinatoria non abbiano procedure di risoluzione univoche, perciò gli studenti potrebbero risolvere i problemi in maniera diversa, senza che necessariamente vi sia una soluzione più "corretta" delle altre. Trovandosi davanti a soluzioni che possono essere diverse dalla propria, non tanto sul piano del risultato, quanto più su quello dei processi che lo hanno prodotto, gli studenti sentono quindi il bisogno di confrontarsi con i compagni, spiegando il tipo di ragionamento che ha condotto ad una certa soluzione e ascoltando le spiegazioni degli altri, in modo da accertarne la validità. Tali momenti di confronto possono costituire occasioni importanti per poter affrontare riflessioni sui concetti matematici che sono alla base delle attività. L'insegnante, infatti, ascoltando attivamente le riflessioni degli studenti, può cogliere quegli spunti o quelle affermazioni che possono portare ad approfondire il discorso matematico sui concetti che sono alla base dei problemi risolti, cercando di guidare gli alunni verso una rappresentazione condivisa dell'argomento trattato.

2.3.2.3. La combinatoria promuove processi di giustificazione

Una questione fondamentale quando si approccia al calcolo combinatorio, soprattutto quando ancora non si conoscono le operazioni che consentono di calcolare a priori il numero totale dei casi che si ottengono a partire da *n* elementi, è proprio quella di essere "certi" di aver enumerato tutti i possibili casi e di averli conteggiati esattamente una sola volta[84]. In alcuni studi condotti da Maher et al. (Maher & Yankelwitz, 2011;

[82] Indicazioni Nazionali (2012), *ivi.*, p.49.

[83] English, L. D. (2005), *ivi.*, pp. 122-138.

[84] Maher, C. A. & Yankelewitz, D. (2011). Representations as tools for building arguments. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for

Maher, Sran & Yankelwitz, 2011) si è osservato che anche alunni molto piccoli, che frequentavano la classe terza primaria (3° grado), durante le sperimentazioni mostravano la tendenza a confrontarsi su come poter giustificare che avessero contato tutti i casi possibili. Negli studi di English (1991, 1993, 1996) sull'insegnamento della combinatoria nelle classi quinte di scuola primaria (5° grado), gli alunni producevano argomentazioni, anche se legate strettamente allo specifico caso, per fornire giustificazioni riguardo alla correttezza delle loro enumerazioni.

Giustificazione e abilità di argomentazione si muovono di pari passo, per via del fatto che in matematica ci sia bisogno di giustificare i processi che conducono a un certo risultato attraverso un tipo di ragionamento tipico della disciplina in cui si ricorre a concetti, procedure, strumenti e termini matematici che insieme, per l'appunto, costituiscono l'argomentazione matematica. Il fatto che anche alunni di scuola primaria abbiano avvertito la necessità di trovare un modo per giustificare i propri elenchi dei casi, seppur con modalità non ancora "matematiche", fa ben sperare che l'insegnamento del calcolo combinatorio possa aiutare a promuovere lo sviluppo della consapevolezza, già in fasi precoci dell'apprendimento della matematica, che la giustificazione sia parte integrante del fare matematica, considerandola un'attività matematica fondamentale, da integrare ed arricchire progressivamente con conoscenze, metodi e strumenti propri della disciplina.

2.3.2.4. La combinatoria promuove la generalizzazione

Nel precedente capitolo è stato descritto il ciclo virtuoso proposto da Swidan, Arzarello & Beltamino (2016), il quale costituisce un tentativo di formalizzare il processo di pensiero che accompagna la costruzione del senso matematico dei concetti e dei fenomeni oggetto di apprendimento. Uno degli aspetti nevralgici del ciclo, riguarda la generalizzazione, intesa come il trasferimento dei sistemi formali appresi alle realtà più generali a cui tali sistemi forniscono spiegazioni matematiche. La generalizzazione avviene nel momento in cui gli studenti riescono ad estendere per una famiglia di situazioni le relazioni e le strutture formali che hanno appreso in riferimento a contesti specifici. Riuscire a generalizzare un sistema formale per una famiglia di situazioni è l'unico modo in cui è possibile costruire un saldo apprendimento di un concetto matematico.

combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. Doi: 10.1016/j.jmathb.2020.100783.

In caso contrario, si resta ancorati ad uno solo dei due sistemi, provocando la separazione tra la matematica e la realtà, con la conseguente incomprensione dell'argomento trattato e il rischio di farsi un'idea sbagliata della matematica come un insieme di teorie e formule astratte.

Uno studio di Ellis, Lockwood, Tillema & Moore (2017) sembrerebbe indicare che in combinatoria gli studenti cercano di generalizzare l'applicazione di una determinata procedura di calcolo e di e andare oltre alla semplice ricerca della soluzione allo specifico problema: gli studenti che hanno partecipato alla sperimentazione sono riusciti, mediante stimoli adeguati da parte dell'insegnante, a individuare somiglianze tra i contesti dei problemi proposti di calcolo combinatorio. Ciò sembrerebbe indicare una tendenza da parte degli studenti a mettere in relazione una certa procedura di combinatoria con una famiglia di situazioni a cui poterla applicare, cercando di individuare quali siano gli elementi di una situazione che inducono ad utilizzare una procedura di calcolo combinatorio piuttosto che un'altra.[85]

Si tratta di uno studio abbastanza recente, che avrebbe bisogno di un supporto da parte di ulteriori ricerche per analizzare al meglio le modalità con cui tale meccanismo avvenga – e, soprattutto, come gli insegnati possano promuoverlo – e quali siano le strategie utilizzate dagli studenti per stabilire relazioni di somiglianza e differenza. In ogni caso, questa prima intuizione mostra come, anche per quanto riguarda la generalizzazione, la combinatoria potrebbe avere un effetto positivo sull'apprendimento matematico degli studenti.

2.3.2.5. *La combinatoria migliora le strategie di problem solving*

Una caratteristica peculiare dei problemi di combinatoria è proprio quella di non avere un'unica e specifica procedura di risoluzione, il che – come già osservato – porta spesso gli studenti a risolvere i problemi in maniera diversa, arrivando comunque alla medesima soluzione[86]. Una prima conseguenza è quella che riguarda la discussione tra pari: gli studenti tendono a confrontarsi a vicenda sulle strategie adottate, argomentando i tipi di ragionamento prodotti, al fine di verificarne la correttezza in termini matematici. Una seconda considerazione si riferisce al fatto

[85] Ellis, A. B., Tillema, E., Lockwood, E., & Moore, K. C. (2017). Generalization across domains: The relating-forming-extending generalization framework. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020), *ibid*.

[86] English, L. D. (2005), *ivi*., pp. 122-138.

che la combinatoria richieda un modo completamente diverso di approcciare ai problemi, perché spesso non è sufficiente conoscere una precisa formula o una determinata procedura per arrivare ad una soluzione, diversamente da quanto accade il più delle volte con i problemi proposti dai libri di testo o in contesti di insegnamento tradizionali. Ricordiamo che le Indicazioni Nazionali per il curricolo affidano un ruolo importante alla risoluzione dei problemi, i quali non dovrebbero essere risolti applicando semplicemente una specifica regola, ma dovrebbero rappresentare questioni autentiche e significative su cui ragionare in maniera costruttiva:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.

La combinatoria può aiutare ad ampliare il bagaglio di abilità connesse al problem solving, ponendo gli studenti davanti a situazioni familiari e, allo stesso tempo, sfidanti, motivandoli a mettere in gioco attivamente tutte le loro conoscenze e le competenze matematiche.

2.3.2.6. La combinatoria favorisce l'uso di molteplici modalità di rappresentazione

Il possesso di diverse modalità di rappresentazione e il saper scegliere quale sia quella più adatta alla situazione specifica è un aspetto imprescindibile del fare matematica ad ogni livello ed è una delle caratteristiche fondamentali della competenza matematica per una duplice ragione. Da un lato, la rappresentazione è utile per raccogliere i dati, come avviene, ad esempio, nel calcolo combinatorio, per eseguire un controllo sistematico dei casi. Dall'altro, la rappresentazione è uno strumento fondamentale per costruire rappresentazioni non canoniche dei numeri, cogliere i processi e le relazioni che legano le quantità. L'interpretazione della rappresentazione, infatti, ha un ruolo estremamente importante: chiedere ad un alunno «perché hai scritto $y = 2x$?», significa chiedergli di esplicitare il significato di ciascun termine dell'espressione costruita, ponendo il primo passo verso la generalizzazione.

Le situazioni offerte dalla combinatoria si prestano a un'ampia gamma di rappresentazioni, tra le quali gli studenti possono scegliere in base alla preferenza o alla dimestichezza con una certa modalità di rappresentazione, oppure rispetto a quella che sembra più adatta al problema da risolvere, ma anche per l'utilità ai fini di un'argomentazione. Nello specifico, facendo riferimento a English (2005), in combinatoria posso essere utilizzate le seguenti modalità di rappresentazione:

- Procedure logiche: classificazione, enumerazione sistematica, principio di inclusione/esclusione;
- Procedure grafiche: diagramma ad albero, grafici;
- Procedure numeriche: principi di addizione, moltiplicazione, divisione, fattoriale, triangolo di Pascal, coefficiente binomiale, equazioni;
- Procedure tabulari: tabelle e array;
- Procedure algebriche: comprende la generazione di funzioni.[87]

Di fronte a nuovi problemi di combinatoria, anche alunni di scuola primaria possono utilizzare modalità di rappresentazione come disegni, tabelle, elenchi sistematici e non sistematici e approcci simbolici vicini al linguaggio algebrico[88].

È importante che ai bambini venga data la possibilità di utilizzare diverse modalità di rappresentazione sia per acquisire dimestichezza con le procedure di rappresentazione stesse sia, alla luce dei problemi che gli alunni sembrano riscontrare con l'algebra, per comprende che quello algebrico è uno dei diversi linguaggi della matematica, e in quanto tale possiede regole e peculiarità specifiche che ne caratterizzano le possibilità di utilizzo. La combinatoria, dunque, può costituire un terreno in cui gli alunni possano sperimentare le più svariate forme di rappresentazione matematica e, contestualmente, può anche rappresentare un tentativo per approcciare all'algebra attraverso un canale diverso rispetto a quello previsto dall'insegnamento tradizionale.

2.3.2.7. La combinatoria costituisce un canale di accesso per l'algebra

Ancora oggi, nell'insegnamento della matematica c'è la tendenza ad una netta separazione degli argomenti, come se fossero compartimenti stagni che nulla hanno a che vedere l'uno con l'altro. Ciò porta gli studenti a farsi un'idea dell'algebra che non corrisponde in alcun modo alla

[87] English, L. D. (2005), *ivi.*, p. 124.

[88] Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing. In English, L. D. (2005). *Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning*. Doi: 10.1007/0-387-24530-8_6.

realtà. La matematica, proprio come ogni disciplina, porta con sé non solo concetti e contenuti, ma anche metodi, strumenti e linguaggi che le sono propri, con la peculiarità di avere un codice che, oltre ad essere costituito da numeri e strutture, contiene anche una simbolizzazione ordinata da specifiche regole. Pensare di fare matematica senza ricorrere all'algebra sarebbe un po' come pensare di poter leggere un libro senza aver compreso prima la corrispondenza grafica di un fonema. Isolare l'insegnamento dell'algebra dal resto della matematica costituisce una limitazione sia per la comprensione del ruolo che effettivamente riveste nel fare matematica, sia per l'uso che gli studenti potrebbero farne, circoscrivendolo, allo stato attuale, alla semplice risoluzione di esercizi che, inevitabilmente, finiscono per rivelarsi fini a se stessi. Per superare tale ostacolo l' "*early* algebra" è nata con l'intenzione di dimostrare come sia possibile avviare al pensiero algebrico già a partire dal primo grado d'istruzione, in modo da favorire negli alunni la sua comprensione come espressione principale del pensiero matematico[89]. A tal proposito, nello studio condotto da Maher, Sran & Yankelewitz (2011) è stato osservato che alcuni degli studenti di scuola primaria che dovevano risolvere il problema del *Kenilworth* Pizza, impostavano il procedimento di risoluzione attraverso una prima simbolizzazione degli elementi, usando "Pi", "M", "S" per indicare le tipologie di condimenti da combinare per creare i raggruppamenti e utilizzavano gli stessi simboli per giustificare le loro soluzioni. Si tratta ovviamente di un esempio per comprendere come anche l'insegnamento della combinatoria risulti in linea con la possibilità di promuovere quelle procedure prealgebriche di cui l'early algebra si fa promotrice e che, come osservato nel precedente sotto-paragrafo, costituiscono una delle procedure di rappresentazione con cui la combinatoria si esprime. Si tratta di un'occasione particolarmente utile per promuovere un uso precoce dell'algebra come parte integrante del ragionamento (e della sua esplicitazione) e della generalizzazione dei concetti matematici.

2.3.2.8. La combinatoria promuove il pensiero indipendente

I problemi di combinatoria prevedono una varietà di approcci risolutivi che stimolano gli studenti a mettere in atto processi di ragionamento

[89] Per ulteriori approfondimenti è possibile consultare il sito del Progetto "ArAl", che dal 1984 si fa promotore dell'early algebra in Italia, disponibile da http://www.progetto"ArAl".it/.

complessi e, in tal senso, possono dunque aiutare anche gli alunni di scuola primaria a ragionare matematicamente. L'insegnante svolge un ruolo cruciale nel favorire i processi di ragionamento degli studenti, sia individuali che in piccoli gruppi, fornendo gli input adeguati per promuovere il pensiero indipendente[90]. Si tratta di un invito per gli insegnanti a superare la tendenza a ridurre al minimo la difficoltà degli studenti, intervenendo con suggerimenti che spesso hanno la conseguenza di limitare lo sviluppo del pensiero autonomo. Dato che la combinatoria costituisce un'area della matematica che, per sua natura, pone gli studenti di fronte a strategie di risoluzione flessibili, gli insegnanti possono imparare a porre domande e a fornire stimoli adeguati, chiedendo, ad esempio, agli studenti di giustificare e spiegare le loro soluzioni, esplicitando il ragionamento eseguito, al fine di promuovere la generalizzazione dei concetti matematici sottostanti. In questo modo è possibile incoraggiare la flessibilità negli approcci e nelle soluzioni e favorire, contemporaneamente, l'uso libero e flessibile delle diverse forme di rappresentazione che si possono usare in combinatoria.

2.3.2.9. La combinatoria promuove il lavoro di gruppo

L'apprendimento collaborativo è uno degli aspetti fondamentali per promuovere un ambiente di apprendimento efficace. Si è già osservato come, secondo la prospettiva socio-costruttivista, l'apprendimento sia un processo che si costruisce socialmente, attraverso il confronto con i pari e l'aiuto reciproco. Le Indicazioni Nazionali sottolineano l'importanza della dimensione sociale dell'apprendimento, incoraggiando il suo utilizzo in tutte le discipline. Anche per quanto riguarda i contesti di insegnamento-apprendimento della combinatoria, la dimensione sociale assume un ruolo fondamentale: gli studenti, infatti, hanno bisogno di confrontarsi con i pari riguardo alla risoluzione dei problemi, per via del fatto che spesso non è previsto un processo di risoluzione univoco per trovare una soluzione. Inoltre, gli studi condotti sull'insegnamento della combinatoria hanno mostrato che, di fronte a un problema di calcolo combinatorio, gli studenti chiedevano spesso aiuto ad un compagno per verificare di aver elencato tutti i casi possibili, con

[90] Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194–214.

la formazione di piccoli gruppi spontanei per ragionare sulle strategie di risoluzione adottate[91].

2.3.2.10. La combinatoria favorisce l'equità scolastica

I dati allarmanti che giungono dalle rilevazioni nazionali e internazionali sull'apprendimento della matematica, stimolano una riflessione su quali possano essere le cause del fatto che solo una percentuale molto ridotta degli studenti riesce a sviluppare una buona competenza in matematica. Sono molti gli studenti che ritengono che l'apprendimento della matematica sia particolarmente difficile e che non riescono a comprendere a pieno la sua utilità nei contesti reali di vita. Fare un discorso di equità rispetto all'insegnamento della matematica significa ragionare su come sia possibile fornire a tutti gli studenti le stesse opportunità di accedere ai saperi della matematica, compresi i suoi contesti di utilizzo, indipendentemente dagli esiti che possono essere i più diversi. Si è già osservato che il metodo della variazione e il problem posing, dal punto di vista dell'equità, possono costituire un'opportunità anche per i non esperti di operare con la matematica, attraverso i processi di formulazione e variazione di problemi, i quali consentono agli studenti di mettersi in gioco con la matematica, evitando al contempo di confrontarsi con tutte le emozioni legate alla categoria del "giusto/sbagliato", che invece possono presentarsi nella fase di risoluzione del compito, intralciando l'apprendimento.

Secondo Lockwood, Wasserman & Tillema (2020) uno dei fattori che potrebbe causare bassi risultati in matematica riguarda il fatto che molti studenti non abbiano avuto la possibilità di accedere ad altre branche della matematica che potrebbero essere più in linea con il loro modo di pensare e agire matematicamente. Curricoli di matematica che, come quelli attuali, sono ancora per gran parte centrati sull'algebra e sul calcolo, potrebbero, quindi, portare gli studenti che hanno incontrato difficoltà in queste aree a credere e accettare il fatto di non poter avere buoni risultati in matematica. Attraverso l'inserimento della combinatoria nei curricoli come un'ulteriore area della matematica di cui fare esperienza, si potrebbe dare la possibilità a tutti gli studenti di poter avere un nuovo incontro con la matematica in un'area diversa, la quale potrebbe rivelarsi più familiare, ma non meno impegnativa e rigorosa – ricordando anche che un primo approccio alla combinatoria non necessita di un nume-

[91] Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020), *ivi.*, pp. 1-2.

ro considerevole di prerequisiti. Con l'insegnamento della combinatoria nella scuola primaria, si potrebbe favorire gli alunni nell'iniziare ad operare già da piccoli con un ulteriore dominio della disciplina, quello dello matematica discreta. L'idea di fondo è dunque quella di espandere le idee degli studenti su cosa sia la matematica, consentendo loro di conoscere le diverse branche che la costituiscono, in modo da favorire una rappresentazione della matematica che coincida il più possibile con la realtà più vera della disciplina. Una caratteristica peculiare dei problemi di combinatoria è proprio quella di non avere un'unica e specifica procedura di risoluzione, il che – come già osservato – porta spesso.

2.3.3. Insegnare il calcolo combinatorio nella scuola primaria

L'insegnamento della combinatoria promuove lo sviluppo di importanti abilità connesse alla competenza matematica. Nonostante questa sua peculiare qualità, si è osservato come, sia a livello nazionale che internazionale, spesso gli studenti abbiano la possibilità di incontrarla soltanto nei corsi universitari di matematica e, nei casi più fortunati, nella scuola secondaria, limitatamente a qualche lezione per risolvere un paio dei coinvolgenti "indovinelli" che essa propone. Dal momento in cui ha iniziato a rendersi conto del valore che tale argomento può apportare all'insegnamento della matematica, la ricerca ha cercato di capire quando fosse possibile iniziare a insegnare combinatoria a scuola, al fine di promuovere lo sviluppo delle abilità fondamentali della competenza matematica che questa branca della matematica contribuisce a favorire. Studi come quelli di English (1991, 1993, 1999, 2005), Maher & Martino (1996), Maher & Yankelwitz (2011), Maher, Sran & Yankelwitz (2011), Arwadi et al. (2017) e Posicelskaya (2023) hanno mostrato che l'insegnamento del calcolo combinatorio può essere molto utile per promuovere lo sviluppo iniziale sia delle conoscenze legate alla combinatoria, sia delle abilità matematiche fondamentali, incoraggiando anche processi di prealgebrizzazione. Se si è certi dell'opportunità che l'insegnamento del calcolo combinatorio possa fornire alla scuola primaria come contesto in cui cogliere concetti e sviluppare abilità matematiche, la questione ancora aperta riguarda quali possano essere gli strumenti, i metodi e le strategie migliori per rendere pienamente efficace il suo insegnamento. English (2005) sottolinea che per lavorare con gli studenti e, in special modo con gli alunni di scuola primaria, sia fondamentale creare problemi e attività significative con cui essi possano avere familiarità e allo stesso tempo sentirsi motivati nell'affrontare il compito richiesto. Inoltre, un ruolo fondamentale nell'insegnamento della combinatoria – e della matematica in generale – soprattutto in riferimento alla scuola primaria, è rivestito dal gioco, da intendersi come contesto coinvolgente e motivante in cui gli alunni possano manipolare e agire attivamente con il materiale proposto. L'approccio ludico all'insegnamento della matematica consente di sviluppare gradualmente la mentalità del "pensare matematicamente" in modo che possa diventare un processo naturale. Esso, infatti, ha un grande ruolo nel promuovere una comprensione profonda dei concetti matematici, in quanto favorisce lo sviluppo di connessioni tra i concetti astratti e gli scenari di vita reale. In questo modo la matematica può diventare un luogo in cui esplorare idee e attivare processi che mettano in evidenza le relazioni e le strutture dei processi coinvolti nelle attività. L'approccio ludico diventa ancor più necessario quando ci si trova di fronte a problemi per i quali non esiste un unico percorso o strategia risolutiva: in questi casi, in cui è il processo ad assumere un ruolo di rilievo, pensare diventa ancora più difficile, c'è bisogno di revisioni continue e, a volte, anche di ricominciare da capo.

Si tratta di un discorso che nel suo essere estremamente intuibile, implica tuttavia un grande impegno sul piano pratico, in quanto una didattica della matematica che preveda un approccio ludico così inteso, stimola gli insegnanti a dover riflettere prima di insegnare e, soprattutto, ad osservare accuratamente i propri studenti, facendo estrema attenzione alle loro caratteristiche e ai loro bisogni, al fine di promuovere un apprendimento efficace attraverso le attività appositamente progettate. Il mondo del web può sicuramente fornire risorse per l'insegnamento ed è utile per stimolare la creatività degli insegnanti, ma si invita a consultarlo con cautela, soprattutto per quel che riguarda il calcolo combinatorio: è molto semplice imbattersi in esercizi di matematica che assumano la forma di giochi, quiz o attività divertenti che sembrerebbero promuovere un approccio ludico alla combinatoria. L'attenzione andrebbe rivolta però a tutte quelle attività manipolative, cognitivamente impegnative e allo stesso tempo coinvolgenti che possano effettivamente attivare processi di apprendimento significativo. Ad esempio, il progetto "Lullo"[92]

[92] Il progetto prende il nome da Ramon Llull, scrittore, teologo e logico spagnolo, che nella sua opera *Ars Magna* espone un metodo di ragionamento e di classificazione del sapere, rappresentando i concetti con simboli geometrici o algebrici, combinati in tutti i modi possibili. Per la spiegazione completa degli autori è possibile consultare il link https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo.

promosso da *OILER*[93], associazione che si occupa di promozione e diffusione della cultura logica e matematica, raccoglie attività didattiche rivolte alla scuola primaria per introdurre la combinatoria, in modo da «favorire lo sviluppo della capacità di contare combinazioni di oggetti in svariati contesti, favorendo l'abitudine a passare da un contesto all'altro». Si tratta di proposte di attività progettate per favorire un approccio ludico in modo da promuovere la piena e attiva partecipazione degli alunni, tenendo conto delle teorie fondamentali sull'apprendimento dei bambini dai 6 agli 11 anni, in special modo quella dell'*Embodied Cognition*, che considera l'esperienza corporea come elemento significativo nei processi di apprendimento.

Attualmente sul piano internazionale, la ricerca si sta iniziando a muovere verso un insegnamento della combinatoria più sistematica nella scuola primaria, cercando di identificare quali siano le modalità, gli strumenti e gli approcci più efficaci perché gli alunni possano approcciare ai concetti del calcolo combinatorio e allo stesso tempo allenare le abilità matematiche. Il presente studio si propone di andare ad osservare come alunni di classe terza primaria siano entrati in contatto con l'arte del contare attraverso un approccio ludico, che preveda esperienze autentiche e significative, e mediante una metodologia, come quella del MRV, che pone la partecipazione attiva e la costruzione dei significati da parte degli studenti a fondamento di un efficace apprendimento della matematica. L'insegnamento della combinatoria e il Metodo della Ricerca Variata possiedono una serie di caratteristiche strumentali, metodologiche e strategiche che fanno ben sperare che una loro integrazione possa costituire un terreno fertile per promuovere l'insegnamento del calcolo combinatorio anche nella scuola primari

[93] Per ulteriori approfondimenti e per tenersi aggiornati sulle proposte didattiche che l'associazione elabora con regolarità su diversi argomenti , è possibile consultare il seguente link: https://it.oiler.education/.

Parte seconda

LA SPERIMENTAZIONE

Capitolo terzo
Il metodo della ricerca

Adattamento da Zerocalcare per *Comics&Science*, 2019

In base a quanto mostrato finora, si può comprendere perché paesi come Germania, Israele, Brasile e Spagna abbiano messo in primo piano l'insegnamento della combinatoria all'interno dei curricoli di matematica e perché anche in altri paesi stia crescendo l'interesse nel darle un peso maggiore nella progettazione dei percorsi di insegnamento di matematica. Una prima riflessione riguarda la ricerca nel campo dell'insegnamento della combinatoria, la quale attualmente è impegnata nel cercare di capire quali siano e come agiscano i fattori che, durante i momenti di insegnamento-apprendimento della combinatoria, inneschino i processi che favoriscono lo sviluppo delle abilità fondamentali della competenza matematica, tra cui risolvere problemi, argomentare, rappresentare e generalizzare.[94] Si tratta di comprendere se tale prerogativa sia esclusiva dell'insegnamento della combinatoria, la quale per motivi insiti nella sua natura faciliti l'attivazione di specifici processi davanti ai problemi che propone; oppure, ragionando in termini di pari opportunità per gli studenti di accedere a contenuti, strumenti e metodi della matematica, se tale approccio, osservato con la lente del ricercatore, possa essere esteso anche all'apprendimento di altri argomenti di matemati-

[94] Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020), *ivi.*, pp. 2-3.

ca.[95] Riuscire a capire, dunque, come funzionano i processi che si manifestano durante i momenti di insegnamento-apprendimento della combinatoria, permetterebbe di capire se si tratti di una qualità propria della combinatoria e di riflettere su come l'approccio al suo insegnamento possa essere esteso ad altri argomenti di matematica.

Un'ulteriore considerazione andrebbe condotta rispetto all'accessibilità della combinatoria come oggetto di insegnamento nei contesti scolastici. Una caratteristica essenziale della combinatoria è proprio quella di essere accessibile sia per quanto riguarda la concretezza delle situazioni su cui ragionare, sia rispetto ai prerequisiti richiesti per un primo approccio al calcolo combinatorio. Come già affermato, tale accessibilità potrebbe indurre a pensare che le situazioni proposte nei problemi di combinatoria siano di semplice e immediata risoluzione, al pari di quiz o semplici indovinelli. Al contrario, la ricerca ha mostrato che di fronte ai problemi di calcolo combinatorio si presenti un ostacolo impegnativo da rimuovere, che riguarda la difficoltà degli studenti nel riconoscere il tipo di procedura da applicare ad un certo contesto, non riuscendo ad individuare somiglianze e differenze rispetto a problemi già risolti anche con successo[96]. Leggendo la questione nei termini del ciclo virtuoso, è come se gli studenti, nonostante abbiano già risolto problemi simili, non riescano tuttavia a ricondurre le procedure e le operazioni apprese ad una famiglia di situazioni e, quindi, non avendo generalizzato, non riescano ad andare oltre al contesto specifico della situazione problematica presentata. Le sperimentazioni condotte in merito[97] sembrerebbero mostrare che, per cercare di ovviare a tale difficoltà e per individuare le procedure più adatte al problema presentato, gli studenti, anche di scuola primaria[98], tendano a variare spontaneamente il testo del problema al fine di individuare somiglianze e differenze con altri contesti già osservati e analizzare la struttura del problema in modo più approfondito. La variazione, infatti, aiuta a generalizzare le relazioni tra quantità, con l'obiettivo di imparare ad applicarle al di fuori dello specifico contesto: permette di imparare ad estendere l'uso di una certa operazione o di una certa procedura a tanti e diversi contesti, consentendo

[95] *Ibid.*

[96] English, L. D. (2005), *ivi.*, p. 130.

[97] Sriraman, B., & English, L.D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. *The Mathematics Teacher*, *98*(3), 182-191.

[98] Arwadi, F., Bustang, B., Putri, R. I. I., & Somakim, S. (2017). *Small-Scale Design-based Research on Elementary School Children's Skills and Understanding of Combinatorics: A Case of Indonesia*. Makassar: Global RCI.

di completare il ciclo virtuoso e superando il gap principale che si manifesta anche nell'insegnamento della combinatoria, cioè quello di non riuscire ad associare una classe di sistemi formali ad una famiglia di situazioni, il quale costituisce il processo alla base della generalizzazione. Perché si possa andare oltre ad un approccio superficiale al calcolo combinatorio e poter utilizzare al meglio le opportunità che offre per lo sviluppo delle abilità matematiche, è necessario che gli studenti imparino a identificare le strutture delle situazioni problematiche, individuando le relazioni tra le quantità presenti nel problema, cercando di non focalizzarsi esclusivamente sulle quantità specifiche. Per risolvere tale ostacolo, autori come English[99], sottolineano l'importanza dell'uso della variazione, anche alla luce di in un insegnamento della combinatoria che coinvolga la scuola primaria, suggerendo di presentare problemi che varino elementi del contesto presentato, ma che lascino pressoché uguali le strutture matematiche sottostanti, in linea con quanto previsto dalla teoria della variazione. La variazione, infatti, consente di aggiungere sempre qualcosa di nuovo e di diverso, ma comunque relativo all'argomento trattato. È esattamente nel meccanismo di ragionamento dell'imparare a chiedersi «cos'è che varia?», «cos'è che resta uguale?» che può situarsi la comprensione anche delle procedure di calcolo combinatorio.

L'idea di collegare l'insegnamento del calcolo combinatorio alla Metodologia della Ricerca Variata si inserisce in pieno all'interno di questo discorso. La variazione e i meccanismi per metterla in atto, come il problem posing, sono i punti fondamentali di un metodo che si pone come obiettivo quello di consentire agli studenti di individuare le relazioni che si instaurano tra le quantità, andando ad utilizzare gli strumenti di rappresentazione non solo come strumenti di visualizzazione di come i dati si presentino disposti, ma soprattutto come strumenti che consentono di rintracciare le strutture dei problemi. Inoltre, i fondamenti teorici e metodologici dell'approccio MRV e dei processi che la ricerca sul campo ha mostrato finora emergere durante l'insegnamento della combinatoria presentano evidenti convergenze su aspetti come argomentazione, giustificazione, rappresentazione, formulazione di ipotesi, discussione tra pari per costruire rappresentazioni condivise dei concetti, promozione del lavoro di gruppo, generalizzazione per famiglie di situazioni, presentazione di compiti significativi per stimolare l'attenzione e il coinvolgimento degli studenti, algebrizzazione come strumento per evidenziare i processi di ragionamento, così come la logica di equità sottostante, in-

[99] English, L. D. (2005), *ivi.*, pp. 130-131.

tesa come ricerca di mezzi efficaci per garantire pari opportunità per tutti gli studenti di accedere ai saperi matematici. I risultati prodotti dal presente studio possono fornire una conoscenza utile al fine di migliorare le pratiche didattiche, attraverso la condivisione di strumenti, metodi e strategie che promuovano un insegnamento della disciplina equo e di qualità, in modo da potenziare le competenze professionali dei docenti di matematica.

3.1. Indirizzo della ricerca

Gli obiettivi relativi all'apprendimento dei primi concetti di calcolo combinatorio di questo studio sono strettamente connessi alla possibilità di testare un'ulteriore possibile applicazione della Metodologia della Ricerca Variata, in quanto promotrice della costruzione attiva da parte degli alunni di conoscenze matematiche significative. La presente ricerca design-based è stata progettata seguendo due linee ipotetiche d'indirizzo principali:

- realizzare un possibile percorso di costruzione di un'autentica conoscenza dei primi concetti di calcolo combinatorio da parte di alunni di classe terza primaria mediante i fondamenti dell'approccio MRV;
- rintracciare all'interno del percorso gli elementi che rendano possano dar conto della validità e dell'efficacia di un approccio al calcolo combinatorio mediante MRV;
- attivare una riflessione specifica sul tipo di metodologia utilizzata, rispetto ai vantaggi e ai limiti di una sua applicazione nel contesto della scuola primaria, e ai presupposti didattici necessari per potenziarne gli effetti sull'apprendimento degli studenti. In questo modo si potrò ragionare sui vantaggi e i limiti, proponendo eventuali adattamenti del quadro teorico MRV per un'applicazione nella scuola primaria.

Elaborare un percorso che contemporaneamente tenesse conto di questi aspetti ha rappresentato una sfida significativa e allo stesso tempo stimolante e proficua, che ha portato all'elaborazione di un percorso aperto e flessibile, che potesse essere rapidamente e costantemente adattato e implementato in funzione della riflessione condotta a partire dalle riposte degli alunni alle attività e alle modalità operative proposte. Mediante la riflessione condotta prima e dopo ogni incontro, è stato possibile individuare in via ipotetica e, in un secondo momento, verificare l'efficacia delle attività e delle strategie promosse dall'approccio MRV impiegate al fine di realizzare una costruzione attiva e autonoma da parte degli alunni delle prime conoscenze di calcolo combinatorio e, al tempo stesso, ha consentito di far luce sul processo di costruzione della conoscenza relativa all'argomento trattato.

Durante lo svolgimento del percorso di sperimentazione, i ricercatori hanno deciso di sfruttare l'opportunità offerta dall'inserimento all'interno del progetto di un'ulteriore classe terza di una scuola primaria paritaria di una località adiacente alla capitale, la quale, differentemente dalla classe terza che stava già svolgendo il percorso, presentava modalità didattiche quotidiane di insegnamento della matematica miste e di stampo più "tradizionale". Le differenze presentate dalle due classi hanno fatto sì che, attraverso l'individuazione di somiglianze e differenze, si potesse ragionare in maniera più approfondita sulle possibilità, i limiti e i presupposti di un approccio all'insegnamento del calcolo combinatorio nella scuola primaria attraverso la metodologia della ricerca variata.

3.2. Il metodo della ricerca

3.2.1. La ricerca design-based

Il percorso e le attività proposte sono stati progettati al fine di promuovere, in base ai fondamenti della Metodologia della Ricerca Variata, la costruzione attiva da parte di alunni di classe terza dei primi concetti di calcolo combinatorio. Si tratta di un primo ciclo della ricerca sperimentato in due classi terze di due diverse scuole primarie.

Il presente studio rientra nel modello di ricerca design-based, ampiamente utilizzato nell'ambito della ricerca educativa, in quanto permette di tracciare lo sviluppo di apprendimenti in contesti complessi, come scuole e classi, verificando allo stesso tempo teorie, modelli e metodi di apprendimento e di insegnamento e favorendo la produzione di strumenti istruttivi che riescono a superare le sfide della pratica quotidiana»[100]. Secondo quanto riportato da Michele Pellerey (2006):

[100] Pellerey, M. (2006). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-Based Research). *Orientamenti pedagogici*, *52*(5), 721-737.

La ricerca design-based ha la qualità di favorire lo sviluppo di strumenti, metodi, strategie per l'apprendimento e l'insegnamento che possano essere declinati in funzione del contesto, riuscendo a inglobare e a mettere in evidenza i processi di apprendimento che nascono da specifiche situazioni, in riferimento a particolari contenuti e obiettivi formativi. Al centro c'è la pratica educativa considerata nella sua globalità, sia come contesto che implica una progettazione accurata degli interventi, sia come tribunale di verifica della qualità effettiva degli interventi progettati una volta che essi siano stati messi in atto[101].

Si tratta di un metodo in cui la ricerca perturba il contesto educativo per introdurre progetti influenzati da quadri teorici che, nel caso specifico, riguarda l'uso dell'approccio MRV all'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio, nell'ottica di sviluppare nuovi materiali, strumenti, strategie e metodi per promuovere una didattica equa e di qualità. Il progetto, quindi, oltre ad avere una ricaduta pratica nell'osservazione di come l'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio possa prendere forma all'interno di una classe terza di scuola primaria, consente di osservare sul campo un'applicazione dell'approccio MRV all'interno di una classe terza primaria e di riflettere su di essa in funzione di come i suoi aspetti agiscano e possano essere applicati nel contesto considerato, riflettendo sui vantaggi e i limiti e proponendo eventuali adattamenti del quadro teorico MRV per un'applicazione alla scuola primaria.

Il modello di ricerca design-based, inoltre, è intriso di una costante opera di riflessione, sia nel momento iniziale, per valutare e valorizzare gli studi e le esperienze già esistenti in letteratura e delineare le ipotesi di ricerca, sia nel momento attuativo, perché occorre seguire da vicino l'andamento della realizzazione del progetto e prevederne una revisione flessibile.

3.2.2. *Metodologia*

In questo elaborato viene riportata la documentazione del primo ciclo della ricerca design-based che riguarda l'approccio al calcolo combinatorio in due classi terze di scuola primaria attraverso la Metodologia della Ricerca Variata.

[101] *Ibid*.

Il progetto di ricerca e i singoli incontri sono stato progettati seguendo tre fasi principali, le quali hanno promosso l'approccio ricorsivo che ha caratterizzato l'intero percorso:

- preparazione della sperimentazione;
- sperimentazione in classe;
- analisi retrospettiva.

Sul piano metodologico si possono individuare un livello macro e un livello micro, di seguito descritti.

3.2.2.1. Livello macro: lo studio di caso

Per quanto riguarda il primo, il focus è sullo studio di un caso su un tempo lungo di circa 6 mesi, la cui progettazione e sviluppo consentono di improntare una riflessione sia sull'insegnamento del calcolo combinatorio nella scuola primaria già a partire da una classe terza, sia sull'uso della Metodologia della Ricerca Variata a tale livello d'istruzione, traendone spunti e riflessioni per una revisione e implementazione del percorso. Per quanto riguarda il livello micro, ogni lezione o piccoli gruppi di lezioni (2/3) sono state progettate mediante un approccio riflessivo in modo da poter esplicitare un certo aspetto del calcolo combinatorio e promuovere i processi di apprendimento coinvolti, quali variare, analizzare le variazioni al fine di individuare analogie e differenze, per arrivare a generalizzare.

Una prima fase preparatoria, antecedente l'inizio del progetto vero e proprio, ha portato alla strutturazione del livello macro del percorso che, in base all'ipotesi di ricerca, potesse promuovere l'apprendimento dei primi concetti di calcolo combinatorio in base alle attività e strategie promosse dall'approccio MRV.

Al livello macro, è stato poi intrecciato un secondo livello di progettazione, relativo ai singoli incontri, i quali sono stati progressivamente pianificati, attraverso continui cicli di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione, in base alle risposte degli alunni e alle riflessioni a posteriori condotte a partire da quanto emerso negli incontri svolti.

3.2.2.2. Livello micro: progettazione dei singoli incontri

Il percorso è stato declinato in 9 incontri durante un periodo di circa sei mesi, secondo un approccio riflessivo, ricorsivo e flessibile che ha permeato l'intero progetto. Durante la fase attuativa i ricercatori hanno costantemente monitorato l'andamento della realizzazione del progetto, dedicando momenti specifici di riflessione al termine di ogni incontro per verificare gli esiti, trarre indicazioni per il proseguimento del progetto e formulare le ipotesi per l'incontro successivo. Si tratta, dunque, di un duplice approccio riflessivo, a priori e a posteriori, per riflettere ed elaborare il progetto in itinere. Nello specifico:

- prima di ogni incontro la riflessione ha avuto lo scopo di:
  - progettare le attività da proporre nell'incontro successivo in modo che fossero significative e che promuovessero la partecipazione attiva degli alunni;
  - formulare le ipotesi relative ai comportamenti e alle risposte degli alunni che potessero essere elicitati dalle attività proposte;
  - progettare le discussioni che sarebbero state condotte nella fase specifica dedicata dell'incontro successivo;
  - progettare la scansione dell'incontro e delle singole fasi di cui si sarebbe composto, al fine di creare uno spazio di apprendimento nel quale gli alunni potessero e volessero effettivamente apprendere.
- dopo ogni incontro, la riflessione ha avuto lo scopo di:
  - verificare le ipotesi di ricerca relative all'incontro;
  - riflettere sul significato che le risposte e i comportamenti messi in atto dagli alunni avessero all'interno del percorso generale;
  - progettare l'incontro successivo alla luce delle osservazioni condotte.

3.2.2.3. Aspetti chiave della metodologia didattica

Le attività proposte e la scansione degli incontri sono stati progettati per favorire la variazione, la discussione tra pari, l'argomentazione e la generalizzazione, aspetti chiave dell'approccio MRV (par. 1.2.4, pp. 27-38), tenendo conto di specifici aspetti metodologici che vengono di seguito decritti:

Variazione

Le attività sulla variazione, hanno tenuto conto della familiarità o meno degli alunni con il problem posing e, nello specifico, con la strategia dell' "E se…?". Per stimolare la variazione, sono state realizzate attività che

favorissero la variazione del contesto del problema attraverso strategie di problem posing, facendo in modo che il concetto matematico sottostante restasse invariato. Tali attività hanno riguardato la variazione della domanda o del testo di un problema, oppure la generazione di una domanda a partire da una situazione data. Nel percorso principale, sono stati proposti alcuni problemi che aggiungessero variabilità, anche in termini di complessità, alle situazioni già osservate dagli alunni (problema *Creiamo un'associazione* e problema *Realizziamo uno spettacolo teatrale* per favorire l'estensione del concetto di n fattoriale dalle permutazioni semplici alle disposizioni semplici).
Nella classe che è ha preso parte al percorso in un momento successivo, considerando l'assenza di familiarità con il problem posing, sono state utilizzate espressioni che potessero favorire negli alunni un approccio alla variazione come, ad esempio, «Vi viene in mente una situazione simile a quella appena osservata?», «Sapreste scrivere un problema simile, ma non identico a quello appena osservato?", ecc.

Discussione collettiva
Ogni discussione è stata preventivamente progettata prima di ogni incontro ed ognuna è stata condotta sotto l'osservazione dell'insegnante e dei ricercatori, i quali, appositamente formati per l'occasione, agissero con opportune tecniche di scaffolding lì dove gli alunni mostravano interventi che facessero intuire una conoscenza emergente, o per favorire il confronto tra pari. Durante lo svolgimento del percorso, sono state realizzate, in base a quanto sviluppato dall'approccio MRV, discussioni che avessero scopi differenti:
- elaborare un prodotto comune all'interno dei gruppi di lavoro;
- riflettere con la classe sulle giustificazioni prodotte all'interno dei gruppi di lavoro;
- osservare collettivamente somiglianze e differenze tra rappresentazioni e riflettere sul significato matematico che esse veicolano;
- formulare collettivamente una domanda o il testo di un problema (problem posing di gruppo);
- sviluppare collettivamente una formula o un'operazione;
- allenarsi ad argomentazione.

Argomentazione riflessiva
Nel presente studio le diverse rappresentazioni, prodotte nei gruppi di lavoro o individualmente, sono state utilizzate per favorire la capacità da parte degli alunni di argomentare le loro scelte, le loro rappresenta-

zioni e le soluzioni fornite ai problemi proposti, in modo da favorire un'esplicitazione dei concetti che partisse dagli alunni stessi attraverso la modalità dell'argomentazione matematica, la quale prevede l'uso di conoscenze e strumenti matematici.
L'argomentazione è stata favorita attraverso alcune strategie, come:

- giustificare sempre l'uso di una certa operazione usata per risolvere un problema;
- spiegare in forma orale o scritta il ragionamento eseguito per arrivare a una certa soluzione;
- spiegare in forma orale o scritta la scelta di un certo tipo di rappresentazione;
- fare ricorso, nelle spiegazioni orali o scritte, agli strumenti di rappresentazione (elenchi, grafici, tabelle, formule, ecc.) e/o ad esempi concreti elaborati sul momento o riguardanti attività realizzate in classe durante lo svolgimento del progetto.

Generalizzazione

La fase di generalizzazione è indispensabile per completare il ciclo virtuoso, cioè, per riunire in un'unica famiglia le situazioni presentate singolarmente attraverso ciascuna attività proposta, per la quale sia applicabile la classe formale appresa. In generale, si è cercato sempre di:

- raggruppare le risposte fornite dagli alunni in base a criteri di somiglianza e differenza;
- enfatizzare le risposte degli alunni che durante le discussioni tra pari facessero riferimento esplicito, in termini di somiglianza/differenza, ad attività precedentemente svolte;
- favorire il confronto tra le situazioni prodotte mediante le variazioni.

Le abilità acquisite attraverso il progetto "ArAl" (Cusi, Malara & Navarra, 2011[102]) a cui la classe ha partecipato nell'anno scolastico precedente e che sono emerse durante lo svolgimento del progetto, sono state sfruttate per orientare il percorso della classe principale verso una generalizzazione in chiave pre-algebrica. Ciò significa che la generalizzazione

[102] Cusi, A., Malara, N.A., & Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510). Springer.

è avvenuta tenendo conto delle espressioni numeriche prodotte dagli alunni per rappresentare e giustificare i ragionamenti elaborati durante lo svolgimento delle situazioni problematiche proposte.

Per favorire tali processi di generalizzazione, si è cercato di:

- chiedere sempre il significato dei termini presenti nelle espressioni costruite;
- chiedere di collegare in termini di somiglianza/differenza tali espressioni con le altre prodotte fino a quel momento;
- proporre una discussione finale in cui promuovere un confronto esplicito tra le espressioni prodotte, al fine di esplicitare i concetti matematici emergenti;
- proporre un'attività scritta finale in cui fossero presenti tutte le espressioni elaborate dagli alunni, con l'obiettivo di ricondurre ciascuna espressione all'attività all'interno della quale è stata prodotta, al fine di promuovere la generalizzazione a conclusione del progetto.

3.3. Dettagli della sperimentazione

3.3.1. Il contesto della ricerca

Al percorso principale della ricerca hanno preso parte i 19 alunni della classe terza di una scuola primaria della periferia di Roma, di cui 8 femmine e 11 maschi. Nella classe erano presenti 2 alunni con bisogni educativi speciali, per i quali era prevista la presenza dell'insegnante di sostegno e di un operatore educativo per l'autonomia e la comunicazione.

Nel progettare il percorso si è tenuto conto del fatto che gli alunni, durante l'anno scolastico precedente, avessero preso parte a un percorso di sperimentazione relativo al Progetto "ArAl", collocato all'interno della cornice teorica dell' "early algebra", area di ricerca sull'educazione matematica finalizzata all'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica, promuovendo lo sviluppo del pensiero pre-algebrico, inteso come «un atteggiamento mentale che, esaltando la consapevolezza sui processi e sulla loro oggettivizzazione attraverso la riflessione su analogie e differenze, favorisca l'approccio alla generalizzazione». Gli alunni, inoltre, erano già abituati ad utilizzare il problem posing, attraverso la tecnica dell' "E se?" (What If?), per generare variazioni nei contesti didattici quotidiani. Il contesto classe seguiva, quindi, un percorso di insegnamento della matematica che, dal punto di vista didattico, risultasse in linea con le richieste didattiche nazionali e con quanto promosso dalla metodologia della ricerca variata.

La classe terza primaria che è stata inserita in una fase successiva del progetto di ricerca, proveniva da una scuola paritaria di una località adiacente alla capitale ed era formata da 27 alunni, di cui 15 femmine e 12 maschi, di cui nessuno riportava espliciti bisogni educativi speciali. Differentemente dalla classe terza che già stava svolgendo il percorso, gli alunni non avevano seguito specifici percorsi di pre-algebrizzazione e non avevano familiarità con la tecnica del problem posing e, in generale, con la teoria della variazione e con l'apprendimento basato sulla ricerca.

3.3.2. Strumenti

Per la realizzazione del percorso sono stati utilizzati:
- materiali proposti dal progetto "Lullo", disponibili dal sito di OILER[103], per l'introduzione del calcolo combinatorio nella scuola primaria);
- strumenti, anche carta e matita, utili per un approccio laboratoriale, che consentissero di realizzare variazioni dei problemi e sviluppare rappresentazioni all'interno dei lavori di gruppo;
- LIM per proiettare le elaborazioni dagli alunni da cui partire per avviare la discussione collettiva;
- gioco matematico online, tratto da OILER, proposto all'inizio di ogni lezione per attivare implicitamente l'atteggiamento matematico necessario allo svolgimento dell'incontro;
- lavagna e supporti per consentire agli alunni, durante i momenti dedicati all'argomentazione, di ancorarsi a rappresentazioni ed esempi grafici, e per improntare la generalizzazione attraverso la scrittura delle operazioni e delle formule pre-algebriche elaborate, in modo da essere visualizzate da tutti gli alunni;
- tabelle, elenchi, qualsiasi tipo di materiale prodotto dagli alunni, per costruire il percorso e progettare le discussioni tra pari;
- worksheet finale in cui fossero presenti tutte le formule elaborate dagli alunni, con l'obiettivo di ricondurre ciascuna formula all'attività all'interno della quale è stata prodotta e di visualizzare e confrontare contemporaneamente le somiglianze e le differenze

[103] Disponibile dal link https://it.oiler.education/.

tra le diverse attività e operazioni, riflettendo in termini di generalizzazione.

3.3.3. *Tempi*

Nella classe terza della periferia di Roma il percorso si è svolto durante l'anno scolastico 2022-2023, per la durata di 6 mesi circa, declinati in 9 incontri (1 o 2 al mese circa), ciascuno della durata di circa 2 ore. Sono state proposte anche attività da svolgere in assenza dei ricercatori, utili ai fini della sperimentazione. Nella classe terza in cui è stato svolto il percorso parallelo alla sperimentazione principale, sono stati realizzati 4 incontri della durata di circa 2 ore, durante il periodo di circa un mese (1 a settimana).

3.4. Qualità, validità e attendibilità della ricerca

Il tema della qualità, della validità e dell'attendibilità fa riferimento ad aspetti che riguardano sia la coerenza interna della ricerca (approcci, metodologie, strategie, procedure, tecniche, ecc.) sia la sua coerenza esterna (significato e valore della ricerca e dei risultati per i soggetti coinvolti, impatto sul miglioramento delle pratiche educative sulle quali si fa ricerca, ecc.). Questi due aspetti essenziali hanno guidato lo sviluppo preliminare della ricerca attraverso l'attento esame teorico e metodologico disponibile nella prima parte dell'elaborato, così come l'operazionalizzazione dei costrutti di validità e attendibilità in riferimento al tipo di ricerca design-based. Da un punto di vista epistemologico e metodologico, i costrutti di validità e attendibilità inerenti alla ricerca design-based in educazione si fondano sulle posizioni teoriche e metodologiche adottate dalla principale letteratura e dagli studi sull'argomento che hanno prodotto documenti e indicazioni nella direzione del presente studio.[104] Fondamentale nel campo della ricerca qualitativa è il controllo intersoggettivo per tendere a una pratica di oggettività che non sia insita nell'oggetto[105], soprattutto quando l'oggetto è costituito da ambienti complessi, come possono esserlo una scuola o una classe, ma che risieda nel metodo utilizzato per progettare e condurre la

[104] Pellerey, M. (2006), *ivi*. Pp. 733-734.

[105] Patera, S. (2022). Qualità e validità della ricerca qualitativa in educazione. Alcune riflessioni da un caso di studio. *Formazione e insegnamento*, *20*(1). Doi: 10.7346/-fei-XX-01-22_28.

ricerca. In tal senso, l'oggettività non può essere considerata come un prodotto che derivi da un atteggiamento neutro dei ricercatori, poiché, soprattutto negli studi in campo educativo, bisogna tener conto del carattere sociale dei processi di ricerca. Tale oggettività è, quindi, da considerarsi in riferimento all'esplicitazione del posizionamento epistemologico e metodologico del ricercatore, dei criteri, delle modalità e delle procedure utilizzate nel costruire la base dei dati e nella qualità della progettazione del percorso che ha condotto ai risultati[106].

Trattandosi di una ricerca design-based, secondo quanto riportato da Pellerey (2006), validità interna, validità esterna, attendibilità interna e attendibilità esterna devono essere analizzate e operazionalizzate in termini qualitativi. La validità interna si riferisce alla qualità dei dati raccolti e alla riflessione condotta per trarre le opportune conclusioni a partire da essi. Nel presente studio è stata ottenuta raccogliendo diversi tipi di dati, come registrazioni audio e loro trascrizioni integrali, testimonianze fotografiche degli incontri, raccolta degli elaborati degli alunni, degli appunti delle riflessioni condotte a priori e a posteriori, delle progettazioni delle discussioni e delle scalette realizzate per realizzare le giornate di sperimentazione in classe. La validità esterna riguarda la generalizzabilità dei risultati dal contesto in cui sono emersi ad altri contesti, la quale può essere ottenuta presentando i risultati del presente studio in maniera chiara e completa. L'inserimento di un'ulteriore classe terza all'interno della ricerca ha permesso riflettere anche in termini di generalizzabilità dei risultati, consentendo di osservare in maniera più approfondita il percorso di costruzione autonoma dei primi concetti di calcolo combinatorio. L'attendibilità interna fa riferimento alla ragionevolezza delle deduzioni, delle inferenze e delle decisioni prese a partire da esse. A tal proposito, il duplice approccio riflessivo, condotto a priori e a posteriori da parte di tutti i ricercatori che hanno collaborato alla ricerca, ha permesso di minimizzare la prevalenza di un solo punto di vista e di realizzare un'attenta raccolta dei dati, ottenuta, ad esempio, attraverso le trascrizioni delle registrazioni audio e testimoniando i diversi momenti degli incontri mediante la raccolta di foto e video. L'attendibilità esterna, la quale riguarda la replicabilità dello studio, è stata ottenuta tracciando minuziosamente il percorso realizzato, riportando in successione le varie fasi della ricerca. La replicabilità è stata praticata già all'interno della ricerca, nel momento in cui il percorso è stato replicato e declinato in un'ulteriore classe terza primaria, con un

[106] *Ibid*.

contesto macro e micro differente rispetto alla classe che ha preso parte allo studio principale. In questo modo è stato possibile riflettere sulle esigenze didattiche che le peculiarità del singolo gruppo classe richiedono ai fini dello svolgimento di un percorso di costruzione attiva delle prime conoscenze di calcolo combinatorio mediante l'approccio MRV.

Capitolo quarto
Risultati e Analisi

Adattamento da *La filosofia di Peanuts*, 2013

Il presente capitolo è dedicato alla descrizione degli incontri che hanno dato forma alla sperimentazione. Il percorso di apprendimento è stato strutturato, a livello macro, in base ai tre momenti fondamentali previsti dalla Metodologia della Ricerca Variata: variazione, analisi e generalizzazione, i quali hanno avuto un grande peso nella progettazione di ogni incontro, prevedendo anche dei momenti in cui un processo potesse essere preponderante, al fine di elicitare una certa risposta o un determinato comportamento didattico da parte degli alunni: durante la parte iniziale del percorso si è cercato di proporre un'ampia varietà di attività volte a favorire la variazione, in modo che gli alunni facessero esperienza di molti contesti, generati in gran parte dalle loro stesse variazioni tramite la strategia di problem posing dell' "E se?" (What If?). In ogni incontro è stata progettata una parte dedicata all'analisi degli elaborati prodotti, il più delle volte collettivamente, come rappresentazioni o risposte elaborate ai problemi proposti, al fine di promuovere durante i momenti di discussione collettiva l'esplicitazione dei concetti emergenti di calcolo combinatorio. Man mano che gli alunni hanno iniziato a comprendere le strutture e le relazioni sottostanti alle attività proposte e alle variazioni eseguite, le analisi sono divenute sempre più complesse sia in termini qualitativi che quantitativi, richiedendo di dedicarvi una porzione maggiore dell'incontro durante alcune significative lezioni. La generalizzazione, promossa già a partire dal primo incontro, ha consentito progressivamente di ampliare la famiglia di situazioni alle quali associare le relazioni e le strutture individuate lungo il percorso. Il livello macro del percorso di apprendimento, è stato intrecciato a un ulteriore **livello micro**, relativo ai singoli incontri, i quali sono stati progressivamente pianificati, attraverso continui cicli di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione, in base alle risposte degli alunni e alle riflessioni a posteriori condotte a partire da quanto emerso negli incontri svolti. Il percorso è stato declinato in 9 incontri durante un periodo di circa sei mesi, secondo un approccio riflessivo, ricorsivo e flessibile che ha permeato l'intero progetto. Durante la fase attuativa i ricercatori hanno costantemente monitorato l'andamento della realizzazione del progetto, dedicando momenti specifici di riflessione al termine di ogni incontro per verificare gli esiti, trarre indicazioni per il proseguimento del progetto e formulare le ipotesi per l'incontro successivo. Si tratta, dunque, di un duplice approccio riflessivo, a priori e a posteriori, per riflettere ed elaborare il progetto in itinere.

Nella descrizione di ciascun incontro si è cercato di seguire uno schema che possa rendere più agevole la lettura e che consenta al lettore di focalizzarsi sugli aspetti significativi su cui poter condurre una riflessione. In un primo momento viene riportata una descrizione sintetica e allo stesso tempo esaustiva delle attività e delle varie parti dell'incontro in modo da poter tracciare il percorso della progettazione. Successivamente, verrà posta attenzione agli aspetti significativi di ciascun incontro che possano rendere conto degli processi di insegnamento-apprendimento attivati e dell'autonomia con cui gli alunni hanno costruito attivamente il proprio percorso conoscitivo mediante gli strumenti e le strategie promosse dalla Metodologia della Ricerca Variata. All'interno di ciascuna sezione vengono riportate testimonianze raccolte lungo il percorso, come foto e stralci salienti estrapolati dalle trascrizioni integrali delle registrazioni, i quali possono essere utili per rendere il discorso più completo attraverso riferimenti diretti dell'esperienza vissuta dagli alunni.

È importante ricordare che il progetto ha coinvolto una classe in cui durante l'anno scolastico precedente gli alunni hanno preso parte al progetto "ArAl", descritto nel capitolo precedente all'interno della cornice teorica dell'early algebra, volto all'avviamento del pensiero pre-algebrico, il quale favorisce un approccio alla generalizzazione attraverso l'esaltazione della consapevolezza sui processi e sulla loro oggettivizzazione mediante la riflessione su analogie e differenze[107]. Al termine della descrizione di ogni incontro, è presente una riflessione che è stata elaborata tenendo conto dei confronti avvenuti tra i ricercatori dopo lo svolgimento dell'incontro stesso.

Per agevolare la lettura dei risultati della ricerca, viene proposta una tabella con una sintesi dell'oggetto/tipologia di variazioni prodotte e del contenuto matematico emerso in ogni incontro, a cui vengono aggiunte le specifiche pagine di riferimento.

[107] Per ulteriori informazioni è possibile consultare la pagina dedicata al seguente link: Progetto "ArAl".

Titolo dell'incontro	Oggetto/Tipologia di variazione	Contenuto matematico	Paragrafo
1. *Quante parole…?*	Variazione della tipologia di lettere (A, I, V); (A, E, R)	Numero di anagrammi di una parola specifica con tre lettere diverse. In seguito, ragionamento generale sul valore di P_3.	4.1. – p. 91
2. *E se?*	Variazione del numero di lettere ($n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$)	Studio e confronto dei valori di P_1, P_2, P_3, P_4.	4.2. – p. 119
3. *Vocali a più non posso!*	Variazione del numero di lettere ($n = 5$)	Studio del valore di P_5.	4.3. – p. 143
4. *Diamogli un senso…*	Dalla variazione del numero di lettere alla generalizzazione.	Relazione tra il numero n di elementi e il numero totale P_n di permutazioni. Individuazione di ciò che varia e ciò che resta invariato nella ricerca dell'espressione di P_n al variare di n.	4.4. – p. 159
5. *Si va in scena! – Parte 1*	Presentazione di una nuova situazione problematica alla classe.	Numero di disposizioni di 5 elementi particolari a 3 a 3. In seguito, ragionamento generale sul valore di $D_{5,3}$.	4.5. – p. 182
6. *Si va in scena! – Parte 2 e La piccola squadra di calcio*	Variazione del tipo di elementi e del numero di elementi della classe k.	Studio e confronto dei valori di $D_{5,3}$, $D_{5,4}$, $D_{5,5}$.	4.6. – p. 195
7. *Creiamo un'associazione*	Variazione del tipo di elementi e del numero totale n degli elementi.	Studio dei valori di $D_{6,3}$, $D_{6,4}$. In seguito, relazione tra il numero n di elementi e il numero totale $D_{n,k}$ di disposizioni di classe k.	4.7. – p. 205
8. *Il punto della situazione…*	Variazione del numero n degli elementi dell'insieme e del numero k degli elementi della classe.	Relazione tra permutazioni semplici e disposizioni semplici. Analisi dell'equivalenza di P_n e $D_{n,k}$ nel caso particolare $k = n$.	4.8. – p. 217

4.1. Incontro 1 – *Quante parole…?*

Variazione della tipologia di elementi, mantenendone invariato il numero

Il primo incontro è stato progettato in modo che gli alunni entrassero sin da subito a diretto contatto con i primi concetti di calcolo combinatorio. Al fine di promuovere la generalizzazione, la variazione è stata inserita mediante il gioco di combinatoria "Anagrammi I". L'attività, tratta dal progetto "Lullo" (par. 2.2.3.), prevede di scegliere una parola di tre lettere diverse e di trovarne tutti i possibili anagrammi. In questo modo si è riusciti a variare la tipologia di oggetti (tipi di lettere), mantenendone inalterata la quantità (numero delle lettere = 3), consentendo agli alunni di focalizzarsi sulla struttura del problema e sulla relazione tra gli il numero di oggetti disponibili e il numero totale di casi. L'attività di problem posing di gruppo, volta alla formulazione della domanda relativa all'attività ludica svolta, ha consentito di individuare gli elementi del problema e di riflettere su di essi durante la discussione collettiva preventivamente progettata dai ricercatori, promuovendo l'avvio alla generalizzazione delle strutture sottostanti relative al calcolo combinatorio.

4.1.1. Descrizione generale dell'incontro

Gli alunni sono entrati in contatto con primi concetti di calcolo combinatorio, rispetto al conteggio e ai concetti di ordine e ripetizione, comprendendo in autonomia anche che l'argomento affrontato appartenesse al campo della matematica. A tale scopo, gli insegnanti non hanno fornito agli alunni alcuna informazione preliminare, se non quella riguardo all'arrivo di alcuni ricercatori interessati a svolgere alcune attività ludiche insieme alla classe. Inoltre, durante gli incontri non sono stati utilizzati termini legati al calcolo combinatorio, in modo da favorire un'attenzione maggiore ai concetti sottostanti alle attività svolte.

Il primo incontro può essere suddiviso in quattro parti principali, di seguito descritte:

Dopo la presentazione dei ricercatori, alla classe viene proposto un gioco online, disponibile dal sito di *OILER*, a cui dedicare qualche minuto: si tratta di *Warm App*[108], gioco online sulla distinzione in modo rapido e il più accurato possibile di un certo numero di palline (*subitizing*), al fine di favorire l'atteggiamento mentale necessario allo svolgimento dell'incontro. La prima parte dell'incontro è dedicata allo svolgimento di gioco di combinatoria, tratta dal progetto *Lullo*, il quale prende il nome di "Anagrammi I"[109]. Tale attività di approccio ludico alla matematica tiene conto dell'importanza didattica dell'*embodied cognition* e prevede la scelta di una parola qualsiasi di tre lettere diverse, che nel caso specifico del progetto ha riguardato la parola "IVA" per il primo ciclo dell'attività e "ERA" per il secondo. Dopo aver scelto la parola di tre lettere, vengono chiamati tre alunni per *indossare* le lettere, una per ciascuno. Al gioco è stata aggiunta una variante, al fine di favorire l'interdisciplinarietà, la quale può essere promossa attraverso le attività di calcolo combinatorio, e allo stesso tempo per creare un fattore di disturbo al riconoscimento dell'attività all'interno dell'area della matematica: attraverso l'ausilio di un dizionario e la scelta di due alunni a formare il "Team dizionario", gli alunni avrebbero dovuto discriminare tra parole e non parole, ricercandone il significato. In ultimo, è stato scelto un alunno con il compito di scrivere alla lavagna gli anagrammi che di volta in volta venissero identificati dai compagni. Gli alunni hanno iniziato l'attività senza un comando vero e proprio che facesse riferimento al numero totale di parole da individuare con tre lettere diverse, in quanto lo scopo dell'incontro era quello di fare in modo che gli alunni individuassero come richiesta principale del problema il numero di parole che si possono formare ordinando in tutti i modi possibili tre lettere diverse.

[108] È possibile giocare gratuitamente consultando il seguente link: https://it.oiler.education/warmapp.

[109] Disponibile al seguente link: https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/lullo/119/anagrammi-i.

Figura 4.1.1. Gli alunni indossano le tre lettere della parola IVA, il bambino sulla destra scrive gli anagrammi che di volta in volta vengono identificati dagli alunni.

Una volta completato l'elenco di tutti i possibili anagrammi di "IVA", il gioco è stato riproposto con la parola "ERA" e i ruoli sono stati assegnati ad altri sei alunni che non avevano partecipato a quello precedente. Oltre a familiarizzare maggiormente con l'argomento, la ripetizione dell'attività sarebbe stata utile anche per osservare se, dopo la discussione generata dal primo ciclo, gli alunni avrebbero iniziato a mostrare prime strategie di enumerazione e, contemporaneamente, per favorire un primo input alla generalizzazione. Nel momento in cui gli alunni si fossero resi conto di aver elencato tutte le possibili parole a partire dal numero di lettere fornito, la discussione collettiva guidata dai ricercatori avrebbe svolto un ruolo significativo, per un elaborazione e giustificazione da parte degli alunni delle ipotesi congetturate per dimostrare di aver effettivamente elencato tutti i possibili anagrammi di una parola di tre lettere.

Nella seconda parte dell'incontro, gli alunni hanno lavorato in coppie ad un attività di problem posing inerente all'attività Anagrammi I: avrebbero dovuto individuare la richiesta principale del problema che avevano appena svolto senza conoscere la richiesta a priori. Nella consegna dell'attività in coppia, l'espediente utilizzato è stato quello di informare gli alunni di voler replicare il gioco con le lettere in altre classi e, a tale scopo, veniva richiesto il loro aiuto per creare la domanda che un altro insegnante o un altro ricercatore avrebbe dovuto porre agli alunni di un'altra classe per poter realizzare lo stesso gioco a cui avevano appena preso parte anche loro.

Figura 4.1.2. Attività di problem posing in coppie

Dopo la consegna, i ricercatori hanno fotografato gli elaborati del lavoro in coppie, importandone il formato digitale sul laptop, in modo da poterli suddividere in gruppi, in base al contenuto e alla struttura, e proiettarli sulla LIM per discutere le domande insieme agli alunni nella terza fase dell'incontro. I gruppi delle domande state, quindi, mostrate alla LIM, uno per volta. Agli alunni è stato chiesto, attraverso domande-stimolo attentamente progettate prima dell'incontro, di commentare le domande, prestando attenzione ad analogie e differenze e alla chiarezza e alla completezza degli elaborati.

Figura 4.1.3. Attività di discussione sulle domande elaborate dagli alunni

L'obiettivo è stato quello di arrivare alla formulazione condivisa, attraverso la discussione collettiva, di una domanda che considerasse il numero totale delle parole che si possono formare a partire da tre lettere diverse.

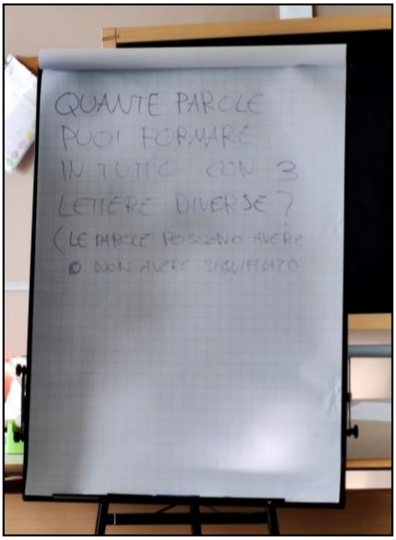


Figura 4.1.4. Domanda elaborata dagli alunni durante la discussione collettiva

L'ultima parte dell'incontro è stata dedicata alla risoluzione della domanda-problema costruita collettivamente: agli alunni è stato chiesto di provare a rispondere alla domanda condivisa lavorando in piccoli gruppi. Al termine dell'incontro i ricercatori hanno raccolto le risposte elaborate, le quali sono state analizzate dai ricercatori successivamente al primo incontro, in modo per essere utilizzate nell'ambito della discussione collettiva dell'incontro successivo.

Figura 4.1.5. Gli alunni lavorano in piccoli gruppi alla risoluzione del problema elaborato collettivamente.

4.1.2. *Anagrammi I*

Gli alunni hanno iniziato l'attività senza una consegna precisa che richiedesse esplicitamente di individuare il numero totale di parole da formare con tre lettere diverse. Dopo aver indossato le lettere, in modo da formare la parola "IVA" è stato chiesto agli alunni se la parola avesse o meno significato, dopodiché gli alunni sono stati invitati a cercare genericamente altre parole con o senza significato da costruire con le lettere della parola proposta. Per ogni anagramma trovato, veniva chiesto agli alunni il significato della parola. Nello stralcio di trascrizione di seguito riportato, la ricerca del significato della parola "AVI" ha portato ad una riflessione interessante a tema storico…

A.: alunni
B1.: bambino/a 1
R.: ricercatore

1. A.: «AVI»
2. R.: «AVI ha un significato?»
3. A: «Sì!»
4. R.: «Oh! AVI. Bravi»
5. R.: «AVI ha un significato? Ha un significato AVI? »
6. A.: «Sì! »
7. R.: «Ha un significato AVI? Sì o no? Chi è che dice sì?»

8. B.: «Mh, no no»
9. R.: «Team dizionario! AVI, dobbiamo trovare se ha un significato la parola AVI oppure no. Pronti? Potete pure cercare insieme eh»
10. R.: «Che vuol dire secondo te? »
11. B.: «È un nome»
12. R.: «È un nome tipo IVA? Il signor AVI? Potrebbe essere, vediamo un po' che ci dice il team dizionario»
13. B. team dizionario: «Antenato»
14. R.: «Team dizionario che cosa avete trovato? »
15. B. team dizionario: «Antenato»
16. R.: "Che cosa vuol dire? Come?»
17. B. team dizionario: "Avo»
18. R.: «Avo. Ma lì c'è scritto avi»
19. B.: «Eh, antenati»
20. R.: «Ah! Gli antenati…e antenato cosa vuol dire? Che vuol dire antenato?»
21. B.: «Una persona di tanto tempo fa»
22. R.: «Ok. Tipo…»
23. B.: «Un primitivo»
24. R.: «Un primitivo. Allora, antenato è quello che avete detto voi: una persona di tanto tempo fa legata a noi. Per esempio io c'ho mio papà, no? Con mia mamma, giusto? E poi c'ho mio nonno e mia nonna, no? Poi nonno e nonna c'avevano bisnonni no? Eh… queste persone – più andiamo indietro nel tempo – si chiamano antenati. Oppure come si chiamano? »
25. A.: «Avi»
26. R.: «Un avo, cinque…»
27. A.: «…avi»
28. R.: «…avi. Perfetto»

Un momento cruciale dell'incontro si è verificato quanto gli alunni hanno individuato tutti gli anagrammi della parola "IVA". Dopo aver elencato le 6 parole/non parole, gli alunni hanno tentato di trovare altre parole con le tre lettere I, V e A, le quali però riconducevano ogni volta ad anagrammi già costruiti, fino a quando un alunno arriva alla conclusione di averle trovate tutte (intervento 18):

A.: Alunni
B1: Bambino/a 1
B2: Bambino/a 2

B3: Bambino/a 3
R.: Ricercatore

1. R.: «Ce ne sono altre di parole o non parole che possiamo trovare?»
2. B1: «Può darsi»
3. Mormorio di sottofondo.
4. R.: «Cercate dai»
5. R. (al team lettere): «Lettere, dai, cercate»
6. Bambina team lettere: «Mm…»
7. B1: «IVA»
8. Mormorio di sottofondo.
9. R.: «IVA»
10. B1: «Questa già l'abbiamo fatta»
11. B2: «AIV»
12. R.: «Ce ne sono altre o no? »
13. Mormorio di sottofondo.
14. B1: «AVI»
15. R.: «AVI»
16. B!: «Già c'è»
17. R.: «AVI la seconda, già c'è»
18. B3: «No, le abbiamo fatte tutte»
19. R.: «Fatte tutte? »
20. A.: «Sì! »
21. R.: «Chi è che dice che le abbiamo fatte tutte e chi dice che ne manca qualcuna? »
22. Mormorio di sottofondo
23. R.: «Secondo voi ne manca qualcuna? »
24. B1: «No»

È a questo punto che il ricercatore spinge gli alunni a formulare ipotesi sul perché siano state individuate tutte le parole/non parole, e ad argomentarle e per giustificarle:

B1: Bambino/a 1
B2: Bambino/a 2
R.: Ricercatore

1. R.: «Perché sono tutte scusatemi? Io non sono convinto che siano tutte»
2. Mormorio di sottofondo

3. R.: «Avete provato in tutti i modi? Quali sono i modi? Perché in tutti i modi?»
4. B1: «In tutti i modi…perché li abbiamo scritti in tutti i modi»
5. R.: «Abbiamo scritto tutti in tutti i modi e non ne troviamo più nessuna»
6. B2: «Nessuna…»
7. R.: «Come fate ad essere sicuri che sono tutti?»

I bambini elaborano alcuni primi tipi di giustificazioni:

- Alcune riguardano l'*ordine*, focalizzandosi sulla posizione delle lettere e mettendo a confronto le parole in base alla posizione assunta dalle lettere (interventi 2, 9):

A.: Alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R.: Ricercatore

1. R.: «E perché? Prova a spiegarmi il perché»
2. B1: «Eh, perché abbiamo fatto tutte le cose…V…la V l'abbiamo messa in mezzo, l'abbiamo messa all'inizio…»
3. R.: «Allora, la V l'abbiamo messa in mezzo…Quante volte l'abbiamo messa in mezzo la V?»
4. B2: «Una»
5. B3: «Due»
6. A.: «Due»
7. R.: «Perché due?»
8. B1: «Perché AVI e IVA»
9. B4: «IVA e AVI»
10. R.: «Ok…quindi, la V l'abbiamo messa in mezzo e abbiamo fatto le altre due»

Un bambino prova ad utilizzare un diagramma ad albero, trovando un'analogia con la risoluzione di un problema svolto in passato insieme all'insegnante di matematica:

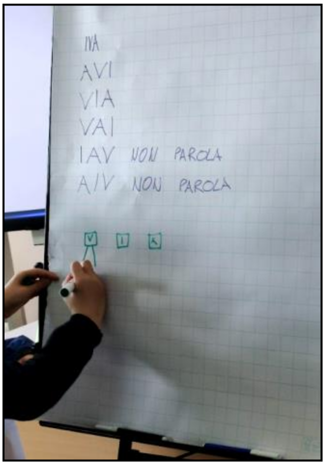


Figura 4.1.6. Realizzazione del diagramma ad albero

La realizzazione del diagramma ad albero, è stata utile per focalizzare l'attenzione sulla lettera che si trova in prima posizione e sul fatto che ci fossero 2 parole che iniziassero con la stessa lettera in prima posizione (interventi 1, 10, 20, 22, 23, 27, 28, 29):

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R.: ricercatore

1. B1: «Qui ci metto VIA e VAI. Due lettere iniziano con la V»
2. R.: «Due parole o due lettere iniziano con la V? »
3. B1: «Due parole»
4. B2: «Questa cancellala»
5. B1: «Sotto scrivi VAI e VIA. Non lo scrivere qua, scrivilo sotto»
6. R.: «VAI»
7. B3: «E VIA, scrivilo sotto»
8. R.: «Diciamogli cosa abbiamo fatto»
9. R.: «Guardate qua. Abbiamo detto che se la prima lettera è la V, dopo cosa ci possiamo mettere?"
10. B1: «Ci possiamo mettere la A»
11. R.: «La A, e quindi, facciamo VAI. VAI è una delle due che hanno scritto. E l'altra che hanno scritto qual è? »

12. Alunni alla lavagna: «VIA»
13. R.: «Quindi, si scambiano loro due, ma lui [la V] rimane…»
14. Alunni alla lavagna: «Sempre là»
15. R.: «Sempre per prima»
16. B4: «Magari possiamo vedere quante possibilità ci sono di farlo»
17. R.: «Perfetto. Ora se qua c'è I, che cosa vuol dire? Che cosa vuol dire che qua c'è I? »
18. B3: «Le parole che cominciano con la I»
19. R.: «Le parole che cominciano con la I. La lettera I. Si metta per prima [rivolgendosi a chi indossa la lettera I]»
20. B3: «IAV e IVA»
21. R.: «Che parole possiamo ottenere che cominciano con la I? »
22. B1: «IVA e IAV»
23. B2: «Due»
24. R.: «Due. IVA e IAV. Vai scrivile. La prima che stavi dicendo, IVA»
25. B1: «e poi IAV»
26. R.: «Poi quest'ultimo che vuol dire? »
27. B4: «Le parole che iniziano con la A»
28. B1: «AVI e AIV»
29. A.: «AVI e AIV»

Un altro alunno suggerisce di costruire una tabella (Figura 4.1.6.) in cui considerare la lettera che viene posta in prima posizione. La configurazione è la seguente:

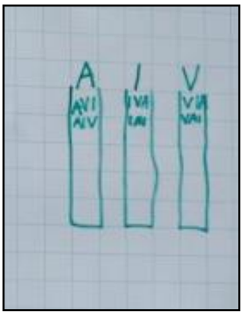


Figura 4.1.7. Tabella in cui viene messa in evidenza la lettera in prima posizione

Al termine della discussione, si cerca di riassumere, esplicitando in maniera chiara, quanto argomentato dagli alunni fino a quel momento (intervento 1). La giustificazione condivisa da più alunni sembrerebbe essere quella che fa riferimento al numero di parole che si possono formare con la stessa lettera in prima posizione, intuibile dagli interventi 6, 7, 10, 11, 13 dello stralcio seguente:

A.: alunni
B1: bambino/a 1
R.: ricercatore

1. R.: «Quello che hanno detto i vostri compagni è questo: possiamo cominciare con tre lettere diverse. […] Possiamo cominciare con la lettera V e avere due parole, giusto? VIA e VAI. Poi possiamo cominciare con la lettera…qual è l'altra lettera che sta scritta là? »
2. A.: «I»
3. R.: «La lettera I e avere? »
4. B1: «IAV»
5. R.: «Oppure? »
6. B1: «IVA»
7. R.: «IVA e IAV. Vediamo IAV. Oppure l'ultima possibilità, possiamo cominciare con la lettera? »
8. A.: «A»
9. R.: «A, e avere?»
10. A.: «AVI e AIV»
11. A.: «AIV e AVI»
12. R.: «Perfetto. Quindi, in tutto, quante sono? »
13. A.: «Sei»

Dopo questa primo momento di riflessione collettiva, i bambini iniziano ad individuare somiglianze con altre attività simili svolte in precedenza insieme alla loro insegnante di matematica (intervento 2), il che potrebbe anche indicare che gli alunni stiano intuendo anche che si tratti di un argomento di matematica, come riportato nel seguente stralcio:

R.: ricercatore

1. R.: «Dicci F. »
2. B1: «Che una volta la maestra ci ha fatto fare un problema…non mi ricordo bene… una tabella, però c'erano delle magliette o delle squadre che le abbiamo scritte sia per orizzontale che per verticale»
3. R.: «Ok»
4. B1: «E poi abbiamo visto se c'era, per esempio, Milan contro il Milan non poteva giocare…»

5. R.: «Ho capito»
6. B1: «Poi, se c'era il Milan – che ne so – contro la Juve, poteva giocare, quindi, si formavano tutte le coppie»
7. R.: «Tutte le possibili squadre. Questo è molto interessante»
8. B1: «Si può fare la stessa cosa, solo con le possibili parole»

Nel secondo ciclo di gioco, che inizia con la non parola di tre lettere "AER", i bambini sono più rapidi nello svolgimento dell'attività: scelgono una lettera per la prima posizione e poi individuano le due parole che si possono formare con la stessa lettera fissata nella prima posizione, attraverso lo scambio delle lettere che si trovano in seconda e in terza posizione. Sembra che, per formare le parole, gli alunni utilizzino una sorta di criterio alfabetico, ad esempio, RAE viene espressa prima di REA e EAR viene espressa prima di ERA e, allo stesso mondo, individuino prima le due parole con la A in prima posizione, poi con la E in prima posizione e, in ultimo, con la R in prima posizione.
Dopo aver individuato le sei parole che si possono formare con le tre lettere scelte, la discussione torna di nuovo a vertere sulla spiegazione del perché le parole individuate siano esattamente tutte quelle che è possibile formare con tre lettere:

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
I.: insegnante
R.: ricercatore

1. R.: «Ci sono altre parole? Riuscite a farne altre? »
2. B1: «Quante sono? »
3. A.: «Sei»
4. B1: «Basta basta»
5. R.: «Perché basta?»
6. B1: «Basta perché secondo me quando le lettere sono tre sono sempre…hanno lo stesso…»
7. R.: «Tu dici che quando le lettere sono tre…»
8. B1: «…hanno lo stesso, cioè, si possono scombinare lo stesso…cioè, sono tre le possibili…»
9. B2: «…sei, sono sei…»
10. B1: «…le possibili»
11. B2: «…sono sei! »

12. R.: «Sono tre o sono sei?»
13. I.: «Parlatevi tra di voi»
14. B1: «Stiamo dicendo…sono sei le possibili parole»
15. B2: «Prima che le lettere erano tre, ne abbiamo fatte sempre sei di parole»
16. B1: «Eh!»

Le argomentazioni per giustificare che le parole totali per n=3 siano sei iniziano a diventare sempre più "matematiche", nonostante gli alunni non abbiano ancora fatto riferimento esplicito alla disciplina. I bambini improntano prime giustificazioni, riferite ad un generico concetto di "doppio", rispetto allo scambio delle lettere tra la seconda e la terza posizione.

B1: bambino/a 1
I.: insegnante
R.: ricercatore

1. B1: «Per me le parole sono sei, perché essendo tre le lettere, dobbiamo fare il doppio»
2. R.: «Perché il doppio?»
3. B1: «Perché, per esempio, abbiamo un po' invertito, cioè abbiamo invertito le parole»
4. I.: «Le parole? »

B1: «Le lettere»

Riferendosi al concetto di doppio, due bambini, elaborano una iniziale giustificazione in chiave pre-algebrica, mediante il ricorso alla simbolizzazione (simile a quella osservata da Maher, C. A. & Yankelewitz, D. (2011) nello svolgimento del problema della *Kensington Pizza* osservato nel par. 2.3.2.2.) per realizzare un primo tentativo di generalizzazione.

A. : alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. B1: «Io vorrei dire un'ultima cosa…quante parole sono che iniziano con A?»
2. B2: «Una, due…»

3. R.: «Ok, quante parole sono che iniziano con A? »
4. B3: «Due! »
5. B1 (a B2 alla lavagna): «Scrivi che due parole sono con A, iniziano»
6. B2: «Allora scrivo A2?»
7. R.: «No, scrivi…»
8. B1: «No, scrivi A2»
9. R.: «Due parole con A»
10. B1: «Quante parole sono con E?»
11. A.: «Due»
12. B1: «Scrivi E2. E quante parole sono con…»
13. A.: «…scrivi R2»

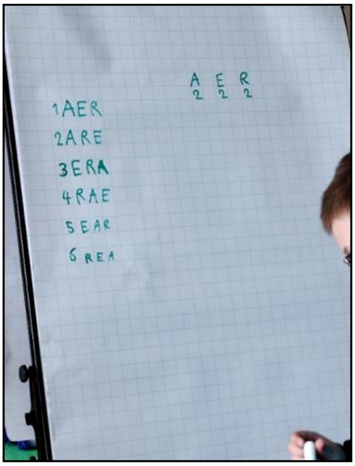


Figura 4.1.8. Prima simbolizzazione pre-algebrica: permutazioni semplici per $n = 3$.

Proseguendo il ragionamento, i bambini individuano nella moltiplicazione (intervento 4) l'operazione che potrebbe portare alla generalizzazione, sottolineando la ripetizione per tre volte dei gruppi di due parole ciascuno che iniziano con la stessa lettera (interventi 16, 20, 22).

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. B1: «R2. Significa che qua dobbiamo applicare una tabellina che è del 2 e possiamo dire 2, 4, 6, per capire che le parole sono…»

2. R.: «Quindi una tabellina, quindi che cosa possiamo scrivere?»
3. B1: «Possiamo scrivere, quindi applichiamo le tabelline, …»
4. R.: «Con la moltiplicazione»
5. B1: «Eh»
6. R.: «Quindi che prodotto scriviamo? »
7. B1: «Due per…»
8. B2: «Due per tre?»
9. A.: «Due per tre!»
10. B2: «Ma non solo si può fare due per tre necessariamente, si può fare anche tre per due»
11. R.: «Ok, scriviamo tutte e due…scriviamo 2x3 e 3x2»
12. B3: «Scrivi anche il risultato»
13. B2: «2 x 1 tra parentesi, più 2x1 tra parentesi, più 2x1 tra parentesi»
14. R.: «Perché 2x1? Che vuol dire quel x1?»
15. B1, B2 e B3: «Vuol dire che è 2»
16. B1: «Perché 2x1 fa 2»
17. R.: «Certo»
18. B1: «Invece le cose moltiplicate per 0 fanno sempre…0»
19. R.: «Giustissimo…perfetto»
20. B1: «2 x 1 tra parentesi, più 2x1 tra parentesi…»
21. R.: «Ma perché vorresti mettere 2x1? »
22. B1: «Perché le parole sono 2, c'è, 2 parole sono con la A e, quindi, dobbiamo fare 2x1 che fa 2 e le parole sono due con la A. Hai capito?»
23. R.: «Ho capito, sì sì. E poi 2 con la E e due con la R, giusto? »
24. B1, B2 e B3: «Sì»

Figura 4.1.9. Formulazione delle operazioni 2x3 e 3x2.

I bambini iniziano ad interrogarsi su quale sia l'operazione che possa essere più adeguata, associando ad ogni termine un preciso significato. Alcuni giustificano 2x3 come la ripetizione per 3 volte dei gruppi formati da due parole (intervento 10) che iniziano con la stessa lettera, come si evince dallo stralcio seguente:

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
B5: bambino/a 5
I.: insegnante
R.: ricercatore

1. B1: «Per me 3x2»
2. R.: «Perché 3x2 è meglio secondo te? »
3. B2: «Perché 3x2 è più facile, perché 3x2 fai 3 e 6, invece, 2x3 fai 2,4, 6»
4. R.: «Ok, ho capito, però per spiegare – questo è interessante – però per spiegare questo problema qua no, quello che abbiamo qua, secondo voi è più facile dire 3x2 o 2x3?»
5. B3: «2x3»
6. R.: «Perché 2x3? »
7. B1: «Per me 2x3 perché abbiamo scritto due parole con A, due parole con E, due parole con R, se facciamo 3x2 non si capisce»
8. R.: «Quindi tu stai dicendo due parole per 3 volte»
9. I.: «In realtà è quello che diceva Matteo prima con (2x1) + (2x1) + (2x1)»
10. B4: «È quello che volevo dire io»
11. R.: « (2x1) + (2x1) + (2x1) »
12. B5: «Quella di M. si capisce bene, perché si capisce che 2 iniziano con la A, due iniziano con la E e due iniziano con la R»
13. R.: «Perfetto»
14. B5: «Io volevo dire che 4x7 ad esempio e 7x4 e come lì 3x2 e 2x3 è la stessa cosa, sono soltanto due numeri invertiti»
15. R.: «Quindi il risultato non cambia. Questo è giusto il risultato è sempre 6, però quando comunichiamo con gli altri, se noi diciamo 2x3 stiamo dicendo qualcosa di diverso da 3x2 anche se poi il risultato è sempre 6, quindi dobbiamo trovare il modo migliore per comunicarlo agli altri»
16. B5: «È 2x3, come hanno detto, sono due parole per ognuno per tre volte»
17. R.: «Per tre volte, ho capito».

Rispetto alla scelta motivata su quale delle due forme, 2x3 o 3x2, sia più adatta, l'alunno B1 introduce un primo riferimento all'ordine (intervento 5), riferendosi al numero di opzioni per scegliere la lettera prima posizione (intervento 9) e al fatto che con la stessa lettera in prima posizione si possano formare due parole mediante lo scambio delle lettere tra la seconda e la terza posizione (interventi 13, 18):

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. B1: «Per me la risposta giusta è sempre 2x3 però non è…c'è…due parole ripetute per tre volte, per me è due parole per 3 lettere»
2. R.: «Cioè tu stai dicendo – questo è interessante – cioè tu stai dicendo che la R, tu stai prendendo due parole con quella lettera, cioè, noi fissiamo la prima lettera e una volta presa la prima lettera, quante parole abbiamo?»
3. B1: «Due parole»
4. R.: «Quindi, due parole per ogni lettera che possiamo mettere qua [all'inizio]. Giusto? Questo è… e quante parole possiamo mettere all'inizio? »
5. B1: «All'inizio possiamo metterne…c'è…all'inizio ne possiamo mettere una…»
6. R.: «E continuiamo le parole. Poi, possiamo cambiarla la prima?»
7. B1: «Sì»
8. R.: «E quante ne possiamo mettere in tutto come prima posizione? Quali possiamo mettere? La R, poi? »
9. B1.: «Possiamo mettere tutte le lettere… possiamo mettere tutte le tre lettere»
10. R.: «Quindi sono tre in prima posizione! »
11. B1: «Possiamo mettere tutte le tre lettere, però quelle due che stanno dopo…»
12. R.: «Dopo…»
13. B1: «Possono scambiarsi, per esempio, REA, possiamo anche scambiare la A la mettiamo prima della E e diventa RAE»
14. R.: «Fare così, esatto. Quindi quante possiamo metterne in prima posizione? »
15. B2: «Due, sono R»
16. B1: «Tre»
17. R.: «E per ognuna di queste tre…»

18. B3: «Due parole»
19. R.: «Due parole per ognuna di queste lettere in prima posizione. Perfetto. Qualcuno ha qualcos'altro da dire?»

Dallo stralcio presentato sembrerebbe che i bambini abbiano intuito la relazione tra posizione e numero di scelte disponibili, almeno per quanto riguarda la prima posizione, mentre per le altre due posizioni, sembrano restare ancorati allo scambio tra le lettere in seconda e in terza posizione. Bisognerebbe capire se con un numero maggiore di lettere, gli alunni inizierebbero a considerare anche il numero di scelte per le posizioni successive alla prima.

Durante lo svolgimento della discussione riportata di seguito, l'alunno B1 interviene con l'introduzione di Martin (intervento 1), il personaggio conosciuto nell'ambito del progetto "ArAl", il quale conosce soltanto il linguaggio della matematica. Mediante il riferimento a Martin, l'alunno esplicita il riconoscimento dell'attività all'interno dell'area della matematica (intervento 3). A questo punto, i bambini esprimono l'importanza del non rimanere ancorati ai due casi specifici osservati (IVA e AER), ma di trovare un modo attraverso il linguaggio matematico per generalizzare il procedimento che porta ad individuare il numero totale delle parole che si possono formare con tre lettere diverse (interventi 5, 7):

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R.: ricercatore

1. B1: «Io però direi una cosa…la maestra ci ha detto…mi sono ricordato di questa cosa, che la maestra ci ha fatto fare un problema a coppia di Martin. Martin capiva solo le cose matematiche, quindi, ho pensato "noi adesso stiamo facendo matematica"»
2. R.: «Anche italiano no? »
3. B1: «Stiamo facendo matematica e italiano, però noi la materia che adesso stiamo facendo è matematica»
4. R.: «È matematica certo»
5. B1: «Visto che stiamo facendo matematica, io adesso mi sono riuscito a fare, vorrei capire le cose, capirle, io in realtà le ho già capite, una nuova cosa vorrei fare. Vorrei capirle in matematica»

6. R.: «Perfetto, e quindi? E quindi Martin come lo capirebbe meglio secondo voi?»
7. B1: «Quindi, Martin lo capirà… con le freccette non si può capire»
8. R.: «Le freccette sono matematica, però magari c'è una cosa ancora più facile da capire, un messaggio più corto»

E ancora:

1. B2: «Se come diceva M. [B1], noi dobbiamo farle vedere a Martin, c'è anche l'italiano per fargli vedere ERA, EAR, REA, RAE, ARE e AER, se dobbiamo farlo vedere a Martin, se dobbiamo fargli vedere le parole e gli diamo solo quello per me non è una spiegazione logica perché…»
2. R.: «Perché non capisce che abbiamo usato…»
3. B2: «…e certo»
4. R.: «Però….vedi? Questo è un bel commento, però prima no, noi abbiamo fatto con queste tre lettere qua [R,A,E], la prima volta che abbiamo fatto questo gioco, erano queste tre lettere?»
5. A.: «No»
6. B2: «Erano diverse»
7. R.: «Come facciamo a dire a Martin, tu vorresti comunicargli questa cosa qua, o in generale, quello che possiamo fare con tre lettere?»
8. B2: «Per me, quello in generale che possiamo fare con tre lettere"
9. R.: «Quindi non dobbiamo dirgli A, E, R…»
10. B2: «Si potrebbero anche cambiare le lettere, come abbiamo fatto prima»
11. R.: «Ok, questo è importante. Bisogna capire cosa vuoi dirgli a Martin: se gli vuoi dire queste lettere qua, allora giustamente le lettere le devi usare, gliele devi far vedere; però, se invece tu vuoi fargli vedere questo, che va bene ad esempio pure per VAI, allora a questo punto le lettere non ti servono più. Giusto? Allora, grazie mille potete andare a posto»

4.1.3. Costruzione della domanda in coppie

Durante il lavoro in coppie, volto alla realizzazione della domanda relativa all'attività Anagrammi I, i ricercatori hanno osservato cosa stessero scrivendo gli alunni, in modo da farsi un'idea su come raccogliere e ordinare le risposte nel file da mostrare alla LIM, per realizzare la discussione successiva finalizzata alla costruzione della domanda completa.

I ricercatori avevano ipotizzato che alcune domande potessero contenere elementi ridondanti volti a raccontare l'attività svolta, che ci fossero domande che omettessero delle informazioni, dandole per scontate, oppure che venissero elaborate domande in cui fossero assenti parti simili e che non facessero emergere un certo elemento.
Dopo aver raccolto gli elaborati, le domande sono state raggruppate per contenuto e struttura, ad esempio:

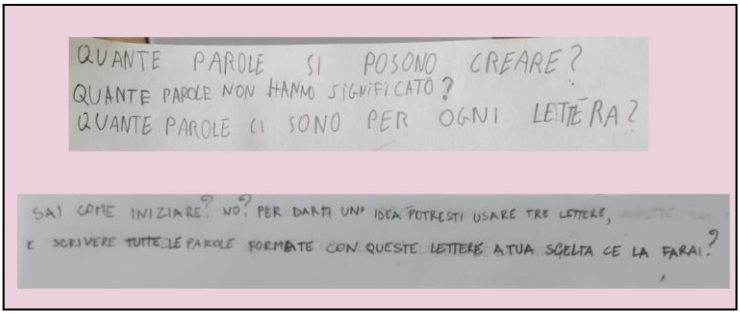


Figura 4.1.10. Gruppo delle domande elaborate dagli alunni: esempio 1

Nel gruppo appena riportato non è stata formulato una domanda, in quanto gli alunni hanno riportato gli stimoli forniti dai ricercatori durante lo svolgimento dell'attività, probabilmente con l'idea di supportare chi risolverà il problema.

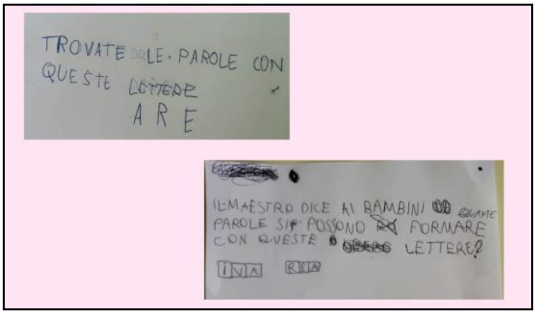


Figura 4.1.11. Gruppo delle domande elaborate dagli alunni: esempio 2

In questo caso, invece, gli alunni hanno fatto riferimento ai singoli casi osservati e nelle domande mancano elementi specifici, risultando meno chiare rispetto ad altre formulate dai compagni.

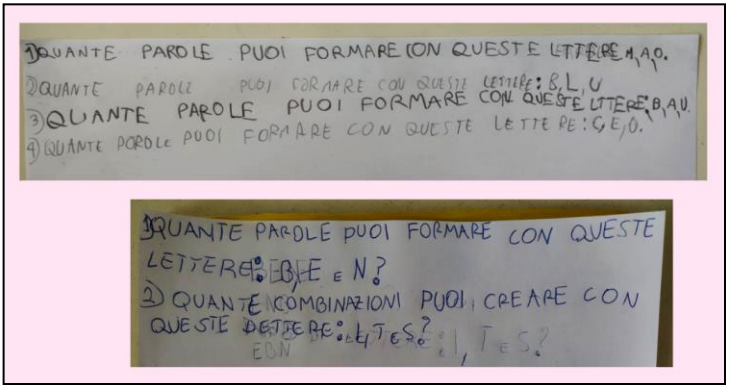


Figura 4.1.12. Gruppo delle domande elaborate dagli alunni – Esempio 3

In Figura 4.1.13, ci sono domande che propongono casi specifici, ma diversi rispetto a quelli sperimentati in classe. Sembrerebbe che i bambino abbiano comunque intuito che, per far emergere la "struttura", ci sia bisogno di lavorare con più esempi.

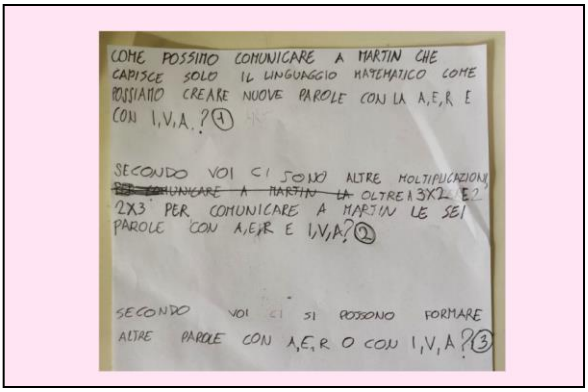


Figura 4.1.13. Gruppo delle domande elaborate dagli alunni: esempio 4

Nonostante le somiglianze con le domande precedenti (riferimento agli esempi incontrati in classe), negli elaborati presenti nella Figura 4.1.13. ci sono delle differenze che riguardano il riferimento esplicito alla rappresentazione del ragionamento.

4.1.4. Discussione collettiva per costruire la domanda relativa all'attività "Anagrammi I"

L'obiettivo della discussione è quello di arrivare alla formulazione condivisa della domanda del problema, a partire dalla combinazione delle produzioni delle varie coppie di bambini, e attraverso la riflessione collettiva sulle caratteristiche dei testi prodotti durante il lavoro in coppie.
Prima dell'incontro, si è pensato alle possibili domande da porre agli alunni, tenendo conto degli stimoli che sarebbero potuti emergere dai testi. Ad esempio: «Come mai queste domanda da voi create sono state raggruppate? Cosa ne pensate? Quali elementi hanno in comune?» (interventi 1, 3); «È chiara questa domanda? Ci sono aspetti di troppo, che non servono per capire la domanda del problema e che quindi possono essere trascurati?»; «Ci sono elementi fondamentali che caratterizzano il problema che abbiamo affrontato, ma non compaiono in queste domande mostrate alla LIM? Quali sono?»; «Osservate queste altre domande che alcuni di voi hanno proposto. Contengono quegli elementi che non compaiono nelle domande appena discusse?», ecc.

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. R.: «Che cosa pensate di queste domande? Perché le abbiamo messe insieme secondo voi?»
2. B1: «Io penso che è Giacomo e Andrea»
3. R.: «No no, adesso noi dobbiamo mettere insieme tutte queste domande per cercare di fare una domanda chiara e precisa da fare alla classe. Allora queste due domande perché le abbiamo messe insieme secondo voi? »
4. B1: «Perché potrebbero avere dei significati»
5. R.: «Dei significati simili? »
6. B2: «No»
7. B3: «Sì!»

In un momento della discussione, riportato nello stralcio seguente, è stata posta particolare attenzione alla riflessione sulla chiarezza e sulla completezza delle domande formulate, in funzione del fatto che ci fossero tutti gli elementi fondamentali affinché una persona estranea possa comprendere l'attività svolta (intervento 5):

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R.: ricercatore

1. R.: «Dimmi M., cosa pensi di queste domande? Cosa è chiaro, cosa non è chiaro? »
2. B1: «Per me sono chiare»
3. R.: «Vediamo un attimo, perché quando le leggi tu devi fare finta…»
4. B2: «…che non lo sai»
5. R.: «Che non lo sai, perché in realtà M., tu lo sai, perché l'hai fatta. Però questa domande dobbiamo darle a bambini che non hanno fatto l'attività, quindi, devono essere estremamente chiare. Quindi, secondo voi quali sono i punti di forza e di debolezza di queste domande?»
6. B1: «Io direi però una cosa, cè, lì c'è scritto parole, ma dobbiamo dire lettere»
7. R.: «Oh, allora, vediamo la prima domanda: quante parole si possono creare…»
8. B1: «Sono chiare queste domande, mi piacciono, però sotto dovremmo scrivere queste parole un po' meglio»
9. R.: «Dovrebbero essere più chiare, dovremo scriverle un po' meglio quindi?»

Nello stralcio successivo, l'alunno B1 esplicita che le domande su cui stanno riflettendo risultino poco chiare, proprio perché mancano di alcuni elementi e che, quindi, siano incomplete (intervento 2), suggerisce di inserire un riferimento al conteggio delle lettere (intervento 6):

A.: alunni
B1: bambino/a 1
R.: ricercatore

1. R.: «Dovrebbero essere più chiare, dovremo scriverle un po' meglio quindi?»
2. B1: «Sì, quante parole dovremmo creare…manca qualcosa, non è che si capisce bene, manca qualcosa»

3. R.: «E che cosa manca?»
4. B1: «Manca con quante lettere»
5. R.: «Con quante lettere! *Quante parole non hanno significato*, questo è importante. Le lettere giustamente è importante… *quante parole ci sono per ogni lettera*, però non mi dice…»
6. A.: «Con quante lettere»

Attraverso la riflessione sulle domande, inizia a prendere progressivamente forma la domanda costruita collettivamente. Nello breve stralcio riportato di seguito, gli alunni stanno riflettendo sull'importanza di indicare il numero delle lettere, in base alle informazioni che hanno tratto da due domande differenti. Il suggerimento è, quindi, quello di unire le informazioni (intervento 3) riportate separatamente dalle due domande, "lettere" (intervento 1) e "numero", per formare la domanda del problema:

B1: bambino/a 1
R.: ricercatore

1. B1: «Questa [domanda] dice di usare le lettere, ma la prima no»
2. R.: «È una differenza importante: la seconda dice tre lettere, ci state? »
3. B1: «Secondo me unirle sarebbe un'ottima idea»

Dopo aver individuato l'importanza di indicare il numero delle lettere (n=3), gli alunni iniziano ad interrogarsi in termini di generalizzazione (intervento 1, 3, 5) e, quindi, di non fare riferimento esclusivamente al caso specifico incontrato in classe.

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R.: ricercatore

1. B1: «Per me sì, dici A, R, E però ne potresti scegliere anche altre perché così gli dici solo di fare quelle»
2. R.: «È interessante questa cosa, quindi, tu dici che A, R, E è giusto, è chiaro, però si sta perdendo qualcosa, che cosa si sta perdendo?»
3. B1: «Che puoi usare anche altre lettere»
4. R.: «Anche altre lettere, A, R, E non sono le uniche»
5. B2: «Cè, tu alla maestra gli devi dire che può cambiare»

Gli alunni proseguono la riflessione su come generalizzare gli elementi fondamentali della domanda, rendendosi conto che non basta riportare gli esempi, e ipotizzano che l'aspetto generale stia nelle "tre lettere" (intervento 8) e sull'importanza che tali lettere siano "diverse" (interventi 10, 12):

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. B1: «A me queste domande mi piacciono un sacco»
2. R.: «Ti piacciono un sacco perché?»
3. B2: «Si sono copiati»
4. R.: «Non si sono copiati, hanno avuto un pensiero simile!»
5. R.: «Guardate queste lettere: M, A, O – B, A, U – C, E, O. Cioè, non è che non possiamo dire tutte le lettere, giusto?»
6. B3: «No»
7. R.: «Che proprietà hanno in comune queste lettere?»
8. B3: «Che ci sono tre lettere»
9. R.: «E come sono queste tre lettere?»
10. B3: «Diverse…sono tutte…»
11. R.: «Sono tutte…?»
12. A.: «Sono tutte lettere diverse»
13. R.: «Sono tutte lettere diverse. Questo è importante. Siete d'accordo?»

Attraverso l'individuazione degli elementi fondamentali della domanda interventi 2, 5, 7, 10), si passa alla sua vera e propria stesura collettiva. Da notare che nello stralcio riportato l'alunno B2 genera un tentativo di variazione (intervento 3), che i ricercatori decidono di non approfondire in quel momento per non distogliere l'attenzione dal processo impegnativo in cui gli alunni sono già coinvolti:

A.: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
B5: bambino/a 5

B6: bambino/a 6
R.: ricercatore

1. R.: «Tre lettere diverse. Noi potremmo anche lasciare la libertà alla classe di scegliere le lettere che vogliono loro, no? Io non ve l'ho lasciata, però loro potrebbero anche scegliersele. Dobbiamo trovare una domanda generica, generale, che catturi tutti questi esempi che vedete qua no?! Poi ci sono tanti esempi che sono importanti che avete detto voi, M, A,O – B, L, U. Come facciamo a catturare con poche parole questa domanda in maniera generica? »
2. B1: «Possono essere scelte anche tre lettere»
3. B2: «Si potrebbe fare anche con più lettere?»
4. R.: «Aspetta, aspetta, con calma. Questo sicuramente sì, però prima facciamo la domanda come l'abbiamo fatta noi e poi, semmai la cambiamo dopo. Facciamo prima la domanda come l'abbiamo fatta noi e poi ci ricordiamo quello che hai detto. Quali sono i punti fondamentali che vogliamo mettere nella nostra domanda generica? »
5. B2: «Quante lettere…»
6. R.: «Quante lettere? »
7. B3: «Tre lettere»
8. R.: «Tre lettere. [Mentre scrive sulla lavagna] Oh, tre lettere è il primo punto che vogliamo mettere nella nostra domanda generica, tre lettere, giusto? Poi che altro ci dobbiamo mettere? »
9. B4: «A tua scelta»
10. B2: «Diverse»
11. R.: «Ottimo, diverse… e poi devono essere a tua scelta, cioè, tu puoi fare tutte le lettere che vuoi, però basta che tu prendi…?»
12. B4: «tre lettere diverse»
13. R.: «Dimmi tre lettere diverse»
14. B5: «A, R, B»
15. R.: «Oppure?»
16. B6: «G, O, C»
17. R.: «Perfetto. Ok, lasceremo la classe libera di scegliere le lettere che vogliono loro, basta che ne prendano tre. Basta che ne prendano?»
18. A.: «Tre diverse»

Al termine della discussione, gli alunni hanno elaborato la seguente domanda condivisa del problema (Figura 4.1.13):

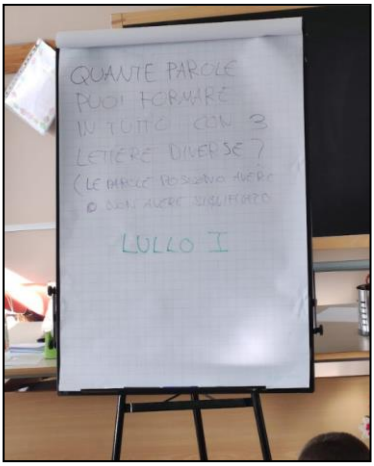


Figura 4.1.14. Domanda del problema elaborata dagli alunni durante la discussione collettiva.

4.1.5. Riflessioni sull'incontro

Mediante l'attività Anagrammi I, gli alunni sono entrati sin da subito a contatto con il calcolo combinatorio in relazione al conteggio e ai concetti di ordine e ripetizione. Il gioco ha permesso di attivare momenti di discussione significativi, in cui i gli alunni hanno riflettuto collettivamente sul numero totale delle parole che si potessero formare con 3 lettere diverse, formulando ipotesi e cercando di trovare modalità di ragionamento adeguate per giustificarle. Nelle loro argomentazioni, gli alunni hanno autonomamente fatto ricorso a diverse tipologie di rappresentazione come, ad esempio, al grafo ad albero o la tabella, individuando analogie con attività proposte in passato dall'insegnante in cui tali strumenti di rappresentazione sono risultati utili. Dal momento in cui hanno identificato che l'argomento trattato fosse di matematica, attraverso il riferimento a Martin, gli alunni hanno iniziato a ragionare in termini pre-algebrici, improntando una prima generalizzazione attraverso l'uso del linguaggio matematico, a partire dal caso specifico delle tre lettere.

Gli alunni sono dunque arrivati alla prima conclusione che, per generalizzare la procedura utilizzata per giustificare che a partire da 3 lettere diverse si possano formare in tutto 6 parole, sia necessario moltiplicare 2x3 o 3x2, pur non avendo immediatamente individuato il significato da attribuire ai valori 2 e 3. Nel corso della riflessione sul significato dei due termini, un alunno ha espresso un'ipotesi in riferimento al numero di lettere disponibili per la prima posizione.

Da notare l'atteggiamento del ricercatore, il quale non è mai intervenuto introducendo termini nozionistici o realizzando forzature affinché il discorso prendesse una specifica direzione, ma portando l'attenzione degli alunni sugli interventi che potessero esplicitare un determinato concetto. Inoltre, l'uso del grafo ad albero per rappresentare il ragionamento utilizzato nell'attività Anagrammi I per trovare tutte le parole, in funzione del riferimento esplicito dell'alunno alla somiglianza con quello eseguito durante un'attività già svolta in passato insieme all'insegnante di matematica, rientra perfettamente nei meccanismi della variazione, intesa come strategia per arrivare a generalizzare mediante l'individuazione di analogie e differenze con altri casi osservati.

L'attività di problem posing in coppie per la costruzione della domanda relativa all'attività sugli anagrammi e la discussione che ne è derivata dalla raccolta e categorizzazione degli elaborati prodotti, hanno condotto alla realizzazione collettiva della domanda. È proprio grazie alla riflessione sugli elementi da inserire nella domanda che gli alunni hanno potuto individuare e riflettere sui concetti matematici fondamentali sottostanti all'attività svolta, quali l'importanza dell'essere certi riguardo al conteggio (cioè, di essere sicuri di aver enumerato tutti i possibili casi) e il primo riconoscimento della relazione tra numero di oggetti e numero totale dei casi che è possibile formare a partire da esso che, in questo primo incontro, è rimasto ancora confinato al caso specifico delle tre lettere e delle 6 parole.

4.2. Incontro 2 – *E se?*

Variazione del numero di oggetti, mantenendone la tipologia invariata

Il secondo incontro è stato focalizzato sull'individuazione della relazione tra il numero di oggetti disponibili e il numero totale di permutazioni che si possono ottenere a partire da essi. L'attività di problem posing con l' "E se?" ha promosso la variazione del problema principale «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?» da parte degli alunni. L'analisi collettiva degli elaborati dell'attività di problem posing con l' "E se?", ha consentito agli alunni di osservare l'andamento della relazione tra numero delle lettere e numero totale delle permutazioni possibili e ampliare le possibilità di generalizzazione di relazioni e strutture in termini pre-algebrici

4.2.1. Descrizione generale dell'incontro

La prima parte dell'incontro è dedicata inizia con un ripasso generale di quanto svolto nell'incontro precedente, approfittando del fatto che due alunni non erano presenti nell'incontro precedente. I compagni provano a raccontare le varie fasi dell'esperienza e a spiegare la giustificazione fornita nell'incontro precedente al perché a partire da tre lettere diverse, si possano formare in tutto sei parole, focalizzando l'attenzione sulle due parole che si possono formare con la stessa lettera in prima posizione.

Si passa alla discussione finalizzata a commentare le risposte alla domanda costruita collettivamente nell'ultima parte dell'incontro precedente: «Quante parole puoi formare in tutto con tre lettere diverse?». Le risposte sono state raggruppate dai ricercatori precedentemente al secondo incontro, tenendo in considerazione la chiarezza, la completezza e la rappresentazione eseguita per giustificare la risposta.

La fase centrale dell'incontro è dedicata all'attività di variazione in gruppi, mediante la strategia di problem posing dell' "E se?" (What If?), che gli alunni hanno già utilizzato in altre attività realizzate in passato insieme all'insegnante di matematica. I vari gruppi dovranno, inoltre, provare a rispondere alle domande elaborate.

Figura 4.2.1. Attività di problem posing con l' "E se?"

Dopo la consegna degli elaborati, i ricercatori raggruppano le domande in categorie, in base alla tipologia di variazione e in base alla tipologia di risposte analizzate in termini di chiarezza e completezza. Viene realizzato un panel, il quale verrà utilizzato come strumento per condurre la discussione collettiva dell'ultima parte dell'incontro.

L'ultima parte dell'incontro è stata dedicata alla discussione sulle variazioni, la quale ha portato a riflettere sia sull'individuazione di ciò che è stato variato dai compagni e sia sul tipo di ragionamento eseguito per rispondere.

Di seguito il resoconto dettagliato di quanto appena descritto.

4.2.2. Discussione collettiva sulle risposte alla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»

La discussione delle riposte ha l'obiettivo di riflettere su cosa voglia dire argomentare rispetto alla completezza, cioè in modo da esplicitare efficacemente il ragionamento, e rispetto alla chiarezza, in modo che un esterno possa comprenderne facilmente il significato. Inoltre, si è cercato di favorire da parte degli alunni l'uso del linguaggio algebrico per rendere conto dei propri processi di risoluzione, sollecitando gli alunni ad usare modalità di espressione che potessero essere comprese anche da Martin, personaggio che conosce soltanto il linguaggio della matematico.

Figura 4.2.2. Risposte elaborate dagli alunni alla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»: gruppo 1

Durante l'analisi precedente all'incontro, è stato osservato che le risposte fornite dai bambini, per spiegare perché con tre lettere si possano formare in tutto 6 parole diverse, riprendessero le giustificazioni fornite durante la discussione collettiva del primo incontro, cioè, che le parole fossero 6 perché con ciascuna delle tre lettere, posta in prima posizione,

si potessero formate 2 parole scambiando le lettere in seconda e in terza posizione. Il tipo di ragionamento utilizzato dagli alunni, per spiegare la struttura delle permutazioni semplici di 3 lettere, ha spinto i ricercatori ad aprire la strada ad un possibile ragionamento di tipo induttivo, mediante il quale favorire la riflessione degli alunni sul fatto che la struttura delle permutazioni semplici di n lettere includa la struttura delle permutazioni di n-1 lettere. L'avvio è stato, appunto, fornito dalla loro stessa intuizione riguardo al fatto che le permutazioni semplici di 3 lettere diverse possa essere espressa mediante l'espressione 3x2, come ripetizione per tre volte delle permutazioni semplici di 2 lettere.
Si riporta uno stralcio indicativo di tale tipo di ragionamento:

B1: bambino/a 1
R.: ricercatore

1. B1: «Che se tu formi il gruppo, tipo con altre tre lettere, sempre sei sono, perché se sono sei, sembra che tu fai tipo… perché se sono tre, due iniziano con la R, due iniziano con la E e due con la A, quindi sono tre, perché se sono tre lettere, due per ogni…»
2. R.: «Quindi, perfetto. Abbiamo tre lettere di cui ne mettiamo una in posizione iniziale…»
3. B1: «Perché 2x3 fa 6. Se ogni lettera è all'inizio di ogni, di qualche parole, di due, allora significa che sono sei! »

Nel contesto della discussione si è cercato, inoltre, si favorire da parte dei bambini un ragionamento in termini di chiarezza perché, ad esempio, dire: «le lettere iniziali si ripetono due volte» potrebbe significare che la ripetizione avvenga nella stessa parola e che diverrebbe chiaro solo facendo un esempio.

B2: bambino/a 2
R.: ricercatore

1. B2 alza la mano
2. R.: «Vai F.»
3. B2: «Che magari dovevano dire no che scambiando le lettere dopo, dovevano dire sempre che con le lettere precedenti venivano sempre due parole ciascuna, magari si capisce meglio»

Nella figura che segue, è stata riportata una risposta che include una rappresentazione che comunichi il ragionamento elaborato dagli autori. Mediante la discussione su di essa, si cerca di far riflettere gli alunni sull'importanza della rappresentazione, in quanto esplicativa dei processi di ragionamento elaborati per raggiungere una certa spiegazione.

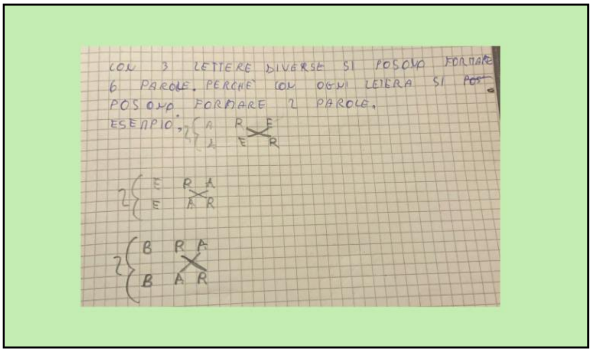


Figura 4.2.3. Risposte elaborate dagli alunni alla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»: gruppo 2

A.: alunni
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. R.: «*Con tre lettere diverse si possono formare sei parole, perché con ogni lettera si possono formare due parole. Esempio*… e guardate che grafico ha fatto… vi piace questo grafico? Che ne pensate? »
2. A.: «Sì»
3. R.: «Perché vi piace?»
4. B3: «Perché ti spiega come cambiano, come scambiare un po' le lettere. È un po' come quello che ha detto B2»
5. R.: «È uguale a quello che ha detto Federico, perché? Due parole… per ogni lettera iniziale…e, quindi, è 2x3, giusto? »
6. B3: «E ha detto anche che si scambiano le lettere»
7. R.: «bravo, la risposta prima diceva che si dovevano scambiare le lettere e qui si vede proprio, come dici te, che si stanno scambiando»

4.2.3. Lavoro sulla variazione in coppie con la strategia dell' "E se?"

La fase centrale dell'incontro è dedicata all'attività di variazione in piccoli gruppi, utilizzando la strategia di problem posing dell' "E se?" (What If?), già utilizzata dagli alunni in altre attività realizzate in passato con l'insegnante di matematica. L'attività consente di sperimentare nuove variazioni elaborate direttamente dagli alunni, i quali ci si aspetta che varieranno quegli elementi che hanno identificato della struttura, così come previsto dalla Teoria della Variazione (par. 1.2.3.).

Agli alunni viene inoltre richiesto di provare a rispondere alle variazioni da loro create, al fine di avere elementi che consentano ai ricercatori di osservare il processo di generalizzazione, dal punto di vista di individuazione della struttura e della relazione tra numero di oggetti disponibili e numero totale di permutazioni possibili.

Dopo la consegna degli elaborati, i ricercatori hanno osservato che la totalità delle variazioni erano state eseguite rispetto al numero delle lettere, aumentando il numero delle lettere (4) o riducendolo (2, 0) (Figura 4.2.4.).

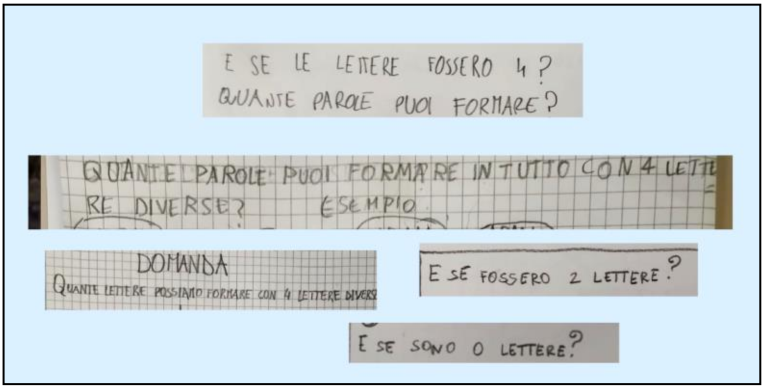


Figura 4.2.4. Variazioni prodotte dagli alunni al partire dalla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»

Nel raggruppare le domande si è cercato di mettere in evidenza il ragionamento usato dai bambini in fase di enumerazione delle parole che si possono formare con 4 lettere.

Un gruppo di 3 alunni si è reso subito conto della difficoltà nell'enumerazione che si presenta passando da 3 a 4 lettere. Di seguito uno stralcio della conversazione del gruppo in cui mentre si ragiona sulla quantità di permutazioni che si possono formare, gli alunni contemporaneamente riflettono sia sulla struttura e anche sul tipo di relazione tra numero degli elementi e numero totale dei casi possibili:

A.: alunni
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

1. B1: "GABE, proviamo un attimo con questa…proviamo con la E, c'è ABG, poi EBGA, poi…perché poi per me se ne possono formare un botto…venti…"
2. B2: "Potrebbe essere il doppio"
3. B1: "Sì… il doppio magari… uhm, no?"
4. B2: "Credo di sì, proviamo…GBAE, GEBA…"
5. B1: "Aspetta, non abbiamo provato una cosa con la G però"
6. B2: "Magari quattro a ogni cosa, con queste due lettere se ne formano otto"
7. B3: "Allora sono sedici?"
8. B1: "Se sono cinque, allora abbiamo sbagliato qualcosa"
9. B2: "Per me no"
10. B1: "Bisogna ragionarci… le dobbiamo vedere tutte quante"
11. [*I bambini scrivono le varie permutazioni che vengono loro in mente*]
12. B1: "Sono tantissime"
13. B2: "Ne vengono un'infinità per me"
14. B3 ride
15. [*I bambini elencano le permutazioni*]
16. B4: "Dobbiamo cancellare un pochino"
17. B2: "Tutte le lettere si possono spostare…GEBA, GBAE, bisogna guardare così... le prime tre lettere sono state tutte davanti… vedi che sono già quattro con la G? Forse ne possono venire quattro…"
18. B1: "Forse anche di più"
19. B4: "Sì quattro, quattro… perché sono state in tutte le posizioni queste"
20. B2: "Sì ma con la A mi mancano altre due"
21. [*I bambini continuano a cercare tutte le permutazioni possibili per ciascuna delle quattro lettere messe alla prima posizione*]
22. B1: "È difficile con quattro"
23. B3: "Tantissimo!"
24. B4: "Figurati con sette!"
25. B3: "uno, due, tre, quattro, cinque…"
26. B1: "Già con tre se ne formano sei"
27. B4: "In tutto con 4 lettere sono 24 parole!"

Nello stralcio appena riportato, l'alunno B2 ipotizza (intervento 2) la relazione tra numero delle lettere e numero totale delle permutazioni in una relazione di doppio, ma poco dopo (intervento 7), l'alunno B3 ha già riflette sul fatto che non possa trattarsi del doppio, dal momento che si rende conto che le parole elencate siano già sedici. L'alunno B1 (intervento 10) suggerisce che, per capire qualcosa in più dal punto di vista della relazione, ci sia bisogno di visualizzare tutte permutazioni, facendo in modo che anche B1 e B2 (intervento 12) capiscano che i casi sono molti di più di quelli che avevano ipotizzato. Con l'intervento 17, emerge il ragionamento seguito dal gruppo per enumerare i casi, il quale consiste nel posizionare una delle quattro lettere in prima posizione e cambiando l'ordine di quelle in seconda, in terza e in quarta posizione. L'espressione (intervento 24) potrebbe far pensare che l'alunno B4 si sia reso/a conto che quella tra numero delle lettere e numero delle parole sia una funzione crescente, improntando una prima generalizzazione. Al termine dell'enumerazione, B4 conta le parole formate e si rende conto che con 4 lettere si possono formare "in tutto" 24 parole.

Mediante l'analisi degli elaborati degli alunni, si è osservato che alcuni le abbiano enumerato i casi in maniera casuale e, non avendo individuato un criterio di enumerazione efficace, non siano arrivati ad individuare tutte le possibili permutazioni di 4 elementi e, soprattutto, non possano avere la certezza di averle elencate tutte. Nonostante non abbiano individuato le 24 permutazioni di 4 lettere, i bambini hanno provato comunque a giustificare la loro risposta. L'elaborato posto a sinistra della Figura 4.2.5., mostra che gli alunni abbiano provato ad utilizzare una tabella, la quale però non si è rivelata utile ai fini del ragionamento (è stata cancellata) e che, comunque, gli alunni abbiano provato ad individuare una relazione tra numero delle lettere e numero totale delle permutazioni, scrivendo «ogni volta che aggiungi 1 lettera le parole aumentano di 3», basandosi sul numero delle parole che sono riusciti ad elencare. Gli alunni del gruppo che ha prodotto la risposta a destra della Figura 4.2.5., probabilmente hanno ragionato in termini di relazione di doppio le 6 permutazioni di 3 lettere, applicando tale relazione, in maniera analoga, anche al caso di 4 lettere, affermando che con 4 lettere diverse si possano ottenere 8 parole.

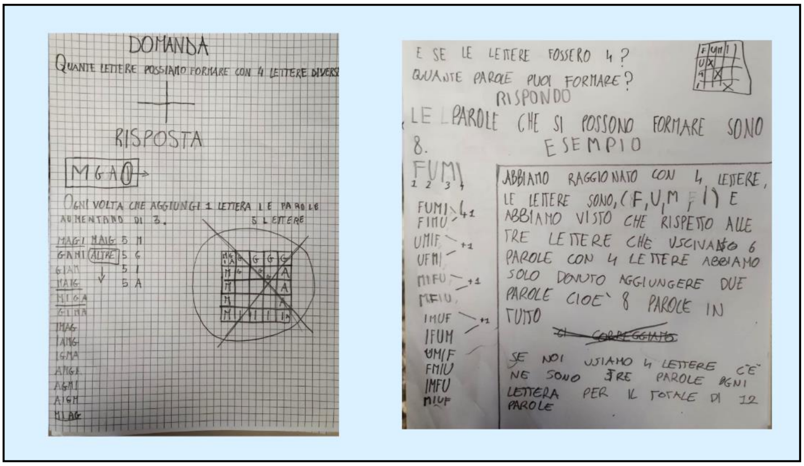


Figura 4.2.5. Risposte prodotte dagli alunni al partire dalla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»

Nella Figura 4.2.6. le due risposte presentate vengono messe a confronto, in quanto entrambi i gruppi sono arrivati alla conclusione che le permutazioni di 4 lettere siano 24, utilizzando un tipo di enumerazione che, in entrambi i casi, è stata ottenuta posizionando una lettera in prima posizione ed elencando le 3 coppie che si possono ottenere con la stessa lettera in prima posizione.

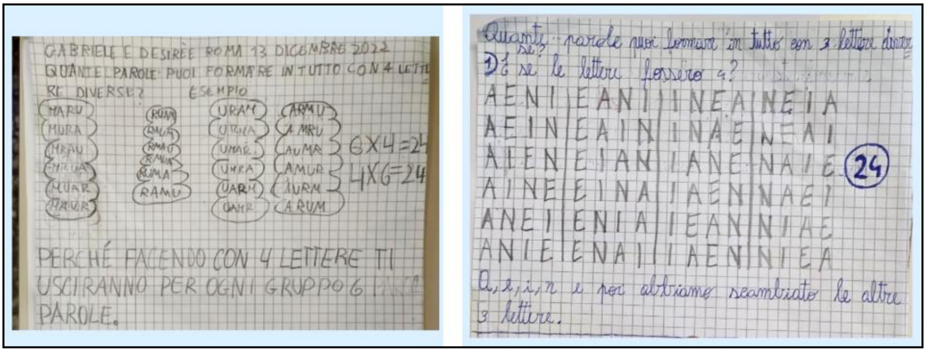


Figura 4.2.6. Variazioni prodotte dagli alunni al partire dalla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?»

Mentre nell'elaborato a sinistra della Figura 4.2.5. i bambini hanno scelto una lettera in prima posizione, per poi cambiare il posto delle altre tre in maniera casuale, i bambini che hanno prodotto l'elaborato a destra

(Figura 4.2.5.) hanno quasi perfettamente applicato quella che English chiama la "strategia del contachilometri"[110] messa in atto dagli studenti esperti, mediante la ripetizione di un elemento (potremmo dire "mantenendolo costante") e abbinando sistematicamente tra loro gli altri elementi, cambiando l'ordine in modo ciclico. Infatti, i bambini dell'elaborato a destra (Figura 4.2.5.) hanno posto una lettera in prima posizione e hanno abbinato le altre tre in modo ciclico, posizionando una delle tre lettere rimanenti nella seconda posizione per due volte e scambiando le ultime due, come già fatto nel caso di n=3 lettere nel precedente incontro (Figura 4.1.8.), anche se con qualche imprecisione nell'ordinamento. Si può fare un ulteriore confronto tra le due risposte rispetto alla giustificazione delle risposte: la coppia dell'elaborato a sinistra (Figura 4.2.5.) hanno comunque inserito la formula 6x4=24 e 4x6=24, pur non avendo cambiato in modo ciclico le lettere in seconda, terza e quarta posizione. I bambini dell'elaborato a destra (Figura 4.2.5.) hanno disposto le lettere secondo un strategia ordinata, ma non hanno inserito una formula, indicando semplicemente il numero totale delle permutazioni di 4 lettere, a cui hanno annesso una spiegazione sintetica sul tipo di ragionamento elaborato.

4.2.4. Discussione collettiva sulle variazioni

Secondo quanto progettato dai ricercatori, il primo obiettivo della discussione è stato quello di mostrare le domande e chiedere «cos'è variato?», al fine di favorire da parte dei bambini di individuare la categoria di variazione, mediante la ricerca delle analogie e delle differenze tra gli elaborati. Nello stralcio di seguito riportato di può osservare che gli alunni abbiano precocemente individuato nel "numero delle lettere" la categoria che racchiude tutte le domande da loro elaborate (interventi 6, 8, 12, 17).

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R.: ricercatore

110 English, L.D. (2007). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 81–112.

1. R.: «Che cos'hanno in comune queste domande?»
2. B1 alza la mano
3. R.: «F., vai. Non c'è una risposta giusta o sbagliata, non abbiate paura eh»
4. Alcuni alunni alzano la mano e iniziano a parlare
5. R. «F., facciamo parlare F. e poi vediamo»
6. B1: «Che dicono sempre… cambiano sempre il… cambiano sempre lo stesso numero… cambiano solo…»
7. R.: «Cambiano solo…»
8. B1: «…il numero delle lettere. Non cambiano altre cose»
9. R.: «Ok. Cambiano solo il numero delle lettere. Non altre cose che vuol dire?»
10. B2: «A parte quello, niente»
11. A.: «Niente»
12. B1: «Cambiano solo il numero delle lettere»
13. B3 alza la mano
14. R.: «G. [B3] vuoi dire qualcosa? »
15. B3: «Che quello che ha detto Federico…»
16. R.: «Cioè? Che ha detto Federico? »
17. B3: «Che le domande cambiano tipo…solo tipo…e se fossero due lettere e se sono zero lettere e se…le lettere sono quattro…solo il numero cambiano insomma»

Sin da subito alcuni alunni evidenziano le difficoltà nel contare le parole che si possono formare a partire da 4 lettere e raccontano di aver provato a cercare strumenti che li aiutassero sia ad enumerare i casi, sia ad giustificare il proprio ragionamento. Nello stralcio seguente, si parla dell'uso di una tabella che non si è dimostrato efficace per almeno due gruppi:

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. B1: "Abbiamo provato con una tabella, ma non ci siamo riusciti e a un certo punto…"
2. R1: "Perché non ci siete riusciti a fare la tabella?"
3. B1: "Non ci siamo riusciti perché era un pochino troppo impicciato"
4. B2: "No"

5. R1: “Spiegati meglio, non riesco a capire cosa intendi per impicciato”
6. R2: “F., perché non racconti a M. che problema hai riscontrato facendo la tabella? Magari avete trovato lo stesso tipo di problema…provate a spiegare il tipo di problema che avete trovato”
7. B2: “Noi dovevamo trovare altre parole alla tabella e dovevamo fare, dovevamo aggiungere un altro pezzo di tabella perché 5 5 5, su una lettera sola, quindi abbiamo lasciato perdere”
8. R2: “Prova F. a dire della tua”
9. B3: “Che la tabella l’ho lasciata stare perché la tabella non mi ha portato a dove volevo arrivare io. Penso che… dalla tabella volevo capire se erano 12, se erano 8, per essere sicuro, capito? Però…”
10. R1: “Essere sicuro di che cosa?”
11. B3: “Della risposta che mettevo”
12. R1: “Quando hai deciso di interrompere la tabella?”
13. B3: “Quando ho capito che non serviva a niente a quello che stavo facendo io”
14. R1: “Tu hai detto che cercavi un numero, quale doveva essere?”
15. B3: “O 8 o 12 perché erano le risposte che avevamo visto”
16. R1: “E la tabella non ti è stata utile”
17. R2: “Puoi ripetercelo un’altra volta perché?”
18. B3: “Il numero sulla tabella non era quello che cercavo io”
19. R2: “Quindi usavi la tabella per giustificare la risposta che avevi dato, ma non è servito”
20. R1: “Invece G. ha detto che ha smesso di usare la tabella perché doveva aggiungere una parte, ma non la poteva aggiungere…”
21. B2: “Sì!”

Mediante l’esplicitazione del ragionamento ai compagni, come si può osservare nello stralcio successivo), i bambini che hanno realizzato la risposta MGAI (elaborato inserito a sinistra nella Figura 4.2.5.) si rendono conto di non aver riportato adeguatamente in forma scritta il loro pensiero (intervento 7). Gli autori, infatti, avevano scritto nell’elaborato che le parole fossero 11, risultato dall’aggiunta di 5 parole alle 6 che si possono formare con le 3 lettere diverse. Durante l’esplicitazione del ragionamento i bambini esprimono che per ogni lettera ci siano 5 parole e che quindi le parole in tutto non siano 11, ma 20 (intervento 13).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3

R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R1: "Voi avete scritto che ogni volta che aggiungete una lettera, quando avevo tre lettere avevo 6 parole, aggiungendo una lettera in più e, quindi, avendo quattro lettere, le parole diventano 6+5=11"
2. B1 e B2: "Sì, però…"
3. B3: "Eh, ma…"
4. R1: "C'è qualcosa che non vi torna?"
5. B1: "No…perché sono 13"
6. R1: "Perché 6+5 non vi piace più?"
7. B1: "Aspetta, la tabella secondo noi ci servirà dopo, è utile, non l'abbiamo fatta bene noi, cè, qualcosa ci manca ancora"
8. B3: "Io sono d'accordo con questa cosa che avete detto sulla tabella, ma come siete arrivati a 11? Perché avete fatto quel +5?"
9. R1: "Aspettate, cerco di riassumere per tutti. Loro [B1 e B2] hanno detto che se aggiungo una quarta lettera, vado a +5 parole. E F. [B3] sta chiedendo come ci siano arrivati da 6 parole con 3 lettere alle 11 parole con 4 lettere?"
10. B3: "Io non ho capito perché avete fatto quel +5, perché se io più aggiungo le parole, vanno +5"
11. B2: "+5 l'ho aggiunto io"
12. B3: "Perché lo avete aggiunto?"
13. B1: "Non è solo +5 però quello, quel +5 si ripete per 4 volte perché le lettere sono 4, quindi sono 5 parole per la prima lettera, poi +5, poi +5 e +5 per l'ultima lettera"
14. R2: "Hai detto 11, ora stai dicendo 20!"
15. B1: "Sto dicendo 20 perché"
16. B3: "Io però ti ho chiesto perché +5"
17. B1: "Perché forse non ci ho capito niente…"

A partire dal riferimento al numero di parole che si possono formare con la stessa lettera al primo posto, gli alunni iniziano a ragionare sulla struttura e sulle relazioni attraverso il discorso sulla strategia ordinata per disporre le lettere per elencare tutte le possibili parole. Nello stralcio successivo, si osserva che una prima ipotesi sulla relazione tra numero delle lettere e numero delle parole riguarda il fatto che ciascuna delle 4 lettere debba trovarsi almeno una volta in prima, in seconda, in terza e in quarta posizione (intervento 6). Il ricercatore mette in luce che procedendo in questo modo le parole con la prima lettera al primo posto non sarebbero 5 (intervento 7), cercando di stimolare gli alunni a ragionare su altre ipotesi di giustificazione. I due alunni, probabilmente, hanno elaborato diverse ipotesi sul numero di parole che si possono formare con 4 lettere diverse, ma implicitamente si rendono conto di non aver ancora trovato la pista corretta (intervento 8).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R: "Allora, M. e G., spiegateci perché per ogni lettera ci sono 5 parole, fateci vedere come ci siete arrivati"
2. B1: "Io ho pensato così, che la G deve stare…"
3. R: "Di quali lettere?"
4. B2: "G, M, P, L"
5. R: "Ok. Adesso M., vai…"
6. B1: "Io ho pensato che la G deve stare primo, secondo, terzo e quarto, perché le lettere sono 4. La G deve stare prima, seconda, terza e quarta"
7. R: "Quindi M. sta dicendo – correggimi se sbaglio – quando io ho quattro lettere, ciascuna lettera deve trovarsi al primo posto, in mezzo al secondo posto, in mezzo al terzo posto e, infine, alla fine al quarto posto, all'ultimo. E come ci sei arrivato a 5 parole per ogni lettera"
8. B1: "Io e G. ci eravamo un po' sbagliati forse…"

Anche altri bambini si rendono conto di non aver seguito il ragionamento corretto per rispondere alla domanda. Si passa, quindi, a cercare di individuare il tipo di ragionamento adeguato per individuare la struttura e la relazione tra le 4 lettere e il numero di permutazioni associate. Per prima cosa due bambini vanno alla lavagna e cercano di rappresentare il ragionamento dei due alunni che avevano proposto di mettere ogni lettera in prima, in seconda, in terza e in quarta posizione, ma subito si rendono conto che non basti mettere la lettera in ogni posizione una sola volta, perché ci sono altre parole che possono essere formate con la stessa lettera in prima posizione (interventi 14, 15 e 16).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3

R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. B1: "Si può modificare"
2. R1: "Tipo? In che modo? Federico, in che modo potresti modificare?"
3. B1: "Tipo, se già ne facciamo un altro, già si può prendere esempio da questo alla lavagna perché da quello che loro hanno rappresentato è giusto. Perché la G può stare al primo posto, al secondo, al terzo e al quarto, quindi dobbiamo solo mettere altre tre lettere, altre tre lettere, e escono in tutti i modi, perché la G così l'abbiamo messa in tutti i modi"
4. R1: "Ce lo vieni a far vedere per favore? Cambia colore"
5. B1: "Io dicevo che questo piccolo schemino è giusto, perché la G può stare al primo posto,
6. al secondo, al terzo e al quarto e, quindi, bisogna aggiungere… se qui sono 4 lettere, bisogna
7. aggiungerne altre 3"
8. R1: "Vai, scrivi. La G adesso sta al primo posto, poi…"
9. B1: "Poi, si può fare tutto il contrario e quindi la G va all'ultimo posto"
10. R1: "Scriviamo tutte le lettere al loro posto"
11. R2: "Scrivi le parole che vengono fuori"
12. R1: "Ti sto facendo continuare quello che ha fatto Matteo, hai messo la G al primo posto, ma a noi non interessa la lettera e basta, a noi ci interessa la parola… vediamo che parola esce fuori…"
13. B1: "Poi faccio il contrario…
14. R2: "Ma con la G al primo posto c'è solo quella parola?"
15. B1: "No!"
16. R2: "Ok, scrivi le altre parole con la G al primo posto"

Durante la discussione viene attivato un tipo di ragionamento induttivo, secondo il quale, una volta scelta la lettera per la prima posizione, sia necessario ragionare sulle tre lettere rimaste e sul numero di parole che si possono formare con tre lettere diverse (permutazioni di n=3). Nello stralcio che segue, è possibile individuare la difficoltà tipica, riscontrata in combinatoria (pag. 70), di generalizzare le relazioni e le strutture per famiglie di situazioni. Nello stralcio riportato di seguito, si osserva la difficoltà nel ricollegare la struttura delle permutazioni semplici di 4 lettere con quella delle permutazioni di 3 lettere. Infatti, nel momento in cui viene tenuta fissa una delle 4 lettere in prima posizione, i bambini non si rendono immediatamente conto che la struttura ciclica assunta dalle tre lettere rimanenti (seconda, terza e quarta posizione), sia la stessa che si presenta nel casso delle 6 permutazioni semplici di 3 lettere. Viene proposta la tabella 4.2.1. per rendere più chiara la difficoltà riscontrata dagli alunni:

Struttura ciclica assunta dalle tre lettere in seconda, terza e quarta posizione, per *n* = 4 (A, B, C, D)				**Struttura ciclica delle permutazioni per *n*=3 (B, C, D)**		
1ª posizione	2ª posizione	3ª posizione	4ª posizione	1ª posizione	2ª posizione	3ª posizione
A	**B**	**C**	**D**	**B**	**C**	**D**
A	**B**	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**
A	**C**	**B**	**D**	**C**	**B**	**D**
A	**C**	**D**	**B**	**C**	**D**	**B**
A	**D**	**B**	**C**	**D**	**B**	**C**
A	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**	**B**

Tabella 4.2.1. Tabella in cui le lettere poste in grassetto mettono in evidenza la corrispondenza tra la struttura delle permutazioni semplici di *n*=4 e quella delle permutazioni semplici di *n*=3. Nella parte destra, viene rappresentata la struttura del primo dei quattro gruppi, ottenuta fissando la A in prima posizione e variando in maniera ciclica le lettere B, C e D nella 2ª, 3ª e 4ª posizione. Si può osservare chiaramente la corrispondenza della struttura del gruppo con quella delle permutazioni semplici di *n*=3. Nelle permutazioni semplici di 4 elementi, tale struttura si ripete per ciascuna delle quattro lettere che viene scelta per la prima posizione.

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R1: "Quindi, quello che mi stai dicendo tu Fede è che se io copro la G, con tre lettere diverse M, P, L si possono formare tre parole diverse…"
2. [*Facce confuse dei bambini*]
3. R1: "Fissata la G al primo posto, con tre lettere diverse si possono formare tre parole in tutto"
4. R2: "Con tre lettere diverse si possono formare tre parole in tutto"
5. R1: "Matteo ha suggerito di fissare una lettera e di fare variare le altre"
6. R2: "La G è fissa e la copriamo"

7. R1: "Vediamo che con la G al primo posto, come possiamo fare? Se tu mi dici che sono solo tre… mi stai dicendo che con tre lettere diverse posso formare solo tre parole…"
8. A.: "No!"
9. R2: "Perché no?"
10. [*brusio dei bambini*]
11. R2: "Con tre lettere diverse quante parole si possono formare?"
12. B1: "Eh, di più…"
13. R2: "Eh, ma quante?"
14. B2: "Sei!"
15. R2: "Sei?"
16. B1: "No sei"
17. R1: "Scusa, con ERA quante ne facevamo?"
18. B1: "Nove"
19. B2: "Oh, ma l'abbiamo pure fatto!"
20. R2: "L'abbiamo pure fatto, G. dice…"
21. B2: "Sei parole, due con R, due con E e due con A!"

Dopo aver elencato tutte le parole che si possono formare con una delle 4 lettere (G, P, L, M) al primo posto, nello specifico la G, i bambini sembrano aver intrapreso la strada giusta per comprendere la struttura. Di seguito viene riportato uno stralcio in cui gli alunni hanno individuato nel numero 24 il numero totale delle permutazioni possibili di 4 lettere, dopo aver superato piccolo ostacolo nelle tabelline (intervento 5)…

I bambini giustificano le 24 lettere, affermando che con ciascuna delle 4 lettere si possano formare 6 parole diverse e che, essendo 4 le lettere a disposizione(n=4), in totale si possano formare 4 gruppi di 6 parole ciascuno, si ottiene un totale di 24 parole. Inoltre, dal momento in cui ci si è resi conto del ragionamento adeguato per individuare il numero totale delle permutazioni, i bambini hanno iniziato nuovamente a ragionare in termini pre-algebrici, elaborando l'espressione più adeguata per rappresentare la struttura intervento (5, 6, 8).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R.: "Quindi, per ogni lettera quante ne abbiamo di parole?"

2. A.: “Sei!”
3. B1: “Eh, ma adesso così sto capendo…”
4. R.: “Aspetta, vediamo….”
5. B2: “Le parole sono 18 perché devo fare 6x4!”
6. B3: “Fa 24, 6x4”
7. R.: “Beh, G. quanto fa 6x4?”
8. B2: “18, ah no, 24!”
9. B4: “Fa 24!”
10. […]
11. A.: “Sono 24”
12. R.: “David prova a dirmi come dovrebbe essere questa frase… Con 4 lettere diverse…”
13. B4: “Con 4 lettere diverse… puoi formare…”
14. R.: “Desiré, con 4 lettere diverse, puoi formare…”
15. B5: “24 parole”
16. R.: “24, perché… rileggo. Con 4 lettere diverse puoi formare 18 parole perché se tieni la prima lettera ferma le altre lettere possono cambiare posto. E quante parole ho per ogni lettera, fissata la prima lettera?”
17. B5: “Sei parole per ogni lettera”

Dopo questa prima intuizione, come si evince dallo stralcio successivo, l’attenzione viene focalizzata sulle strategie di enumerazione utilizzate dai bambini e sul ragionamento che ha portato ad individuare che le permutazioni totali fossero 24.

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R: “Hanno fatto questo esempio, leggiamo sotto. Con 4 lettere, per ogni gruppo usciranno 6 parole. Chi è che mi vuole spiegare questo esempio? D. vuoi spiegare come ci siete arrivati? Vorrei capire come siete arrivati a questo punto”
2. B1: “Perché abbiamo fatto un esempio e abbiamo preso 4 lettere, poi abbiamo fatto per ogni gruppo le parole possibili che potevamo fare e c’erano uscite 6”
3. R: “Perché vi siete fermati a 6?”
4. B1: “Perché erano le uniche parole possibili”

5. R: "Gabriele vuoi aggiungere qualcosa?"
6. B2: "Noi abbiamo cercato per ogni lettera le parole, e ogni parola che ci risultava per quella lettera…"
7. R: "Per quella lettera quale?"
8. B2: "Per la lettera all'inizio. Abbiamo scritto la lettera e con quella lettera che avevamo scritto, con quelle 4 lettere che avevamo scritto ci risultavano sempre sei parole"

Nel seguente stralcio si osserva che, quando viene chiesto di giustificare l'uso delle espressioni 6x4 e 4x6 (intervento 1) , i bambini facciano riferimento al numero dei gruppi contenenti ciascuno 6 parole con la stessa lettera in prima posizione (interventi 4, 6, 10, 21).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R1: "Ok. E quindi perché avete scritto sia 6x4=24 sia 4x6=24? Non bastava scrivere solo 6x4? Perché avete scritto 4x6?"
2. B1: "Perché si può pure invertire"
3. R1: "Perché? 6 riferito a che cosa?"
4. B1: "6 parole e…"
5. R1: "6 parole e…"
6. B1: "…e 4 gruppi"
7. R1: "E 4x6 lo avete messo soltanto perché è la stessa cosa?"
8. B2: "No"
9. R2: "G. [B3], perché?"
10. B3: "No, perché poi potevamo fare anche 4 gruppi con 6 parole"
11. R2: "Secondo voi è diverso dire 6 parole per 4 gruppi e 4 gruppi con 6 parole?"
12. B2: "Sì è la stessa cosa…"
13. R1: "G. [B3] dice di no…"
14. B3: "Eh no che non è la stessa cosa!"
15. B4: "Forse perché si capisce di più in una il contesto in cui uno si trova…"
16. B3: "È vero"
17. R1: "Secondo voi qual è quella che fa capire meglio il contesto in cui si trova?"
18. [Brusio di fondo]

19. B2: “6x4”
20. R1: “6x4 fa capire meglio il contesto in cui si trova, ha detto Gabriele… perché?”
21. B2: “Perché sono 4 lettere e abbiamo visto che con una al posto fisso… vengono 6x1, quindi…”
22. R2: “6, 6, 6, 6 e, quindi, 6x4…”

Si porta l’attenzione sulla strategia ordinata (strategia del contachilometri), perché quando correttamente seguita, permette di osservare la struttura delle permutazioni e di ragionare sulla relazione tra numero delle lettere e numero totale delle possibili parole. Attraverso l’uso della strategia ordinata, gli alunni mostrano di aver compreso il collegamento tra le permutazioni semplici di 4 lettere e le permutazioni semplici di 3 lettere.

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. B1: “Volevo dire che loro hanno fatto per mettere la prima lettera all’inizio”
2. R: “Ok, una volta messa la A all’inizio, l’ordine dopo che hanno scelto è casuale o ha un motivo? Guardatelo bene…”
3. B2: “Le sei parole, quelle là, le seconde, hanno messo due, due e due”
4. R: “Perché?”
5. B2: “Perché fa tornare al discorso dell’altra volta”
6. R: “Ah!”
7. B2: “Solo che c’è una posizione in più e, infatti, se togli la prima, torniamo a quello dell’altra volta”
8. R: “Ok, ho capito! Quindi, stai dicendo che se noi togliamo la A, abbiamo soltanto E, M, I, giusto? Però lo schema seguito è quello dell’altra volta, perché ne hanno messe 2 con la E, 2 con la I e 2 con la M e dopo che succede?”
9. B3: “Noi abbiamo messo così perché in ogni colonna abbiamo scelto la A, la E, la I e la M e mettendole così si capiva bene qual era l’iniziale”
10. R: “Matilde vuoi provare a spiegarci questa cosa, questo schema?”
11. B4: “Qui abbiamo messo la E, la A, la M e la I e sotto la penultima e l’ultima”

12. R: "È quello che stava dicendo pure Andrea no? Che c'è uno schema chiaramente ordinato delle lettere. Questo qua è giusto no? Sempre 24 parole hanno trovato, però lo schema è più disordinato, perché MARU, poi viene MURA, invece, seguendo lo schema loro cosa dovrebbe venire?"
13. A.: "MAUR"

Per verificare la reale comprensione della strategia, si torna al gioco sugli anagrammi (par. 4.1.2.): quattro bambini indossano le lettere formando la parola ROMA, da cui partire per formare tutti i possibili anagrammi. I bambini ragionano sul fatto che tenendo fissa la lettera in prima posizione, per le 3 lettere in seconda, terza e quarta posizione, la struttura sia uguale a quella delle permutazioni semplici di 3 lettere, esprimendolo anche in termini pre-algebrici (interventi 9, 13, 15):

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. B1: "RMOA"
2. R: "Ora che dobbiamo fare?"
3. B2: "ne abbiamo fatte 3 e 3, 6"
4. 470. Luigi: "Ce ne sono altre?"
5. A.: "No"
6. R: "Con la R fissa al primo posto, le altre sono tutte le parole che si possono trovare con? Cosa abbiamo fatto?"
7. B1: "Abbiamo fatto una parola con tre lettere"
8. R: "E come gliela comunichiamo a Martin una parola con tre lettere?"
9. B1: "2… 2x3"
10. R: "Perché?"
11. B1: "Perché la R si leva"
12. R: "Sì, ma ora della R non ci frega, perché 2x3?"
13. B3: "2x3 perché ce ne sono 2 con la A, 2 con la O e 2 con la M!"
14. 480. Luigi: "Se non consideriamo la R, cosa diciamo a Martin?"
15. B3: "2 con la A, 2 con la O e 2 con la M"

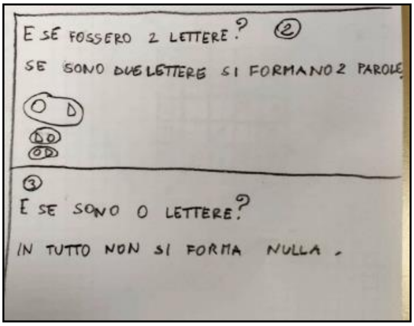
Gli alunni, come si legge nello stralcio successivo, esprimono la struttura di ciascun gruppo, formato dalle sei parole che iniziano con la stessa lettera, con la formula (intervento 2) 2x3 facendo riferimento ai tre gruppi da due parole che iniziano con la stessa lettera tenendo fissa una delle 4 lettere a disposizione . I bambini esprimono la relazione come ripetizione per 4 gruppi dell'espressione 2x3 in riferimento al ragionamento sviluppato nell'incontro precedente sulle permutazioni di 3 lettere (intervento 25). I bambini elaborano l'espressione 2x3x4 (intervento 27) facendo riferimento ai 4 gruppi formati da 6 parole pensati come il prodotto di tre sottogruppi formati da due parole ciascuno che iniziano con la stessa lettera in seconda posizione, tenuta fissa la prima (intervento 28).

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3 bambina/o 3
R1: ricercatore 1
R2: ricercatore 2

1. R: "Quindi se dovessimo comunicare a Martin questa seconda fase in cui la M…"
2. B1: "Sempre 2x3, perché sempre 2 con R, 2 con A e 2 con O"
3. R: "Cosa mettiamo al primo posto?"
4. A.: "La A"
5. [I bambini trovano tutte le parole con la A fissata al primo posto]
6. R: "Gabriele che gli diciamo a Martin?"
7. B2: "sempre 2x3"
8. R: "Facciamo l'ultima!"
9. B3: "La O!"
10. I bambini trovano tutte le parole con la O fissata al primo posto
11. R: "Che gli diciamo a Martin?"
12. A.: "2x3"
13. R: "E ora che gli diciamo a Martin con 4 lettere?"
14. B4: "Gli diciamo 2x3 + 2x3 + 2x3 + 2x3"
15. R: "Oh! E c'è un modo più veloce per dire a Martin questa cosa?"
16. B4: "Dobbiamo fare tutto il totale che esce e rimetterlo…"
17. B1: "No! 6x4!"
18. R: "Eh ma non si capisce 6x4, perché 6 cos'è?"
19. B5: "È 2x3"
20. B4: "2x3"
21. R: "Guardate qua: 2x3 e quante volte si fa questo ragionamento?"
22. B2: "Per 4"

23. B3: "È per 4!"
24. R: "Perché per quante volte si fa 2x3?"
25. A.: "Per 4"
26. R: "Cosa gli diciamo a Martin per fargliela capire bene?"
27. B2: "2x3x4"
28. R: "Perché noi diciamo che abbiamo fatto 2x3, questo ragionamento qua per 4 volte diverse, sia per la R, sia per la M, sia per la A, sia per la O"
29. A.: "Sì"

L'incontro si chiude ponendo attenzione alle variazioni in cui è stato considerato n=2 e n=0.

 **Figura 4.2.7.** Variazioni prodotte dagli alunni a partire dalla domanda «Quante parole puoi formare in tutto con 3 lettere diverse?». Caso di n=2 e n=0.	R: "Una cosa, quello che avevano proposto Andrea con Giada, ma se io faccio solo due lettere?" B1: "RM e MR" R.: "Quante sono?" A: "Due!" R: "E se uso solo una lettera?" A: "R" R: "Quante parole?" B1: "Una

4.2.5. *Riflessioni sull'incontro*

L'incontro ha permesso di introdurre esplicitamente la variazione nella classe. Se nel primo incontro, infatti, nel presentare l'attività Anagrammi I con due esempi di partenza, non è stato detto esplicitamente agli alunni che avrebbero dovuto variare la tipologia di lettere, mantenendone invariato il numero, in questo secondo incontro, mendiate la consegna del gioco dell' "E se…" i bambini sapevano che avrebbero dovuto esplicitamente variare il testo della domanda, per formularne una simile, ma non identica.

I bambini hanno confermato quanto ipotizzato prima dell'incontro dai ricercatori e, cioè, che la maggior parte dei bambini, se non tutti, avrebbe eseguito una variazione del numero delle lettere.

Durante il secondo incontro, c'è stato un alunno che solo oralmente, senza però proporlo e svilupparlo anche durante l'attività di variazione scritta con l' "E se?", ha proposto una variazione anche del tipo di oggetto, proponendo di variare, oltre al numero delle lettere, anche le lettere, sostituendole con i numeri:

B1: bambina/o 1
R.: ricercatore

1. B1: "Io…credo che potremmo cambiare sia lettere sia numeri"
2. […]
3. R.: "Tu stai dicendo che poi al posto delle lettere che cosa possiamo fare?"
4. B1: "Possiamo mettere i numeri"
5. R.: "Benissimo, ma queste domande riguardano quello che hai appena detto tu?"
6. B1: "No, è un'altra cosa"
7. R.: "È un'altra cosa quella che hai detto tu, poi lo vediamo dopo perché è molto importante. È comunque una variazione la tua? Un modo di cambiare il problema?"
8. B1: "Sì"

Sul momento si è scelto di non approfondire la questione per non distogliere l'attenzione degli alunni sulla riflessione collettiva in corso riguardo la relazione tra numero delle lettere e numero totale delle possibili permutazioni.

Durante la discussione gli alunni che avevano elencato un numero inferiore a 24 permutazioni per 4 lettere, si sono resi presto conto di non aver seguito la pista corretta per ragionare e usare rappresentazioni adeguate a supporto del ragionamento per individuare il numero totale delle possibili pare come, ad esempio, nel caso della tabella, rispetto alla quale due gruppi hanno trovato poco utile l'utilizzo, in quanto il loro modo di utilizzare le tabelle in attività in qualche modo connesse al calcolo combinatorio proposte in passato dall'insegnante, non era coerente con l'obiettivo dell'attività. Negli incontri successivi verranno utilizzate tabelle che consentiranno ai bambini di sperimentarne le applicazioni più idonee alla tipologia di problema da risolvere o della situazione da rappresentare.

I bambini sono passati dalla percezione dell'errore, alla sua identificazione, fornendo una prima spiegazione inerente alla posizione che una stessa lettera deve assumere in fase di enumerazione (la stessa lettera in prima, seconda, in terza e in quarta posizione) alla spiegazione rispetto a gruppi di 6 parole con ciascuna delle 4 lettere scelta in prima posizione, mediante la riflessione collettiva e l'esempio collettivo alla lavagna. Nel momento in cui i bambini hanno individuato la strategia più adeguata per essere certi di aver enumerato tutte le possibili parole, hanno iniziato a ragionare anche in termini pre-algebrici, individuando espressioni che sempre più esplicitamente hanno ricondotto al caso visto nell'incontro precedente delle permutazioni di tre lettere. Posizionando una delle quattro lettere in prima posizione, gli alunni hanno dunque ragionato come se la lettera fissata non ci fosse, enumerando le permutazioni delle tre lettere non usate alla prima posizione, le quali erano state giustificate mediante l'espressione 2x3 (tre gruppi da due parole ciascuno con la stessa lettera in prima posizione) durante l'incontro precedente. Al termine della discussione collettiva gli alunni sono arrivati a giustificare il numero totale delle permutazioni di 4 lettere, mediante la ripetizione del 2x3 di ogni gruppi per i 4 gruppi, arrivando a formulare collettivamente l'espressione 2x3x4, ragionando sul fatto che 24 e 2x3x4 siano numeri fratelli in quanto pur costituendo lo stesso numero, l'espressione 2x3x4 consente di esplicitare il ragionamento elaborato per formare le 24 parole a partire dalle 4 lettere.

4.3. Incontro 3 – *Vocali a più non posso!*

Variazione del numero degli elementi, mantenendo inalterata la tipologia

Nel presente incontro si propone un'attività collettiva per favorire il ripasso e la generalizzazione mediante la realizzazione di una tabella a due colonne, in cui, in una colonna, vengono rivisti i casi variando progressivamente il numero delle lettere finora osservato (1, 2, 3, 4 lettere) e, nell'altra, viene inserita l'espressione utilizzata per rendere conto del ragionamento eseguito per contare tutte le parole associate a quel numero di lettere. Si inizia ad introdurre la parola "anagrammi" in relazione all'attività eseguita con le lettere, senza però darne una definizione esplicita, al fine di favorire l'associazione implicita tra la parola e il tipo di attività matematica che si sta svolgendo.

Dopo il ripasso, viene proposto un esempio tratto dagli elaborati prodotti dai bambini al gioco dell' "E se?" svolto nell'incontro precedente (par. 4.2.3.), in cui un gruppo ha aumentato il numero delle lettere ponendo $n = 5$, senza far riferimento esplicito al numero delle lettere, ma indicando soltanto la tipologia "vocali" che, nella nostra lingua, sono proprio cinque. I ricercatori decidono di utilizzare questo esempio per aumentare ancora di un elemento il numero delle lettere a disposizione, cercando di promuovere il processo di generalizzazione da parte degli alunni

4.3.1. *Descrizione generale dell'incontro*

Poiché l'incontro è stato svolto al rientro dalle festività natalizie, si è pensato di iniziare con la compilazione collettiva di una tabella, utile sia al ripasso, che per favorire il processo di generalizzazione avviato già dal primo incontro (Figura 4.3.1.). Nella colonna di sinistra della tabella viene inserito il numero delle lettere considerate fino a quel momento (n=1, n=2, n=3, n=4) e in quella di destra, il numero totale delle parole che si possono formare a partire dalle n lettere considerate. Durante l'attività, vengono chiamati di volta in volta alcuni bambini per indossare le lettere, in modo da fornire un ulteriore stimolo al ripasso.

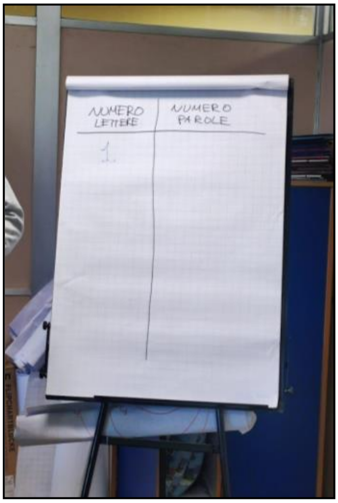


Figura 4.3.1. Tabella utilizzata per stimolare la generalizzazione mediante il ripasso.

In questo incontro i ricercatori hanno pensato anche di iniziare a introdurre il termine "anagrammi" in riferimento alle permutazioni delle lettere di una parola in modo da ottenere altre parole, senza però fornirne ancora una spiegazione esplicita, in modo da favorire l'elaborazione da parte degli alunni di un collegamento, anche a livello implicito, tra la terminologia e l'attività svolta con gli anagrammi.

In questa fase dell'incontro viene costruito collettivamente l'elenco delle permutazioni di 4 lettere, in modo da rendere visibile alla classe la strategia di enumerazione ordinata del "contachilometri", descritta nel paragrafo 4.2.5.

I ricercatori in fase di progettazione hanno pensato di continuare ad aumentare il numero di lettere, in modo da promuovere la generalizzazione, mediante il riconoscimento della struttura che accomuna tutte le situazioni incontrare e analizzate fino a quel momento. Per introdurre l'attività, si è scelto di mostrare alla classe una variazione costruita da uno dei gruppi durante il gioco dell' "E se?" realizzato nel secondo incontro (par. 4.2.3.).

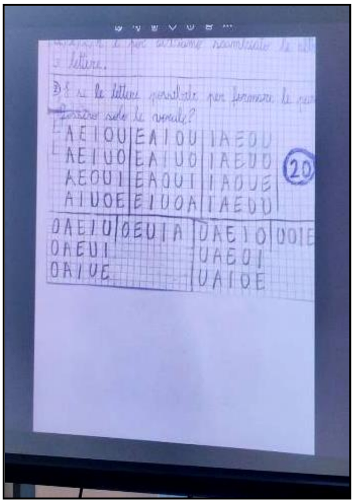


Figura 4.3.2. Variazione elaborata con il gioco dell' "E se?" – Caso delle vocali (n = 5)

Come si può osservare dalla Figura 4.3.2., nonostante gli autori della variazione non abbiano fatto un riferimento esplicito al numero delle lettere, ma abbiano soltanto indicato la tipologia di lettere, i ricercatori hanno ritenuto utile utilizzare un prodotto realizzato direttamente dagli alunni per avviare l'attività sulle cinque lettere (n = 5).

Dopo aver osservato collettivamente la variazione eseguita inserendo le cinque vocali, si passa al lavoro in coppie per provare a rispondere al problema in autonomia. Le coppie sono state formate inserendo, all'interno di ciascuna, un bambino e una bambina, in modo da favorire una maggiore partecipazione delle bambine alle attività e, soprattutto, alle discussioni collettive, alle quali, fino a quel momento, hanno sicuramento partecipato fornendo contributi significativi in termini di qualità, ma gli interventi del gruppo maschile sono risultati superiori in quantità. L'obiettivo è stato proprio quello di favorire che gli alunni prestassero attenzione al fatto che sia importante non tanto l'elenco in sé, quanto il modo in cui si elencano le parole, in quanto rende effettivamente visibile la struttura e la relazione tra numero degli oggetti e numero totale delle possibili permutazioni semplici.

Una volta eseguita l'attività con le vocali, gli alunni sono apparsi stanchi, perciò i ricercatori hanno deciso di rinviare all'incontro successivo la discussione collettiva sul panel costruito con le risposte che hanno fornito al problema. La curiosità degli alunni li spinge comunque a riflettere in autonomia – senza alcun input iniziale da parte ricercatori – in termini di generalizzazione, ponendo la loro attenzione sulle relazioni strutturali delle permutazioni semplici che le attività progettate hanno cercato di mettere in evidenza. Gli alunni hanno iniziato ad argomentare, cercando di giustificare i ragionamenti elaborati per rispondere al problema. I ricercatori hanno, quindi, deciso di osservare la direzione presa dalla discussione, la quale ha portato effettivamente gli alunni a cogliere l'importanza della rappresentazione del ragionamento e, soprattutto, ad aumentare il numero delle lettere fino a n=8 (Figura 4.3.3.) , mostrando in questo modo di aver fatto un notevole passo avanti verso una piena generalizzazione dell'argomento

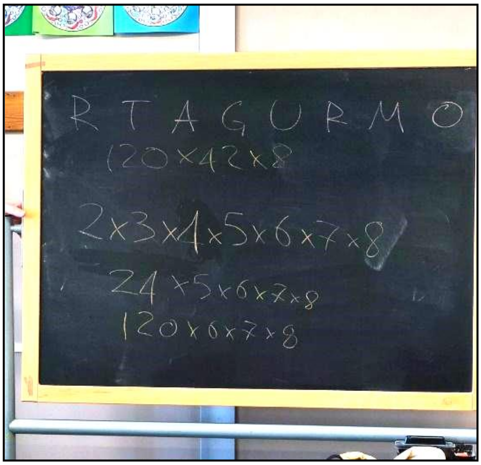


Figura 4.3.3. Espressione relativa alla variazione prodotta dagli alunni, ponendo *n*=8.

4.3.2. *Una tabella per riassumere e generalizzare*

Mediante l'uso della tabella viene ripreso il lavoro svolto nei precedenti incontri e si è cercato di fornire un ulteriore stimolo alla generalizzazione. Viene, inoltre, chiesto ad alcuni alunni di indossare le lettere per rappresentare anche fisicamente la formazione delle parole con n lettere.

Viene mostrato prima il numero 1, poi il 2, poi il 3 (intervento 1) e, infine, il numero 4. Viene prestata attenzione al modo di elencare le parole (interventi 1, 3), in modo che gli alunni possano rendersi conto che la strategia di enumerazione sia molto importante, rispetto ad un elenco scritto in maniera non ordinata (intervento 4), soprattutto nel caso in cui si voglia individuare la struttura della relazione tra numero di lettere e numero totale delle possibili parole.

B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
R: ricercatore

1. R: «DLF. Ora vi ricordate che ci sono dei modi confusi di andare avanti o dei modi ordinati di andare avanti?»
2. B1: «FLD»
3. R: «No, aspetta, questo è un modo confuso di andare avanti, le proviamo tutte fino a che non sono sei. Qual è un modo ordinato di andare avanti? Vi ricordate cosa aveva fatto M. l'altra volta prima di Natale? »
4. B2: «Praticamente aveva fatto… le aveva messe tutte in ordine le lettere"
5. R: «Tipo, che cosa dovremmo fare noi? »
6. F: «Dovremmo scambiare la L con la F»

Dopo aver riportato alla memoria la strategia ordinata utile per elencare tutte le possibili permutazioni semplici, gli alunni hanno elencato le permutazioni semplici di 4 lettere diverse velocemente e in autonomia.

È stato chiesto sempre come spiegare a Martin i ragionamenti sviluppati per elencare le parole, sfruttando le conoscenze e le abilità di pensiero pre-algebrico sviluppate grazie al progetto "ArAl" nel precedente anno scolastico (pag. 88). Lo stralcio riportato di seguito include la riflessione per arrivare all'espressione elaborata per spiegare a Martin il ragionamento eseguito per arrivare a individuare il totale delle permutazioni di 4 lettere. La parte di trascrizione riportata è sicuramente più lunga dele precedenti, in quanto permette di osservare accuratamente il processo di ragionamento degli alunni, già elaborato nel precedente incontro e descritto da pag. 128 a pag. 140, e quale significato attribuiscano ad ogni termine dell'espressione, anche in funzione dell'ordine utilizzato per rappresentare l'elenco dei casi.

A: alunni
B1: bambina/o 1
B2: bambina/o 2
B3: bambina/o 3
B4: bambina/o 4
B5: bambina/o 5
B6: bambina/o 6
B7: bambina/o 7
B8: bambina/o 8
B9: bambina/o 9
B10: bambina/o 10
R: ricercatore

1. R: «Allora le abbiamo scritte tutte?»
2. A: «Sì»
3. R: «E quante sono? »
4. A: «Ventiquattro»
5. R: «Quindi, ne abbiamo scritte sei che cominciano con la E e abbiamo scambiato in tutti i modi possibili L, D e G. Poi ne abbiamo scritte sei che cominciano con la G e abbiamo scambiato in tutti i modi possibili E, L e D.. »
6. B1: «Possiamo scrivere 6x4 per dirlo a Martin»
7. R: «Ok. 6 per 4 lettere. Ma questo 6 che cos'è? »
8. B2: «Eh…questo 6 è quante parole puoi formare e invece 4 sono…sono…eh…»
9. R: «Le lettere in prima posizione no? »
10. B2: «Eh sì»
11. B3: «E però sei sarebbero…lui ha detto tutte le lettere che tu puoi formare, e però…»
12. B2: «Le parole»
13. B3: «…sei sono le lettere inziali che tu non sposti, non sono…»
14. R: «No»
15. B3: «no.. »
16. R (indicando ELGD): «Se io tolgo la E, sei sono le parole che posso fare con L,G e D»

17. A.: «Sì»
18. R: «E questo 6 come lo diciamo a Martin? Il numero si parole che posso fare con tre lettere diverse…»
19. B2: «6x4»
20. R: «No, no, no. Guardate queste colonne e guardate questa colonna qua [quella con la E in prima posizione)…se io tolgo la E, che vedete qua? »
21. B4: «Tre lettere»
22. R: «E quante parole posso fare con tre lettere? »
23. A: «Sei»
24. R: «E come lo dicevamo a Martin? »
25. B2: «2x3»
26. B5: «Lo dicevamo 2x3»
27. R: «Dicevamo 2x3. Per ogni lettera [indicando quelle in prima posizione] c'è un 2x3. Sempre tre lettere e sei parole. Sempre sei parole. Quindi, se vogliamo dirlo a Martin bene, che gli diciamo? »
28. B3: «Però tu hai tolto le lettere iniziali»
29. R: «Esatto. Tu hai detto 4 lettere iniziali per 6 parole ogni lettera. Era 4x6 e io vi sto chiedendo, ma questo sei si può dire un po' meglio o si deve lasciare 6? »
30. A: «Si può dire un po' meglio…»
31. R: "Non è che non va bene, ma cerchiamo di dirlo un po' meglio. Cos'è questo 6? »
32. B2: «Sei sono le parole che abbiamo formato per ogni colonna»
33. R: «Cioè sei sono le parole che hai formato con tre lettere diverse"
34. A: «Sì»
35. R: «E come si dice quanto puoi formare con tre lettere diverse? »
36. B6: «2x3? »
37. R: «Quindi, mettendo insieme queste due cose? »
38. B2: «Ecco! 6x4 + 2x3»
39. A: «No! »
40. R: «Se rifaccio 2x3 viene 30 no?»
41. [*Brusio di sottofondo*]
42. B7: «4x6»
43. R: «Che è comunque giusto, ma io sto dicendo che noi c'abbiamo fissata la lettera, sei parole…»
44. B8: «Ah! 2x3»
45. R: «2x3. E poi 2x3 quante volte si ripete? »
46. B9: «Per 4»
47. Alcuni alunni: «Per sei»
48. R: «Per sei?»

49. B2: «Per 4 volte»
50. A: «Per 4 volte!»
51. B10: «Si scrive 2x3x4»
52. R: «Perché? »
53. B10: «Perché facciamo 2x3 ogni colonna che sei è»
54. R: «Che fa sei. Ok»
55. B10: «Che fa sei. Per quattro perché ci sono 4 colonne»
56. R: «Oh! Quindi, come facciamo a dire a Martin meglio questa cosa qua [indicando 6x4 alla lavagna]? Se io ho 4 lettere, cosa gli dico a Martin? »
57. B10: «2x3x4»

4.3.3. Attività con le vocali

In fase di progettazione dell'incontro, i ricercatori hanno proposto di utilizzare la variazione, elaborata da uno dei gruppi che hanno svolto l'attività di problem posing con l' "E se?", come stimolo per aumentare il numero delle lettere (n=5), nonostante gli autori non abbiano fatto riferimento al numero delle lettere, ma soltanto alla tipologia di lettere, i ricercatori hanno ritenuto utile utilizzare un prodotto realizzato direttamente dagli alunni per avviare l'attività sulle cinque lettere.

Prima di iniziare l'attività in coppie, volta alla risoluzione del problema proposto con 5 lettere, viene mostrata alla LIM la variazione con le vocali. Come mostrato nello stralcio successivo, gli alunni intuiscono subito che il numero totale delle parole elencate, nell'elaborato della Figura 4.3.2, non sia adeguato al numero delle lettere (interventi 6, 8, 12), giustificando in riferimento al numero totale di parole con 4 lettere (intervento 15), supponendo anche che, aumentando il numero delle lettere, aumenti anche il numero delle parole che è possibile formare con esse (intervento 15).

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Guardate un po' cosa avevano scritto… E se le lettere possibili per formare le parole fossero solo le vocali? Quindi, A-E-I-O-U? Quindi, abbiamo fatto il caso di una lettera, di due lettere, di tre lettere, di quattro lettere… adesso quante lettere sono?»
2. B1: «Cinque»

3. Alcuni alunni: «Cinque»
4. R: «E secondo voi la risposta che hanno dato è giusta? Guardatelo un attimo…»
5. [*Brusio di sottofondo*]
6. B2: «Per me no»
7. R: «Se dite di no, dovete chiaramente dire pure…»
8. B2: «No»
9. R: «Perché? Secondo voi è giusta la risposta che hanno dato loro?»
10. B3: «Puoi rileggere per favore?»
11. R: «E se le lettere possibili per formare le parole fossero solo le vocali? Cioè cinque…»
12. B3: «No»
13. R: «Perché?»
14. B3: «Perché…»
15. B1: «Perché se le vocali sono cinque, non possono essere… se la risposta è 20, già con quattro lettere venivano 24, 20 non può essere per forza»

Dopo aver brevemente osservato la variazione con le vocali, si passa al lavoro in coppie per provare a rispondere al problema in autonomia. Le coppie sono state formate inserendo all'interno di ciascuna un bambino e una bambina, in modo da favorire una maggiore partecipazione delle bambine alle attività e, soprattutto, alle discussioni collettive, alle quali, fino a quel momento, hanno sicuramente partecipato fornendo contributi significativi in termini di qualità, ma sicuramente gli interventi dei maschi sono risultati superiori in quantità. L'obiettivo è proprio quello di favorire che gli alunni prestino attenzione al fatto che sia importante non solo elencare le parole, ma soprattutto il modo in cui si elencano le parole, in quanto è ciò che rende effettivamente visibile la struttura e la relazione tra numero degli oggetti e numero totale delle possibili permutazioni semplici. Durante lo svolgimento dell'attività, vengono registrate le conversazioni dei bambini all'interno di ciascuna coppia, mentre i ricercatori si muovono tra i banchi per osservare lo svolgimento dei lavori e intervenire fornendo input adeguati nel caso ci siano difficoltà persistenti.

La registrazione delle conversazioni delle coppie, ha permesso di evidenziare alcuni aspetti, di seguito riportati:

- Una coppia ha intuito che le parole siano "tante" già prima di cominciare ad elencarle (intervento 1) e il ricercatore ha invitato i due bambini a quantificarle attraverso una rappresentazione dell'elenco (intervento 4):

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R: ricercatore

1. B1: «So' tantissime»
2. R «Eh lo so, ma tante quante? »
3. B2: «Penso…ce ne abbiamo… ce ne mancano…»
4. R: «Eh, fatele tutte e poi vediamo»

- Una coppia ha suggerito, già prima di enumerare i casi, che le parole totali potessero essere calcolate con l'espressione 24x4 (intervento 2), mostrando di aver eseguito un primo tentativo di generalizzazione rispetto al procedimento utilizzato per le 4 lettere. Ovviamente un'espressione più corretta, ma meno completa in termini algebrici, sarebbe stata quella in cui il 24 fosse stato moltiplicato x5 e non x4. Il ricercatore suggerisce di enumerare i casi per verificare quanto ipotizzato (intervento 5). I due bambini arrivano ad affermare che la risposta corretta sia 24x5 (intervento 11), esplicitando ai ricercatori il loro ragionamento e trovando il numero totale delle permutazioni di 5 lettere (interventi 5, 6, 7, 9). Spiegando che, con le 5 vocali, si ottiene un totale di 120 possibili parole, in quanto vengono a formarsi 5 gruppi, ciascuno formato da 24 parole che iniziano con la stessa vocale (interventi 16, 17, 18, 27).

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R: ricercatore

1. B1: «Devo fare sempre 24 con la A, con la I, con la O, con la U, con la E»
2. B1: «E poi faccio 24x4»
3. R1: «Intanto scrivetele poi ci pensiamo»
4. B1: «Eh ma è 24x4 perché 24 con la A…»
5. R1: «24 con la A…»
6. B2: «24 con la E…»
7. B1: «24 con la I, 24 con la O e 24 con la U»

8. R1: «E 24 con la…?»
9. B1 e B2: «…con la U! »
10. R1: «Quindi? »
11. B1: «24x5»
12. R1: «Ripetilo non ho capito»
13. B2: «24x5»
14. Arriva anche R2
15. R1: «Rispiegatelo a L. [R2] »
16. B1: «Visto che sono… che sono… sei con la E, sei con la O, sei con la U, sei con la I»
17. B2: «Sei, dodici, diciotto, ventiquattro»
18. B1: «Ventiquattro. Quindi, saranno A, E, I, O, U, quindi, sarà 24x5»
19. R2: «Quanto fa? »
20. R1, B1 e B2 ridono
21. R2: «Quanto fa? Scrivete tutto eh… scusa 24x10?»
22. B1: «Cento…»
23. R2: «24x10»
24. B1: «240! »
25. R2: «Diviso due»
26. B1: «Aspetta sto pensando sto facendo il conto lungo»
27. B1: «Ecco…ecco! 120!»

- Un'altra coppia è arrivata a formulare 24x4 dopo l'enumerazione dei casi (interventi 4, 6). Nello stralcio riportato di seguito i bambini hanno spiegato il 24 nell'espressione, mediante il conteggio delle sei parole che si possono formare tenendo fissa la lettera nella seconda posizione, dopo aver scelto di fissarne una delle 5 in prima posizione (interventi 10, 12, 14, 17, 21). Contando e indicando il numero delle vocali, i bambini si autocorreggono, esplicitando (intervento 14) la somma dei 24 casi per ciascun gruppo (24+24+24+24+24). Infine, arrivano a individuare in 120 il numero totale delle permutazioni delle 5 vocali (intervento 17). I ricercatori hanno provato a fornire un input affinché i bambini esplicitassero algebricamente il numero 24 (interventi 20, 22, 26, 30) , ma i bambini non approfondiscono il discorso, perciò i ricercatori decidono di rimandare la riflessione alle fase di discussione collettiva sull'attività.

B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4

R1: ricercatore 1

1. *B3 e B4 chiamano R1 al banco*
2. R1: «Fatemi vedere un po'…»
3. *B3 conta le parole a gruppi di sei, indicando la vocale in seconda posizione*
4. B3: «Sono sei, dodici, diciotto, ventuno…no, se! Ventiquattro»
5. R1: «Ventiquattro»
6. B3: «Ventiquattro ognuna, quindi, basta che facciamo altre tre»
7. R1: «Perché altre tre?»
8. B3: «Perché sono altre tre lettere»
9. R1: «Quali sono le lettere, me le indicheresti? »
10. B3: «Sì, allora la E, la I, la O e la U»
11. R1: «Non mi sembrano tre…»
12. B3: «Oh. Perciò contiamo 24 per altre 4 volte»
13. R1: «Segnatelo però»
14. B3: «24…48…scusa faccio 24+24…»
15. *R1 si allontana dal banco*
16. *B3 fa il conto in colonna*
17. B3: «Sono 120, sono! G. [R1], sono 120!»
18. R1: «Ok! Ora spiegate il perché»
19. B3: «Dobbiamo scrivere la risposta»
20. R1: «Spiegando il perché»
21. B3: «Abbiamo scritto questo [indicando la colonna con le 24 parole con la lettera A in prima posizione], non c'è bisogno che le scriviamo tutte»
22. R1: «L'hai capito perché sono 120? »
23. B3: «Sì, perché se aggiungi sempre 24… lo abbiamo capito subito dal 24 perché se sono sempre 24»
24. R1: «E perché sono sempre 24? »
25. B3: «Perché secondo me ritorno sempre a quello dell'altra volta, che in tutto erano 24…con 4 lettere»
26. R1: «Provate a scrivere la risposta. Dovete spiegarlo a Martin perché sono 120. A me l'avete spiegato, ora dovete spiegarlo a Martin»
27. B3: «Perciò nella lingua matematica…»
28. R1: «Esatto»
29. B3: «Tipo come abbiamo fatto là, 2x3x4…come l'altra volta»
30. R1: «Io lo capisco come l'altra volta, ma a Martin come glielo spieghi?»
31. *R1 si allontana*
32. B4: «A spiegarlo a Martin…»

33. B3: «Possiamo fare come ha spiegato G.»
34. B4: «Possiamo fare 24…»
35. *B3 e B4 disegnano scrivono il numero 120*

- Una terza coppia, mediante l'input del ricercatore (interventi 1, 3, 5, 7, 12, 17, 19, 23), ha individuato l'espressione 2x3x4x5 (intervento 24) collegandola all'esempio con le 4 lettere (interventi 18, 20, 22):

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R: ricercatore

1. R1: «Da dove lo avete preso questo 24?»
2. B1: «Con la A»
3. R1: «E quante ne sono venute fuori? »
4. B1: «Di parole 24… per 5 volte. 24 qui, 24 qui, 24 qui, 24 qui e 24 qui »
5. R1 : ««E quindi?»
6. B1: «4x5»
7. R1: «Ti convince? »
8. B1: «Sì»
9. R1: «Ok»
10. B1 e B2 svolgono il calcolo 24x5
11. B1: «120»
12. R1: «Quindi voi avete scritto 24… ma questo 24 come viene fuori?"
13. B1 [coprendo la prima lettera della colonna]: "Da queste 4 lettere qua»
14. R1: «E come glielo dici a Martin? »
15. B1 e B2 ridono
16. B2: «Eh eh»
17. R1: «Quindi, 24 da dove viene fuori? »
18. B1: «Le parole che puoi formare…»
19. R1: «…con quante lettere? »
20. B1: «Con 4 lettere»
21. R1: «Con 4 lettere…»
22. B1: «…posso formare 24 parole»
23. R1: «E a Martin come lo dicevi? »
24. B1: «2x3x4…x5»

A conclusione dell'attività i ricercatori hanno raccolto gli elaborati, decidendo di rimandare la discussione collettiva all'incontro successivo, in quanto i bambini apparivano molto stanchi.

4.3.4. Tentativo di generalizzazione

Gli alunni hanno iniziato a confrontarsi in autonomia sul lavoro svolto, iniziando a spiegare il loro ragionamento. I ricercatori hanno deciso di osservare la direzione presa dalla discussione e rapidamente la classe è arrivata a formulare l'espressione 2x3x4x5 in riferimento alle 5 vocali (interventi 4, 9, 13, 15):

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R: «Ok, ottimo e ora arriviamo al caso che avete fatto voi, con cinque lettere…con cinque lettere quanti sono? »
2. B1: «120»
3. R: «120. E cosa diciamo a Martin? »
4. B2: «2x3x4x5»
5. B3: «Sì, ha ragione A. [B4] »
6. B4: «Noi abbiamo trovato un mezzo più efficace»
7. B3: «Secondo me non è così, secondo me»
8. R: «Perché? »
9. B3: «Secondo me… secondo me è 24x5»
10. R: «Eh, ma 24 che cos'è? »
11. [Brusio di sottofondo]
12. R: «E 2x3 che cos'è? »
13. B3: «Secondo me il ragionamento che ha fatto [B2] è giusto, ma è giusto pure 24x5»
14. R: «Perché è 120, però qual è la cosa che lo spiega meglio di tutte? »
15. B3: «2x3x4x5»

I ricercatori hanno deciso, allora, di spostare l'attenzione degli alunni sull'importanza della rappresentazione del ragionamento, al fine di favorire una prima generalizzazione della struttura. Si è cercato di sollecitare un ragionamento induttivo, in linea con quanto descritto a pag. 121, fondato sulla ricorsività delle strutture delle espressioni elaborate a partire da n=1 fino a n=5:

A: alunni
B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. R: «Ultima domanda, aspettate! Ultima domanda! Secondo voi con una lettera quante parole…»
2. A: «Una»
3. R: «Con due? »
4. A: «Due»
5. R: «Con tre? »
6. A: «Sei»
7. R: «E come lo diciamo a Martin? »
8. A: «2x3»
9. R: «E con quattro? »
10. A: «24»
11. R: «E con cinque? »
12. B1: «2x3x4x5»

I ricercatori hanno tentato di favorire la generalizzazione mediante l'uso di un numero "grande" rispetto a quelli usati fino a quel momento (come osservato nel paragrafo 2.2.1.1. sulle permutazioni semplici, in combinatoria anche n=6 può portare ad un numero di permutazioni semplici difficilmente enumerabili!). Uno dei due ricercatori ha presentato un esempio di 8 lettere (intervento 1), le cui permutazioni si aggirano intorno alle decine di migliaia, in virtù del fatto che i numeri grandi possano aiutare a generalizzare. Nello stralcio riportato si seguito, inoltre, nel momento in cui il ricercatore propone l'esempio di 8 lettere (intervento 1), l'alunno B1 riconosce che il ricercatore stia mettendo in atto una variazione mediante la strategia dell' "E se?" (intervento 2).

Gli alunni B1, B2 e B3 (intervento 10, 12, 14, 16, 18) individuano l'espressione corretta per contare le permutazioni (2x3x4x5x6xx7x8) e si rendono conto che si tratti di un numero molto elevato rispetto a quelli incontrati fino a quel momento (interventi 20, 21).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2

B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Aspetta. Se io ora scrivo queste lettere qua [R scrive R – T – A – G – U – R – M – O sulla lavagna]. Queste lettere qua»
2. B1: «Hai fatto l' "E se?"! Maestra ha fatto l' "E se?"»
3. R: «Se io scrivo R – T – A – G – U – R – M – O, quante ne posso ottenere?»
4. [Brusio di fondo]
5. R: «Quante sono le lettere? »
6. A: «Otto»
7. R: «Secondo voi con 8 lettere, secondo voi con 8 lettere, quante…?»
8. [Brusio di fondo]
9. R: «Pensateci bene, con otto lettere diverse quante parole posso formare?»
10. B1: «Allora… 2x3…2x3…x…»
11. [Brusio di fondo]
12. B1: «…x 8»
13. R: «Con calma, con calma guardate là»
14. B2: «…x4»
15. R: «E poi? »
16. B2: «…x5»
17. B3: «…x6»
18. B1: «…x7 e x8»
19. R: «E quanto fa? »
20. [*I bambini ridono*]
21. B3: «Un numero grande»

Insieme al ricercatore, gli alunni hanno provato a calcolare il numero esatto delle permutazioni semplici senza ricorrere alla calcolatrice e sono giunti alla conclusione che il numero delle permutazioni semplici di 8 lettere diverse si aggiri intorno a 50.000.

4.3.5. Riflessioni sull'incontro

Nel terzo incontro c'è stato un vero e proprio salto di qualità in termini matematici: alcuni bambini hanno intuito che tra numero di lettere e numero totale delle parole ci sia una funzione crescente («Perché se le vocali sono cinque, non possono essere… se la risposta è 20, già con quattro lettere venivano 24, 20 non può essere per forza»). Inoltre, gli alunni si sono avviati più chiaramente verso la generalizzazione della struttura delle permutazioni, indagando la relazione tra il numero delle lettere e il totale delle possibili permutazioni attraverso la tabella riassuntiva degli esempi incontrati nelle lezioni precedenti e attraverso l'attività di coppia sulle 5 vocali. La registrazione delle conversazioni dei bambini durante lo svolgimento del lavoro in coppie ha permesso di mettere in luce i loro processi di ragionamento, mostrando di aver imparato ad elencare le parole seguendo un ordine ben preciso e di essere orientati all'uso dell'espressione utilizzata in n=4 per elaborare in maniera pre-algebrica l'espressione utile ad esprimere il numero totale delle parole che è possibile formare con 5 vocali. Soltanto un bambino ha provato ad interpretare l'espressione 2x3x4x5, cercando di capire il significato di ogni fattore. Durante la discussione dell'incontro successivo, a tal proposito, si cercherà di esplicitare il significato che ciascun fattore ha anche per gli altri alunni. Nonostante, per via della stanchezza mostrata dagli alunni a conclusione dell'attività in coppie, nell'ultima parte sia stato dedicato poco spazio alla discussione collettiva così come era stata progettata, la quale verrà condotta nell'incontro successivo, si è scelto di cogliere l'input al confronto dato dai bambini, al fine di verificare la correttezza del loro ragionamento. I ricercatori hanno allora pensato di introdurre un numero grande per valutare il livello di generalizzazione raggiunto dalla classe in quel momento e verificare la loro effettiva comprensione della struttura delle permutazioni. Con l'introduzione di n=8 lettere gli alunni, molto velocemente, hanno elaborato l'espressione 2x3x4x5x6x7x8, mostrando di aver compreso la relazione tra numero di lettere e numero totale delle possibili parole. Dopo aver raggiunto un traguardo così importante in un tempo relativamente breve, il focus diventa quello di estendere tale struttura anche per altre tipologie di oggetti in modo da ampliare la famiglia di situazioni associate alla struttura individuata dagli alunni, il quale ha costituito l'obiettivo degli incontri successivi.

4.4. Incontro 4 – *Diamogli un senso…*

Analisi delle espressioni – Dalla variazione del numero di lettere alla generalizzazione

La prima parte dell'incontro si focalizza sulle espressioni, elaborate dagli alunni per rappresentare il ragionamento svolto per contare tutte le parole a partire da numero di lettere a disposizione. Le varie espressioni vengono messe a confronto al fine di rinvenire le analogie e le differenze, per focalizzare l'attenzione su cioè che varia e ciò che rimane invariato, al fine di comprendere la struttura della relazione tra numero di oggetti e numero totale delle permutazioni. La seconda parte dell'incontro è dedicata alla costruzione di nuove variazioni, che prevedano anche la variazione della tipologia di oggetto, a partire dalla domanda iniziale «Quante parole si possono formare in tutto con 3 lettere diverse?». In questo modo ci si aspetta che gli alunni per creino una domanda simile, ma non identica e che, individuando le parti della domanda che sono state variate e quelle che, invece, sono rimaste invariate, possano focalizzare l'attenzione sugli aspetti fondamentali che costituiscono i problemi di calcolo combinatorio.

4.4.1. Descrizione generale dell'incontro

L'incontro è iniziato con la discussione collettiva sul panel, mostrato alla LIM, in cui sono stati ordinati gli elaborati prodotti dagli alunni sull'attività con le 5 vocali condotta nell'incontro precedente (par. 4.3.4.). Mediante la discussione si è cercato di riflettere in termini strutturali, al fine di ragionare sulle espressioni in associazione alla struttura delle permutazioni semplici. Inoltre, i ricercatori hanno fornito input in modo da focalizzare l'attenzione dei bambini sull'importanza di esprimere il processo mediante l'uso delle espressioni, piuttosto che giungere riportare soltanto un singolo risultato che, in termini matematici, risulta poco esplicativo in termini di procedura di risoluzione. Sono state poste domande come: «È stato difficile scrivere tutte le parole?», «Che strategie avete usato per scriverle tutte?», oppure «Che strategie hanno usato questi compagni di cui viene mostrato l'esempio per scriverle tutte?». Una volta risultato ben chiaro che gli alunni avessero compreso l'importanza del rappresentare l'elenco delle parole in modo ordinato, in quanto unico modo per facilitare l'osservazione dei meccanismi di conteggio che vengono poi tradotti nel linguaggio matematico attraverso le espressioni, si è potuto passare al confronto tra le diverse espressioni elaborate nel corso delle attività, per osservare se ci fossero somiglianze e analogie, in modo da promuovere l'emergere della struttura inerente al conteggio delle permutazioni semplici. Per far emergere la struttura della relazione tra numero di lettere e numero totale delle permutazioni, è stato necessario che gli alunni cogliessero i nessi tra le varie espressioni da loro formulate, focalizzandosi su ciò che variava e ciò restava invariato.

La seconda parte dell'incontro è stata dedicata alla variazione, per far sì che, attraverso la variazione anche della tipologia di oggetto, venisse favorita la generalizzazione mediante la costruzione di una famiglia di situazioni per le quali applicare la struttura principale. A partire dalla domanda iniziale «Quante parole si possono formare in tutto con 3 lettere diverse?», sono state generate variazioni di parti della domanda, in modo da favorire l'attenzione, anche se a livello implicito in un primo momento, da parte dei bambini su cos'è che varia e ciò che resti invariato, in modo da ottenere una domanda simile, ma non identica. In questo modo i ricercatori si aspettavano che gli alunni focalizzassero l'attenzione sugli aspetti fondamentali che costituiscono i problemi di calcolo combinatorio osservati fino a quel momento.

4.4.2. Discussione collettiva su "Vocali a più non posso!"

Gli elaborati, prodotti dagli alunni durante l'attività in coppia di problem solving sulle 5 vocali presentato nell'incontro precedente (par. 4.3.4.), sono stati raggruppati digitalmente nella fase di progettazione prima del quarto incontro e sono stati mostrati alla LIM. La discussione collettiva preventivamente progettata dai ricercatori aveva un duplice scopo: il primo consisteva nel ragionare collettivamente sulla struttura delle permutazioni semplici incontrate fino a quel momento, in modo da permettere agli alunni di comprendere che sia indispensabile che la rappresentazione dei casi (che in questi primi incontri sono stati costituiti dalle parole che si possono formare a partire da *n* lettere) venga eseguita secondo un preciso ordine e, cioè, "fissando" il più possibile una lettera in una certa posizione. C'è bisogno che gli alunni comprendano che è proprio attraverso una rappresentazione ordinata che si può da un lato, essere certi di aver elencato tutti i possibili casi, dall'altro, osservare la struttura della relazione tra numero di oggetti (le lettere) e numero totale dei casi (parole). Il secondo scopo della discussione è stato quello di focalizzarsi sulle espressioni in quanto strumento che consente di far emergere il processo, in quanto il risultato risulta poco esplicativo in termini di procedura di risoluzione. Nella fase di preparazione del panel, infatti, i ricercatori si sono resi conto che solo una coppia è arrivata ad esprimere le 120 permutazioni delle 5 vocali mediante l'espressione 2x3x4x5, mentre nelle altre coppie, tra quelle che hanno fornito una risposta in termini numerici, c'è chi ha espresso soltanto il risultato (120) e chi lo ha giustificato con l'espressione 24x5.

Nella prima parte della discussione gli alunni hanno cercato di giustificare le loro rappresentazioni e il risultato raggiunto. Nell'esempio seguente (Figura 4.4.1), i due alunni hanno riportato il risultato (a destra) e l'espressione 24x5 (in alto, seconda riga). Gli autori della risposta hanno completato due colonne, la prima, in cui vengono enumerate tutte le parole che è possibile formare con la A posta in prima posizione, la seconda, in cui vengono enumerate tutte le parole che è possibile formare con la E in prima posizione. La terza colonna, quella in cui avrebbero dovuto formare tutte le parole con la I in prima posizione, viene soltanto impostata, probabilmente perché, attraverso l'elenco ordinato nelle prime due colonne, i due bambini hanno intuito che il ragionamento usato per le prime due colonne potesse essere esteso anche per ciascuna delle tre vocali I, O, U, quando poste in prima posizione

Figura 4.4.1. Svolgimento del problema sulle permutazioni di 5 vocali – Esempio 1

In fase di discussione collettiva, i bambini (interventi 2, 4) hanno cercato di spiegare il loro ragionamento dicendo di aver contato le parole di una colonna (24) e averle moltiplicare per 5 (in quanto ciascuna colonna costruita in maniera ordinata, ponendo una delle 5 vocali in prima posizione risulta costituita da 24 parole). Durante la discussione B2 (interventi 14, 15), evidenzia il collegamento tra il numero 24 delle parole elencate in ciascuna colonna con una delle 5 lettere in prima posizione con il totale delle permutazioni di 4 lettere (24).

A: alunni

B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Prendiamo il primo. Quante parole puoi formare usando le 5 vocali A – E – I – O – U? Bene, che dite? Secondo voi in che modo, come hanno spiegato?»
2. B1: «Abbiamo…abbiamo rappresentato tutte, no tutte, quasi tutte le parole possibili che potevamo formare con A – E – I – O – U. Abbiamo formato tutta la A e tutta la E, a quel punto le abbiamo contate tutte…»
3. R: «In che modo?»
4. B1: «L'abbiamo contate…cioè, prima le abbiamo fatte tutte, poi le abbiamo contate...ehm…mo ci vuole a conta', abbiamo contato un numero che adesso non mi ricordo quale…»
5. A.: «24»
6. B1: «…e abbiamo pensato che…»
7. R: «Senti, senti…»
8. A: "24»
9. R: «Perché è venuto 24?»
10. B2: «Però 24 ogni riga, non tutte e due le colonne, perché…»
11. R: «24 ogni colonna»
12. B2: «…perché con le 4 parole era un risultato, invece adesso è un…»
13. R: «Quattro parole? »
14. B2: «No, sto dicendo…con le 4 lettere l'altra volta il risultato era 24 parole, invece, stavolta per ogni vocale…»
15. B3: «…per ogni colonna sono 24»
16. R: «Ok, ho capito. Vai Matteo»
17. B1: «E abbiamo fatto 24x5 e abbiamo fatto il calcolo e ci usciva 120»

Nello stralcio successivo, il ricercatore cerca di porre attenzione alla strategia ordinata usata dai bambini per costruire la rappresentazione delle parole. L'alunno B2 ipotizza che gli alunni che hanno svolto il lavoro in coppia abbiano tenuto fissate in posizione il più possibile tre lettere e di aver scambiato le ultime due (intervento 5). Una volta aver elencato le due parole che è possibile creare, ad esempio, con AEI fisse in prima, seconda e terza posizione (cioè, AEI – OU e AEI – UO), è stata cambiata la lettera in terza posizione con un'altra vocale (interventi 1, 2, 3). Il ricercatore invita gli alunni ad esplicitare in maniera generale la strategia ordinatrice utilizzata per rappresentare, focalizzando l'attenzione su una singola colonna (nella Figura 4.4.1, la prima colonna a sinistra, con la A in prima posizione). I bambini, osservando la rappresentazione ordinata della colonna, esplicitano il collegamento con gli esempi utilizzati negli incontri precedenti (punti interventi 7, 8), individuando il filo conduttore tra le diverse attività sul piano della rappresentazione. Gli alunni pongono prima attenzione alla colonna della prima posizione (quella della A), spostandola poi a quella della posizione adiacente in cui le vocali diverse dalla A compaiono ciascuna per 6 volte e cercano di spiegare il 6, prima con un riferimento generico alla tabellina del 6 (interventi 17, 19), che poi viene spiegato secondo la ricorsività con cui si presenta in seconda posizione ogni vocale diversa da quella che è stata inserita in prima posizione. Inoltre, nel seguente stralcio è possibile notare (interventi 22, 25) come il ricercatore abbia fornito agli alunni una serie di input per facilitare la discussione tra pari (interventi 9, 13, 22, 24).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «Loro hanno fatto questo ordine perché prima c'è la A, poi c'è la E, poi c'è la… eh se non avete fatto così…»
2. R: « [indicando la A al primo posto] Prima c'è la A qui, dici, no? Poi c'è la E…»
3. B1: «…poi la I»
4. R: «Esatto, ma io sto dicendo, all'interno della colonna, perché AEIOU, AEIUO, perché? »
5. B2: «Secondo me perché hanno scambiato le lettere»
6. R: «Quali? »
7. B2: «O e U, perché secondo me loro vanno a ritornare tutto a quello dell'altra volta e dell'altra volta ancora anche insieme alle tre lettere"
8. B3: «Abbiamo fatto lo stesso discorso che aveva fatto M. »
9. R: «Ok, come aveva fatto M., quindi voi cercate ogni volta di tornare al caso precedente e…»
10. A: «Sì»
11. R: «E qual è il caso precedente? Ditemi un po'…»

12. B2: «La A è quella che rimane praticamente sempre, la E quella che rimane sei volte, la I ne rimane due volte e quelle altre due si scambiano»
13. R: «Ho capito, interessante, proviamo F. [B4]… a dire quello che vuoi dire te»
14. B4: «Io ho visto che qui ci stanno…non so se da qui vedo bene»
15. R: «Vieni, avvicinati»
16. B4 si avvicina alla LIM
17. B4: «Che hanno fatto un po' come abbiamo fatto noi: che prima la E…cioè, hanno tenuto sempre ferma la A al primo posto, la E l'hanno tenuta per 6 volte al secondo posto…»
18. R: «Questo 6, perché 6? »
19. B4: "Anche noi abbiamo fatto così, perché rappresenta un po'…il 6, 12, 18, 24, forse…»
20. R: «Cioè?»
21. B4: «Che…che rappresenta un po' come se fosse la tabellina»
22. R [a B2 che vuole intervenire]: «Vai prova ad aiutarlo tu, però [a B2 e B4] parlate con tutti, non solo tra voi due»
23. B2: «Che le 6 volte in cui c'era la E, era quante volte…le 6 parole dell'altra volta nel gruppo delle 4 lettere, perché tutto va a ritornare»
24. R [a B3]: «Vai M. [B3], dì a loro»
25. B3: «Secondo me…noi abbiamo scritto prima tutta la A, poi abbiamo visto che la E ci sta 6 volte al secondo posto, poi ci sta altre sei volte la O, poi, la U, poi la I»

Alla classe viene mostrato l'elaborato di un'altra coppia (Figura 4.4.2) in cui i due autori ad un certo punto, a partire dalla metà della seconda colonna, hanno iniziato a scrivere la vocale in prima posizione e le vocali nella seconda posizione, tenendole fisse per sei volte ciascuna. Nella terza colonna è stata elencata per 24 volte la terza vocale scelta in prima posizione, mente nella quarta e nella quita colonna le vocali scelte per la prima posizione siano state elencate soltanto due volte.

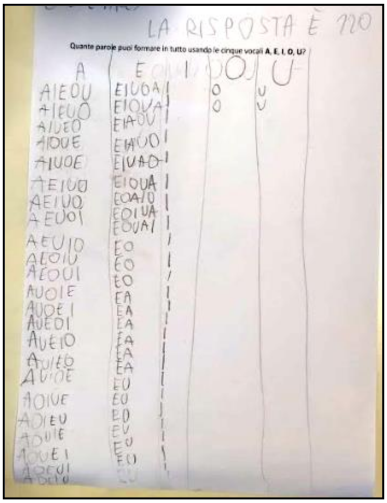


Figura 4.4.2. Svolgimento del problema sulle permutazioni di 5 vocali – Esempio 2

È stato chiesto alla classe il motivo dell'incompletezza della colonna e, oltre a un riferimento generico all'assenza di tempo, alcuni alunni ipotizzano che gli autori del testo abbiano compreso che la strategia di enumerazione delle parole sarebbe stata la stessa per ciascuna delle 5 vocali che avrebbero scelto di inserire in prima posizione. Nello stralcio riportato di seguito, l'alunno B1 si rende conto della mancanza di una parola nella seconda colonna della tabella nella Figura 4.4.2. (intervento 1) e si chiede come abbiano fatto i due compagni a scrivere comunque il risultato corretto (120). In risposta, il compagno B3 coglie pienamente la questione, affermando che i due autori del testo, una volta contate le 24 parole della prima colonna, avessero compreso che il ragionamento fosse generalizzabile per ciascuna delle vocali poste in prima posizione (interventi 5, 6, 7, 9):

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. B1: «Se non avete scritto una parola, come avete fatto a capire che erano 120 le parole?»
2. R: «Questo è molto importante, perché l'hanno capito?»

3. B1 ripete le domanda
4. R: «Prova a rispondere S. [B2]»
5. B2: «Forse avevano contato quella parola che non avevano scritto e hanno risposto 120»
6. B1: «E come hanno fatto?»
7. B2: «Eh, hanno fatto 6, 12, 18, 24…»
8. R: «Vai A. [B3]»
9. B3: «Perché già l'avevano fatta la prima con la A fissa, poi hanno voluto fare anche con la E fissa, ma te lo faceva capire che erano 24 per colonna»

Mostrando l'elaborato riportato nella Figura 4.4.3, l'attenzione viene focalizzata sull'importanza dell'ordine per rappresentare l'elenco delle parole.

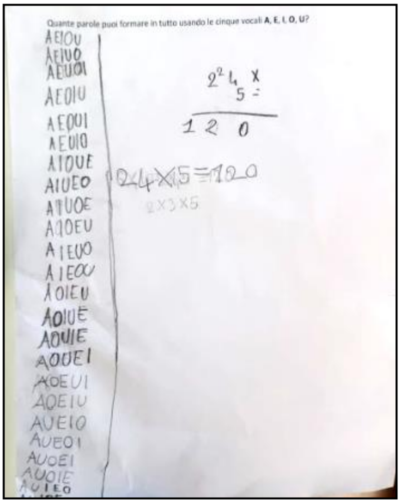


Figura 4.4.3. Svolgimento del problema sulle permutazioni di 5 vocali – Esempio 3

Uno dei due autori della risposta, B1, nello stralcio che segue, fa un'affermazione generica rispetto all'importanza di seguire un ordine (intervento 2), argomentata subito dopo dall'alunno B2 (intervento 7). B2, infatti, riconosce uno dei due aspetti fondamentali dell'enumerazione ordinata dei casi e, cioè, il fatto di rendere conto dell'esattezza e della completezza del conteggio. Il ragionamento di B2 viene confermato dall'alunna B3 (intervento 10), la quale è stata la prima della classe ad aver utilizzato un ordine nell'elencare le parole, proprio per avere la conferma di averle contate tutte:

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Allora….cosa vediamo qua»
2. B1: «Praticamente io con Ambra…io all'inizio, Ambra diceva che andavano scritte tutte in ordine, però a me non è che mi interessava tanto scriverle in ordine, a me mi interessava il risultato. Però poi ho capito che anche metterle in ordine ha un senso. Però…»
3. R: «Perché era importante metterle in ordine? »
4. B1: «Perché… era importante perché…»
5. B2 alza la mano
6. R: «A. [B2] sta alzando la mano per intervenire al tuo intervento, vai [a B2] parla con F. [B1] »
7. B2: «Praticamente… l'ordine è importante, perché se no magari le parole ne continui a fare a volontà, però non sai se hai finito e poi non te ne vengono più»
8. B1: «È vero»
9. R: «La prima ad usare l'ordine in classe è stata M. [B3], vediamo se – vi ricordate? M. te che pensi del fatto di metterle in ordine? Perché è importante metterle secondo una strategia?»
10. B3: «Perché se segui l'ordine…poi ti finiscono»

Nello stralcio successivo viene riportata la domanda posta da B1 a uno degli autori dell'elaborato riportato nella Figura 4.4.3. «Ma come hai fatto a spiegare a Martin, con linguaggio della matematica, che il risultato di tutte queste parole sarebbe 120?» (intervento 1). La domanda ha fatto sì che i bambini autonomamente iniziassero a riflettere sulle espressioni come modo di esplicitare il processo, in quanto il solo risultato non riesce a rendere conto della struttura della relazione tra numero di lettere e numero totale delle parole associato. B1, infatti, afferma che si siano altri modi per "dirlo meglio" (intervento 4), facendo riferimento probabilmente al fatto che la risposta "24x5" non sia sufficientemente esplicativa del procedimento utilizzato per arrivare al risultato. L'autore risponde al compagno, affermando esplicitamente di non aver pensato a come tradurre il procedimento in linguaggio matematico (intervento 6), in quanto in quel momento lui e la sua compagna di lavoro erano interessati a «risolvere tutto quello che c'era scritto», focalizzandosi quindi solo sul risultato, come ribadito nell'intervento 8.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. B1 alza la mano
2. B1: «Ma come hai fatto a spiegare a Martin, con il linguaggio della matematica, che il risultato di tutte queste parole sarebbe 120?»
3. [*brusio di sottofondo*]
4. B1: «Ho capito che avete usato queste strategie per dirlo a Martin, però per dirlo anche meglio ci sarebbero anche altri modi, però questa è la domanda, poi come avete fatto a far capire a Martin proprio che tutte le parole sono proprio 120? Perché così magari mica lo capisce tanto…»
5. [*brusio di sottofondo*]
6. B2: «In realtà non l'abbiamo proprio fatto. Nel senso che…non ci abbiamo pensato nemmeno tanto a farlo capire a Martin, perché noi abbiamo pensato solo a risolvere tutto quello che c'era scritto…abbiamo scritto anche questo per aiutarci. Questa è stata la prima, perché volevamo vedere, verificare…»
7. R: «Non guardare me, te l'ha fatta lui [B1] la domanda…»
8. B2: «Non ci abbiamo pensato… nel senso che abbiamo scritto solo quello che ci serviva a noi per arrivare al risultato»

Il bambino B1 che aveva posto la domanda riportata nello stralcio di cui sopra, ha affermato che ci siano altri modi («tre») per riportare in linguaggio matematico («per dirlo a Martin») il procedimento usato per contare tutte le 120 permutazioni semplici delle 5 vocali. Il ricercatore ha invitato B1 ad andare alla lavagna per iniziare ad analizzare le espressioni, per attribuire un preciso significato ad ogni singolo termine. B1 ha scritto sulla lavagna "6x4x5" e insieme ai compagni ha iniziato a ragionare su ciascun termine. Nello stralcio riportato di seguito alla tabella, gli alunni sono concordi nell'attribuire al numero 5 il numero delle vocali (intervento 1), associandolo alle cinque colonne che si possono formare ponendo per ognuna una delle 5 vocali in prima posizione (intervento 2). Mentre il "6x4" dell'espressione viene giustificato facendo riferimento alle 4 vocali diverse da quella scelta per la prima posizione che, nella rappresentazione ordinata, vengono elenca 6 volte ciascuna (interventi 29, 30, 31, 32). Prima di riportare lo stralcio, viene proposta una tabella per rendere più agevole la comprensione del ragionamento degli alunni

	VOCALE IN PRIMA POSIZIONE	VOCALI IN SECONDA POSIZIONE		
	A	E		
	A	E		
	A	E	6	
	A	E		
	A	E		
	A	E		
	A	I		
	A	I		
	A	I	6	
	A	I		
	A	I		
	A	I		
24	A	O		**6x4**
	A	O		
	A	O	6	
	A	O		
	A	O		
	A	O		
	A	U		
	A	U		
	A	U	6	
	A	U		
	A	U		
	A	U		

Tabella 4.4.1. Rappresentazione della giustificazione fornita all'espressione 6x4x5 relativa al problema "Vocali a più non posso!"

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2

B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. B1: "Secondo me, questo qua non è che è molto più chiaro, perché quelle 6 che sono, la A, la E, la I che si ripetono sei volte no? E invece magari il numero 5 sono le 5 lettere…»
2. B2: «5 lettere, 5 colonne»
3. B1: «Eh, però non è che puoi capire molto tutto il resto, tutto il ragionamento che stai facendo»
4. R: «Allora 5… proviamo a scrivere. Allora, 6… 5, che cos'è 5, 5 che cos'è? 5 colonne. Vai scrivi "5 colonne"»
5. B3: «Però se Martin vede solo questo… Magari se non vede quello, ma vede solo questo…»
6. R: «Va beh…»
7. B3: «Sì, dice "va beh, sono 120", però…»
8. B4: «5 non sono le colonne, sono le lettere»
9. R: «5, 5 lettere. 5 colonne, 5 lettere. Perché colonne e lettere sono la stessa cosa? »
10. B6: «Perché hanno lo stesso numero»
11. R: «Che vuol dire? Allora pure 5 bambini sono la stessa cosa di 5…»
12. B1: «Ma non è la stessa cosa…»
13. B6: «Sono la stessa cosa però, perché in ogni colonna fai come… che inizia con… inizia…»
14. R: «Ah! Quelle che iniziano! Quindi, 5 vuol dire? Le 5 colonne, perché qual è la lettera che ci interessa? Quel 5? Che dice quel 5? »
15. B3: «5 dice che è ripetuto per 5 volte»
16. R: «Cosa?»
17. B3: «Per 5 colonne»
18. R: «E ok, ma ogni colonna come è caratterizzata? »
19. B3: «Dalle lettere che stanno al primo posto…»
20. R: «Quindi, quel 5 è la lettera che sta al primo posto! Va bene, continuiamo. Poi, chi voleva interpretare? 4? »
21. [*Brusio di sottofondo*]
22. R: «Chi vuole dire qualcosa sul 4? M. [B4]? »
23. [*Brusio di sottofondo*]
24. B4: «Il 4 c'entra qualcosa…»
25. B2: «L'avevo detto, però non mi ricordo più quello che avevo detto!»
26. B3: «C'entra con quello che abbiamo detto… che 4 no?!»
27. B5: «Ma il 4 che c'entra?»
28. B3: «6x4…»

29. B3: «Quindi…la seconda lettera che sta al secondo posto… si ripete per 4 volte»
30. R: «Cosa? Quale lettera? Non ho capito cos'hai detto. Quale lettera? »
31. B3: «La seconda lettera»

Durante la discussione gli alunni hanno iniziato ad intervenire a turno per spiegare il significato dei termini nell'espressione 6x4x5. Il ricercatore ha cercato, allora, di approfondire il ragionamento mostrando i due elaborati nella Figura 4.4.4, in cui compare l'espressione 2x3x4x5 (a destra) e l'espressione 6x4x5 (a sinistra), in modo da evidenziarne analogie e differenze.

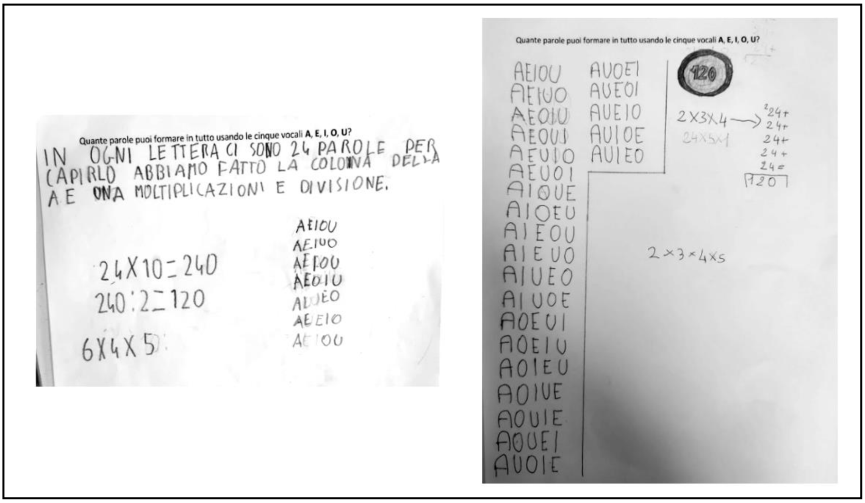


Figura 4.4.4. Svolgimento del problema sulle permutazioni di 5 vocali – Esempio 4

Come si può notare nello stralcio che segue, l'alunno B2 esprime il collegamento dell'espressione 2x3x4x5 con le attività svolte nei precedenti incontri (intervento 6) e indica che il "2x3" nell'espressione 2x3x4x5 equivalga al "6" dell'espressione 6x4x5 (interventi 9 e 11).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Intanto…quali sono le cose in comune che vedete tra 2x3x4x5 e 6x4x5?»
2. B1: «Il 5»
3. R: «Il 5»
4. B1: «Il 5 che sono 5 colonne e 5 lettere, il 4 che sono i numeri…le lettere secondarie»
5. R: «Al secondo posto. E invece poi cambia. Andrea ci spieghi un po' perché è 2x3x4x5?»
6. B2: «Perché io ho fatto un procedimento… che tutto ritorna a tutti gli altri esercizi dell'altra volta»
7. A: «È vero!»
8. R: «Dillo un po' meglio»
9. B2: «Praticamente… che il 2x3 era quando erano… 3 lettere e formavamo 6 parole, perciò questo 2x3 equivale alle 6 lettere di qua»
10. R: «Attenzione! Il 2x3 equivale alle 6 lettere di là. Quindi, aspetta: quel 6 stai dicendo che è 2x3, perché?»
11. B2: «Perché 2x3 era il procedimento dell'altra volta»

Gli alunni durante la discussione mostravano difficoltà nell'attribuire un significato ai termini 2 e 3 dell'espressione 2x3x4x5. Al fine di favorire la comprensione dell'espressione nella sua totalità, il ricercatore ha svolto alla lavagna insieme alla classe l'esempio riportato nella Figura 4.4.5. L'intenzione è quella di osservare contemporaneamente la disposizione delle lettere nelle permutazioni di 3 lettere e la disposizione delle lettere nelle permutazioni di 5 lettere, in modo da riconoscere l'identità della struttura alla base di entrambe e favorirne la generalizzazione.

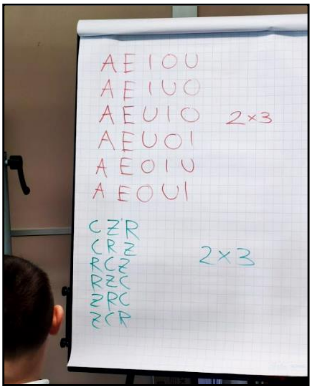


Figura 4.4.5. Esempio svolto alla lavagna per confrontare la struttura delle permutazioni semplici delle 5 vocali con quella delle permutazioni semplici di 3 lettere diverse.

Anche dopo lo svolgimento dei due esempi, gli alunni continuavano a non riconoscere in pieno le somiglianze strutturali, il che, come si è osservato nel capitolo 2 dell'elaborato, costituisce una delle maggiori difficoltà per gli studenti nell'affrontare problemi di calcolo combinatorio (p.70). I piccoli alunni, infatti, mettevano a confronto la struttura delle permutazioni delle tre lettere con quella delle prime tre lettere delle permutazioni di cinque lettere (Figura 4.4.5.), nonostante per tutta la durata della discussione vi avessero associato significati differenti.

Il ricercatore ha provato ad introdurre, allora, un ulteriore stimolo grafico per tentare che gli alunni si concentrassero su altre parti della struttura, cerchiando le vocali presenti nella terza posizione nel caso delle cinque vocali e quelle nella prima posizione nel caso delle tre lettere CZR, in modo da evidenziare la somiglianza tra le due strutture (Figura 4.4.6).

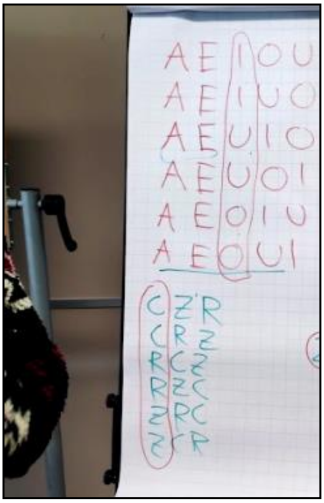


Figura 4.4.6. Esempio svolto alla lavagna per confrontare la struttura delle permutazioni semplici delle 5 vocali con quella delle permutazioni semplici di 3 lettere diverse, in cui vengono incrociate le posizioni su cui porre attenzione.

In base a quanto auspicato, gli alunni hanno allora individuato la somiglianza tra le due strutture (interventi 2, 4, 8, 12) :

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3

R: ricercatore

1. R: «Ora, c'entra qualcosa?»
2. A: «Sì!»
3. R: «Quindi, metto AE e non c'entra più niente…»
4. B1: «Così sono 6 e 6»
5. R: «C'entra o non c'entra così?»
6. B1: «Sono 3 e 3»
7. [Brusio di sottofondo]
8. B2: «È la stessa cosa»
9. R: «È la stessa cosa, devo soltanto cambiare le lettere, sono soltanto lettere diverse»
10. B2: «Sono solo lettere, perché nei gruppi sono 6»
11. R: «Però se faccio così [indica sopra AE], non c'entra più niente»
12. B1: «Hanno lo stesso numero, qui [sopra] 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e qui [sotto] 1, 2, 3, 4, 5 e 6»
13. R: «Quindi, qualunque cosa sono 6 c'entra? Pure 6 pennarelli c'entra con questa cosa»
14. B1: «Eh sì»
15. B3: «Secondo me ha avuto quel senso quello che ha detto F. [B1]»
16. R: «Cioè?»
17. B3: «Che questi sei corrispondono…diciamo…questi 6 corrispondono a questi qui»

Dopo che B1 suggerisce di osservare le due rappresentazioni nella Figura 4.4.6., non in riga, ma in colonna (intervento 1), i compagni (intervento 6) identificano che il numero 3 dell'espressione 2x3x4x5 vada associato alle lettere in terza posizione nel caso di n=5 vocali (I, O, U).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. B1: «Noi non dobbiamo guardare per riga, ma per colonna!»
2. B2: «A. [B1] ha ragione»
3. [*Brusio si sottofondo*]
4. R: «Quindi cos'è questo 3?»
5. B2: «Le parole»

6. B3: «Sono I, O e U»
7. B2: «Eh! »
8. R: «Lettere…in che posizione?»
9. B2: «In terzo posto»
10. R: «Lettere al…»
11. B2: «Terzo posto»

Per quanto riguarda il termine 2, in un primo momento (interventi 2, 6, 11) i bambini lo identificano con le due parole che si possono formare con la stessa lettera in terza posizione (nel caso delle 5 vocali), mentre un altro bambino suggerisce che faccia riferimento alle vocali in quarta e quinta posizione e al loro scambio (interventi 13, 16, 18).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Questo tre sono le lettere al terzo posto…e sto 2»
2. B1: «Sono quelle che con la lettera in prima posizione si ripetono per due volte»
3. R: «Cioè, fissata la lettera al terzo posto, tipo la I…metto la I al terzo posto, dopo cosa posso mettere?»
4. B1: «Puoi mettere o la U o la O»
5. R: «O la U o la O. Che cos'è sto 2?»
6. B1: «Il 2 sono queste lettere qua»
7. R: «Fissata la prima lettera, che sono 3, tipo la I prendiamo, al secondo posto che possiamo mettere?»
8. B1: «O o la U»
9. R: «Quindi, che cos'è sto due? »
10. B2: «Il 2 sono le due lettere che possono stare dopo la I»
11. B3: «Questo qua è 2 e 2 e 2 [indica le due parole in ogni gruppo che inizia con la stessa lettera in prima posizione»
12. […]
13. B4: «Il 2 sono le parole che si possono formare fissando la terra al primo posto!»
14. R: «Oh! Il 2 sono le parole che si possono formare fissando la terra al primo posto! Fissata la terza lettera, con ognuna fissata, possiamo farne due»

15. [Brusio di sottofondo]
16. B5: «Sono le lettere che si scambiano»
17. R: «Sono le lettere che si scambiano. Se io ho AB, quante parole posso formare?»
18. A: «Due»
19. R: «Due»

4.4.3. Variare la tipologia di oggetti

La seconda parte dell'incontro è stata dedicata alla variazione della tipologia di oggetto. Tutte le attività condotte fino a questo punto hanno avuto per oggetto le lettere e la variazione ha riguardato soltanto il numero delle lettere. Al fine di promuovere la generalizzazione, in base a quanto previsto dalla Metodologia della Ricerca Variata, c'è bisogno che gli alunni sperimentino una molteplicità di contesti simili, ma non identici, in cui individuare la stessa struttura. Introducendo la variazione della tipologia di oggetto, l'obiettivo è quello di favorire la generalizzazione mediante la costruzione di una famiglia di situazioni per cui applicare la struttura principale.

È stata presentata ai bambini la domanda costruita collettivamente nel primo incontro (par. 4.1.3.): «Quante parole si possono formare in tutto con 3 lettere diverse?», da cui partire per elaborare le variazioni oralmente. È proprio attraverso la variazione delle parti della domanda che, secondo quanto previsto dalla Teoria della Variazione (par. 1.2.3.), è possibile favorire l'individuazione da parte dei bambini di cos'è che varia e di ciò che resta invariato, in modo da ottenere una domanda simile, ma non identica. In questo modo ci si aspetta che gli alunni focalizzino l'attenzione sugli aspetti fondamentali che costituiscono i problemi di calcolo combinatorio osservati finora. Ogni volta che gli alunni individuavano una parte della domanda che fosse possibile variare, quella parte veniva evidenziata nella domanda di partenza.

L'attività collettiva è iniziata con il gioco dell' "E se?", in cui è stata coinvolta tutta la classe nel suo insieme. Di seguito vengono riportate le variazioni proposte dagli alunni durante l'attività:

- La prima variazione ha riguardato la sostituzione di "diverse" con "uguali". Gli alunni hanno riportato come esempi di tre lettere uguali "AAA" e "BBB". Alla richiesta del ricercatore di cercare un esempio di tre lettere in cui non ci siano solo lettere uguali, un bambino ha proposto "FAF".

- Nella seconda variazione "parole" è stato variato con "frasi" ed è stato proposto di sostituite "lettere" con "parole", formando la domanda «Quante *frasi* si possono formare in tutto con 3 *parole* diverse?». Sono state, allora, elencate le permutazioni di "CIAO – COME – STAI?", di cui viene riportata un'immagine di seguito (Figura 4.4.7):

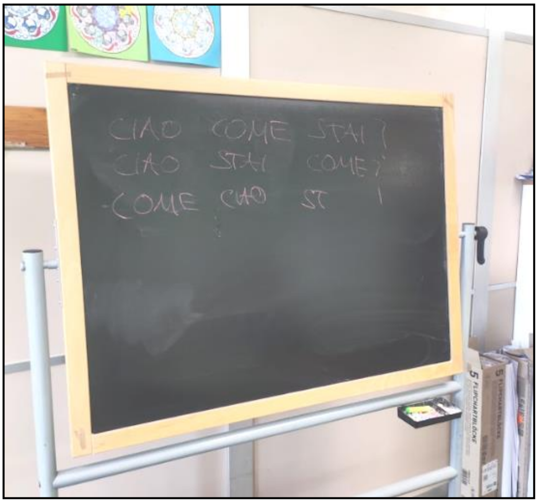


Figura 4.4.7. Variazione «Quante *frasi* si possono formare in tutto con 3 *parole* diverse?»

- In base a quanto ipotizzato in fase di progettazione, alcuni bambini hanno suggerito di sostituire "parole" con "numeri" e, dopo un momento di confusione dovuto alla differenza tra numeri e cifre, è stato sostituito "lettere" con "cifre", formando la domanda «Quanti *numeri* si possono formare in tutto con 3 *cifre* diverse?». Si tratta del primo esempio in cui è stata introdotta una nuova categoria rispetto a quella a cui possono essere ricondotte lettere, parole o frasi.

È stato proposto ai bambini di indossare tre numeri diversi per svolgere un gioco simile a quello di "Anagrammi I", svolto nel primo incontro (par. 4.1.2.). Vengono scelti tre bambini per indossare 3 numeri diversi e un bambino che avrebbe dovuto riportare i numeri alla lavagna (Figura 4.4.8.).

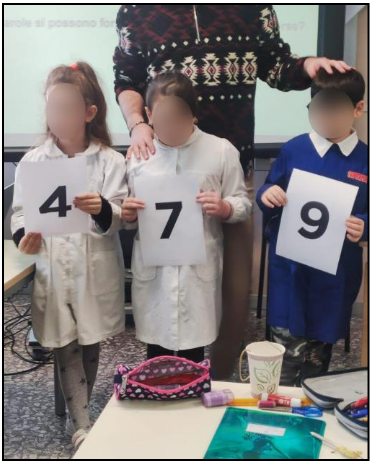


Figura 4.4.8. Gioco svolto insieme agli alunni, i quali hanno indossato tre cifre per formare concretamente le permutazioni semplici.

Una volta individuate le 6 permutazioni dei 3 numeri, è stato chiesto agli alunni di discriminare i numeri pari e dispari. Il gioco viene riproposto con i numeri 0, 1, 6, in modo da poter ragionare anche sulla posizione dello 0. Viene riportato uno stralcio per mettere in evidenza la vivacità con cui viene svolta l'attività:

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
B5: bambino/a 5
B6: bambino/a 6
B7: bambino/a 7
B8: bambino/a 8
R: ricercatore

1. R: «Cominciamo…106»
2. B1: «160»
3. B2: «610»
4. B3: «601»
5. B1: «61»
6. R: «Dicono 61…come si fa a fare 61? »

7. B4: «Con lo 0 davanti e il 6 al centro»
8. R: «Samuel sta dicendo che lo 0 si mette davanti, ma quindi se lo 0 sta davanti si legge o no? »
9. B2: «61»
10. B5: «061»
11. B6: «Lo 0 davanti non si legge»
12. R: «Cioè, 061 è come dire 61? »
13. A: «Sì»
14. R: «E dire 610 è la stessa cosa che dire 61?»
15. A: «No!»
16. R: «Quindi perché cambia?»
17. B7: «Se lo 0 sta all'inizio non ce ne frega niente!»
18. R: «Ma qua, per tenerne conto, ce lo scriviamo lo 0 o no?»
19. A: «Sì»
20. R: «E l'ultimo numero?»
21. B1: «016»
22. R: «Allora…qual è il numero più grande?»
23. B3: «610»
24. R: «Tutti d'accordo?»
25. A: «Sì»
26. R: «Secondo me è 601»
27. A: «No!»
28. R: «Perché?»
29. B6: «Perché in 610 l'1 è alle decine»
30. R: «Mh. E il più piccolo?»
31. A: «16!»
32. R: «Quanti dei numeri che avete scritto sono pari?»
33. B8: «Quattro!»
34. R: «Quali?»
35. B6: «106, 160, 610 e 16»

Gli alunni, subito dopo il confronto appena riportato, hanno elaborato una variazione del numero delle cifre, proponendo di utilizzare 4 cifre (1, 2, 3, 4). Gli alunni hanno elencato in maniera ordinata tutte le permutazioni semplici delle 4 cifre, le quali vengono scritte alla lavagna dal ricercatore, secondo quanto riportato nella Figura 4.4.9.

Figura 4.4.9. Elenco delle 24 permutazioni semplici che si possono formare a partire da 4 cifre (*n*=4)

4.4.4. Riflessioni sull'incontro

La discussione collettiva avvenuta nel quarto incontro ha permesso agli alunni di ragionare sul significato delle attività svolte durante tutti gli incontri e, soprattutto, di porre l'attenzione sugli aspetti ritenuti fondamenti all'interno della Metodologia della Ricerca Variata. I bambini, infatti, hanno posto attenzione sull'importanza del modo di rappresentare gli elenchi delle parole, in quanto modalità che permette di esplicitare la struttura della relazione tra numero degli oggetti e numero totale dei possibili casi. È attraverso la rappresentazione ordinata dei casi, infatti, che gli alunni sono riusciti ad attribuire significato a ciascun termine dell'espressione 2x3x4x5, esplicativa del processo per costruire le permutazioni delle 5 vocali. La difficoltà più grande è stata riscontrata nella spiegazione del "2x3" dell'espressione e, nello specifico, nel ricollegarla all'espressione utilizzata per rappresentare le 6 permutazioni delle tre lettere realizzata già a partire dal primo incontro. Tale difficoltà è riconducibile al tipo di ostacolo che spesso, come descritto nel capitolo 2 (pag. 70), incontrano gli studenti nell'affrontare i problemi di calcolo combinatorio e, cioè, quella di ricondurre alla stessa struttura problemi molto simili. I ricercatori sono riusciti a superare l'impasse, ricorrendo al confronto diretto tra le permutazioni di cinque lettere e quelle di 3 lettere (Figura 4.4.9.), evidenziando le colonne su cui far concentrare l'attenzione degli alunni.

Per quanto riguarda la variazione, gli alunni, mediante il gioco dell' "E se?", hanno individuato nuove variazioni della tipologia di oggetto, introducendo anche la categoria dei numeri. In questo modo è stato possibile realizzare nuovamente il gioco di *emobied cognition*, in cui gli alunni hanno indossato le cifre con cui comporre i numeri. L'attività con i numeri ha consentito anche di mostrare che, mediante le attività di calcolo combinatorio, è possibile lavorare anche su più argomenti di matematica come, ad esempio, è avvenuto per i numeri pari e dispari o per il valore posizionale dello zero, ma potrebbe riguardare anche i criteri di divisibilità o altri argomenti di matematica in base anche alla creatività e alla necessità dell'insegnante di matematica.

4.5. Incontro 5 – *Si va in scena!* – Parte 1

Generalizzare: dalle permutazioni semplici alle disposizioni semplici

Dopo il lavoro condotto con le permutazioni semplici nei primi quattro incontri insieme alla possibilità data agli alunni di sperimentarne, mediante le variazioni, la struttura in diversi contesti, negli incontri successivi verranno presentate nuove situazioni che includano le disposizioni semplici (par. 2.2.1.2.). Lo scopo è quello di favorire la generalizzazione, intesa in termini di ciclo virtuoso (par. 1.2.4.4.), come estensione dell'insieme di situazioni a cui poter ricondurre una certa classe formale di strutture apprese. In termini operativi, l'ipotesi è proprio quella di mostrare contesti in cui, a partire da *n* elementi, se ne possa considerare la totalità o anche soltanto una parte ($k \leq n$), in modo che gli alunni non si facciano l'idea di permutazioni e disposizioni semplici come quella di due categorie nettamente distinte, ma come declinazioni della medesima classe formale.

A tale scopo viene presentato un problema in cui bisogna assegnare i ruoli di regista, sceneggiatore e costumista ($k=3$) a cinque bambini ($n=5$), chiedendo di individuare il numero totale dei modi diversi in cui si può scegliere.

4.5.1. Descrizione generale dell'incontro

Per introdurre il problema, i ricercatori hanno organizzato il "gioco dell'impiccato" (Figura 4.5.1., a sinistra), perché gli alunni scoprano le parole corrispondenti ai due ruoli di regista e sceneggiatore, mentre il ruolo di costumista viene introdotto con un anagramma (Figura 4.5.1., a destra).

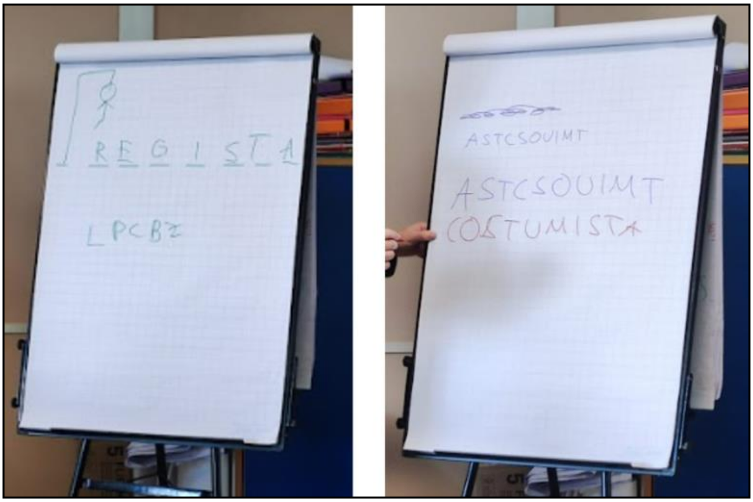


Figura 4.5.1. Gioco dell'impiccato (a sinistra) e anagramma (a destra) per introdurre i personaggi del problema "Si va in scena!"

Dopo aver individuato le tre parole corrispondenti ai tre ruoli di regista, sceneggiatore e costumista, gli alunni sono stati divisi in coppie per rispondere al problema su cui è centrato l'incontro. Il testo del problema è il seguente:

Andrea, Bruno, Carla, Daniela e Ettore sono 5 amici che vogliono mettere in scena uno spettacolo.
Prima di dar inizio alle prove, devono scegliere fra di loro un ***regista***, uno ***sceneggiatore*** e un ***costumista***.
In quanti modi diversi possono farlo?
Rappresenta matematicamente il ragionamento che hai fatto per rispondere alla domanda.

Al termine del lavoro in coppie, i ricercatori hanno ritirato gli elaborati e, in base ad essi, hanno realizzato il panel in cui sono state raggruppate le risposte in base al tipo di rappresentazione utilizzata per risolvere il problema. Il panel è stato utilizzato come stimolo per la discussione collettiva successiva. In fase di discussione, sono stati scelti cinque alunni per rappresentare i cinque bambini del problema e a ciascuno di loro è stata assegnata una lettera in base al nome del bambino che stavano rappresentando (A per Andrea, B per Bruno, C per Carla, D per Daniela ed E per Ettore). Sono stati poi forniti un capello, una sciarpa e un paio di occhiali (ad indicare il ruolo di regista, sceneggiatore e costumista), i quali di volta in volta sarebbero stati assegnati in base alla disposizioni elencate dalla classe. Alla luce degli aspetti evidenziati durante la fase di discussione collettiva, è stato chiesto nuovamente ai bambini di svolgere in coppie il problema e, al termine dell'attività, gli elaborati sono stati raccolti dai ricercatori.

4.5.2. *Attività di problem solving in coppie*

Durante lo svolgimento dell'attività di problem solving in coppie, i bambini hanno richiesto spesso l'aiuto degli adulti presenti in classe (ricercatori e insegnanti), il che ha fatto pensare che stessero incontrando difficoltà nella risoluzione. Nel momento della raccolta degli elaborati, si è osservato che nessun bambino avesse individuato la risposta "corretta", ma in ogni modo tutte le coppie avevano elaborato rappresentazioni che, dopo un'attenta riflessione che mettesse a fuoco le loro modalità di utilizzo per ottenere vantaggi operativi, potessero renderle estremamente utili per risolvere adeguatamente il problema.

4.5.3. *Discussione collettiva*

Dato che i bambini avevano individuato degli strumenti, come le tabelle, che potessero essere utili per un adeguato processo di risoluzione del problema, i ricercatori hanno utilizzato il momento della discussione per focalizzare l'attenzione sugli aspetti del problema che ne potessero consentire la comprensione. Prima di tutto, si è cercato di portare l'attenzione degli alunni sulle tabelle che hanno realizzato per individuarne gli elementi che non le hanno rese utili alla risoluzione del problema. Sono stati, dunque, mostrati due elaborati simili (Figura 4.5.2.), in cui entrambe le coppie avevano utilizzato le tabelle come strumento di rappresentazione, giungendo allo stesso risultato ($D_{5,3}$ =15). Nell'elaborato a sinistra, i due autori hanno provato a formulare due espressioni e ad assegnare un significato ad ogni termine, mostrando di aver compreso l'importanza di chiarire i termini delle espressioni prodotte per mettere in luce il processo. Nell'elaborato di destra, i bambini hanno realizzato due tabelle, la prima (la più grande) presentava i nomi dei cinque bambini del problema sulle righe e i tre ruoli da assegnare loro sulle colonne. Le tabelle di entrambi gli elaborati sono state completate dai bambini con dei segni, nella tabella di sinistra sono presenti dei puntini, mentre il quella di destra delle spunte. Inoltre, nell'elaborato a destra della Figura 4.5.2., i bambini hanno realizzato un ulteriore tabella in cui sono state scambiate le righe con le colonne, inserendo in ogni casella un numero 1, per arrivare ad un totale di 15.

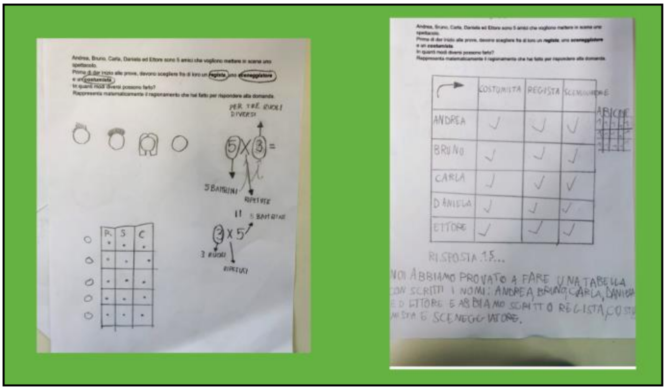


Figura 4.5.2. Risoluzione del problema "Si va in scena!" – Esempio 1

In fase di discussione la classe ha riconosciuto le analogie tra i due elaborati che sono state appena descritti. Nello stralcio riportato di seguito, uno degli autori della tabella di destra (B2) spiega di aver utilizzato le spunte per indicare l'assegnazione dei ruoli (intervento 2), ma il compagno B3 (intervento 3) riconosce subito che c'è qualcosa di poco chiaro nell'uso di entrambe le tabelle (tabelle dell'elaborato a destra della Figura 4.5.2.). Gli alunni sembrano riconoscere l'utilità dell'utilizzare la tabella (interventi 12, 14, 16, 18), ma si rendono conto che nell'utilizzo che ne hanno i compagni negli elaborati della Figura 4.5.2. ci sia qualcosa di poco esplicativo (intervento 14).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3

B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «Chi l'ha fatto quello a destra? Perché avete fatto quelle "V" che sarebbero degli "ok"?»
2. B2: «Andrea fa il regista e pure Andrea può fare lo sceneggiatore… poi pure Bruno poteva fare il costumista e pure Bruno il regista e pure Bruno lo sceneggiatore»
3. B3: «Posso dire una cosa? Vorrei dire soltanto due cose… secondo me la tabella l'hanno fatta un po' male…»
4. A.: «No…»
5. B3: «L'hanno fatta male perché…»
6. A: «No…»
7. R: «Facciamogli dire perché»
8. B3 (indicando la risposta a sinistra): «Questa cosa…A, B, C che cos'è?»
9. B4: «È la stessa cosa…però solo con i numeri»
10. B2: «Volevamo dire la stessa cosa di questo…però con pochi numeri. Qui avevamo messo le iniziali di questi nomi e abbiamo scritto che Andrea poteva fare il costumista, il regista, lo sceneggiatore qui, una volta…»
11. B1: «E lo stesso quegli altri»
12. B2: «Noi abbiamo provato a fare una tabella che c'erano scritti i nomi e abbiamo scritto i nomi e i ruoli e abbiamo messo che Andrea poteva fare il costumista, il regista e lo sceneggiatore…»
13. R: «Qualcuno vuole commentare?»
14. B1: «Diciamo che va bene… però non si capisce cosa vogliono dire»
15. R: «Spiega un po' di più…»
16. B1: «Cioè, che lo schema è tutto giusto, però non si capisce cosa vogliono dire»
17. R: «Cioè? Che cos'è secondo te che vogliono dire, ma che non stanno dicendo?»
18. B1: «Cioè…non si capisce…»
19. R: «Cioè, tu non riesci a capire guardando la tabella?»
20. B1: «Eh…»

È stata poi mostrata l'immagine seguente (Figura 4.5.3.), in cui anche in questo caso, i bambini avevano realizzato una tabella in cui erano presenti cifre da 1 a 3, le quali si ripetevano per ogni riga; inoltre, all'esterno, in corrispondenza di ogni riga è stato riportato quello che sembrerebbe essere un totale.

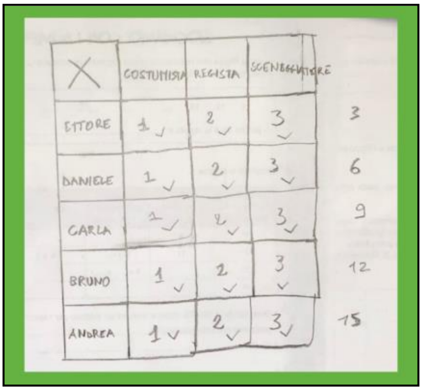


Figura 4.5.3. Risoluzione del problema "Si va in scena!" – Esempio 2

Nello stralcio successivo, viene chiesto agli autori di spiegare la loro risposta. Uno dei due autori (B1) collega il problema con un alto svolto in passato insieme all'insegnante di matematica (intervento 1), facendo intuire comunque il riconoscimento di analogie con attività simili. La spiegazione fornita dai bambini (interventi 3, 5, 7, 9) fa intuire che abbiano usato cifre diverse per esprime lo stesso concetto degli autori degli elaborati nella Figura 4.5.2.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «Noi abbiamo provato a fare questa tabella perché ci era venuta questa idea, perché una volta avevamo fatto un problema con la maestra e avevamo visto questa tabella…»
2. R: «Ho capito… tu [B2], volevi dire?»
3. B2: «Quello che aveva detto G.…1, 2, 3 significano i modi che possono fare?»
4. R: «Cioè, perché 3 e non 1?»
5. B2: «Perché ci stanno 3 modi in cui si può fare»
6. R: «Cioè, prendiamo Ettore che è il primo, in un caso può fare il costumista, nel secondo il regista e nel terzo lo sceneggiatore?»
7. B2: «Tutti e tre lo possono fare»

8. R: «ok, perfetto»
9. B1: «A noi ci ha aiutato fare 1, 2 e 3 perché, intanto, si capiva e poi avevamo fatto anche l'ok – là che cos'è – e perché a me ha aiutato fare 3, 6, 9, 12 e 15»
10. R: «Va benissimo, ho capito»

Dopo aver riflettuto sulle tabelle e aver compreso la loro poca rappresentatività nel contesto del problema, gli alunni, nello stralcio riportato di seguito, elaborano un pensiero condiviso riguardo al fatto che nessun bambino possa svolgere entrambi i ruoli contemporaneamente (intervento 1) e che lo stesso ruolo non possa essere svolto da più di un bambino contemporaneamente (interventi 4, 6, 7). Tale intuizione potrebbe indicare che stanno intuendo la relazione $k<n$ e, infatti, ne arriva la conferma grazie all'intervento di B2, il quale esplicita chiaramente che il numero dei ruoli sia inferiore al numero dei bambini (intervento 8).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R1: «Posso fare una domanda? Voi adesso, in tutti e tre gli esempi che abbiamo visto in cui avete espresso i vostri ragionamenti, tutti avete detto questa cosa, o con il linguaggio matematico o con la tabella, che ciascuno dei bambini può fare o il costumista o il regista o lo sceneggiatore, giusto?»
2. A: «Sì»
3. R2: «Questo è perfetto, perché innanzi tutto questo è importante: chiunque può fare qualunque cosa. L'altra cosa importante – e questa qua ve la devo sottolineare – può essere che ci sono due registi nello stesso gruppo?»
4. A: «No»
5. R2: "Cioè, se nello stesso gruppo dico che Andrea fa il regista, nello stesso gruppo può fare anche lo sceneggiatore?»
6. A: «No!»
7. B1: «No, perché c'è scritto uno sceneggiatore, un regista e un costumista"
8. B2: «Io adesso ho pensato che i ruoli sono tre, sceneggiatore, costumista e regista, però i bambini sono cinque!»

9. R2: «Sì…»

Si è passato a mostrare gli elaborati (Figura 4.5.4.) di due coppie che hanno iniziato a costruire una tabella che sarebbe potuta essere effettivamente utile a risolvere il problema, qualora al posto dei bambini, avessero inserito i ruoli da assegnare. Nell'elaborato a sinistra della Figura 4.5.4., i bambini hanno riportato una sola disposizione, assegnando ciascun ruolo ad un bambino soltanto; mentre, nell'elaborato a destra lo stesso ruolo è stato assegnato a più di un bambino e le assegnazioni sembrano piuttosto arbitrarie.

Va comunque sottolineato che, in entrambi gli elaborati è presente il tipo di simbolizzazione di cui si è discusso nel paragrafo 2.3.2.2., in cui i bambini utilizzano l'iniziale del nome di un certo elemento per simbolizzarlo (p.55).

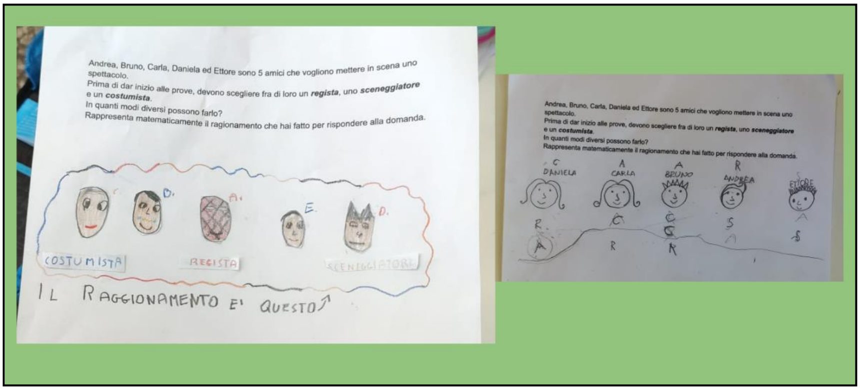


Figura 4.5.4. Risoluzione del problema "Si va in scena!" – Esempio 3

Successivamente, è stato mostrato l'esempio successivo (Figura 4.5.5.) in quanto, anche in questo caso, la tabella è stata impostata inserendo i nomi dei bambini nelle colonne; inoltre, viene posta attenzione sul fatto che, per compilare la tabella, siano stati utilizzati i ruoli, anche se, nel caso considerato, lo stesso ruolo è stato assegnato a più di un bambino.

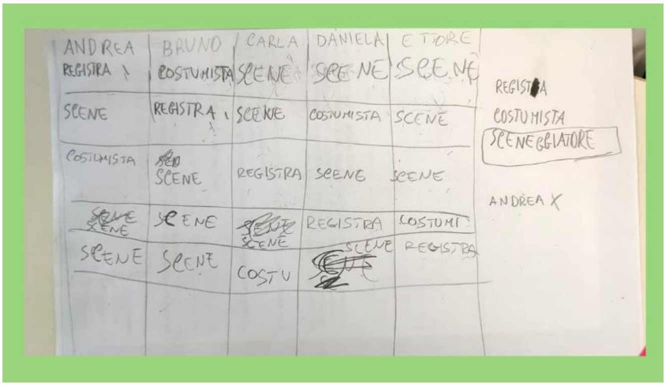


Figura 4.5.5. Risoluzione del problema “Si va in scena!” – Esempio 4

Dopo aver riflettuto sugli aspetti fondamentali del problema e, cioè, sul fatto che i ruoli siano in numero inferiore rispetto al numero dei bambini e che ciascun ruolo non può essere assegnato a più di un bambino soltanto e, dopo aver individuato come possa essere utilizzata la tabella per risolvere il problema, è stato ritenuto utile proporre ai bambini un’attività ludica di *embodied cognition*, progettata prima dell’incontro, in modo che la classe possa sperimentare concretamente il problema, descritta nel paragrafo successivo.

4.5.4. *Si va in scena!*

Per lo svolgimento del gioco, i ricercatori hanno chiamato cinque bambini, i quali avrebbero dovuto rappresentare i cinque bambini del problema. A ciascuno è stata assegnata una lettera che corrisponde all’iniziale del nome del bambino (A per Andrea, B per Bruno, C per Carla, D per Daniela e E per Ettore). Sono stati poi forniti tre oggetti: un cappello, una sciarpa e un paio di occhiali che serviranno per indicare, rispettivamente, il regista, lo sceneggiatore e il costumista. Per iniziare l’attività gli alunni scelgono un primo modo di assegnare i ruoli, assegnando il ruolo di regista a B, il ruolo di sceneggiatore ad A e il ruolo di costumista a D (Figura 4.5.6.)

Figura 4.5.6. Gioco di *embodied cognition* per ragionare sul problema "Si va in scena!"

Gli alunni si sono divertiti molto ad assegnare i ruoli e, dopo aver individuato diverse disposizioni, è stato mostrato loro un ultimo elaborato, prodotto durante il lavoro in coppie (Figura 4.5.7.). Nell'elaborato si osserva che gli autori, nonostante non abbiano individuato tutte le possibili disposizioni semplici, abbiano comunque sviluppato un ragionamento che gli abbia permesso di assegnare un ruolo ad un singolo bambino e di mantenerlo "fissato" il più possibile, assegnando gli altri due ruoli in maniera ordinata agli altri bambini

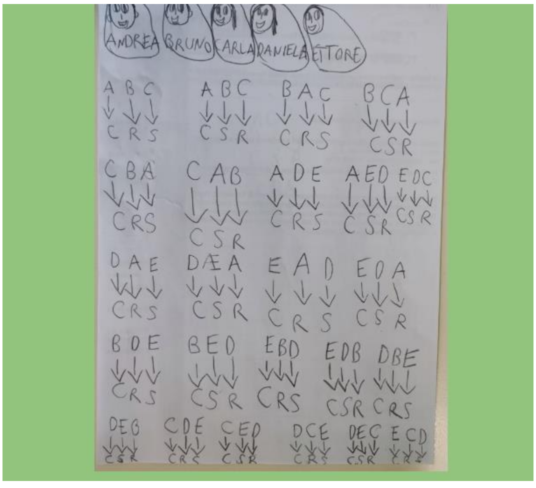


Figura 4.5.7. Risoluzione del problema "Si va in scena!" – Esempio 5

Nello stralcio di seguito riportato, uno dei due autori spiega il proprio ragionamento (intervento 6). L'attenzione viene posta al fatto che ci sia una discrepanza con i risultati precedenti (intervento 8), che un alunno (B2) imputa anche alla possibilità di aver ragionato in maniera differente.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R: «Che ne pensate? A. B1] spiegaci un po' quello che avete fatto…»
2. B1: «Che abbiamo provato a fare i primi tre e vengono sei modi diversi»
3. R: «Spiegalo un po' meglio»
4. B1: «Abbiamo fatto i primi tre: Andrea, Bruno e Carla e li abbiamo combinati in modi diversi…e sono sei»
5. R: «Che vuol dire in modi diversi?»
6. B1: «Che Andrea era il costumista, Bruno il regista e Carla la sceneggiatrice, poi abbiamo tenuto sempre Andrea come costumista e abbiamo scambiato gli altri due e la stessa cosa abbiamo fatto con gli altri…però ce ne rimanevano due e, quindi, abbiamo fatto Andrea con gli altri due, Daniela e Ettore. Poi Bruno con Daniela e Ettore e poi Carla con Daniela e Ettore»
7. R: «Quindi, se ne prendo…»
8. B1: «E sono 24 non 15…»
9. R: «Perché sono 24? Cercate di spiegarlo…io dico che sono più di 15 e che vi siete sbagliati tutti quanti a dire 15. Loro [Ambra e David] stanno dicendo che avete sbagliato tutti a dire 15 e che sono molti di più. Perché?»
10. B2: «Io ho capito perché, forse. Perché noi non abbiamo ancora finito il compito…forse alcuni l'hanno finito e hanno ragionato in modo diverso»

La comprensione della classe sembra essere migliorata e l'alunno B1, il quale era apparso molto preoccupato durante tutta la discussione per via della sua mancata comprensione del problema, lo conferma all'intervento 4 dello stralcio successivo. Il bambino B3 (intervento 8) parla, anche se in maniera impropria, di "combinare", come ad indicare che, anche se a livello implicito, stiano emergendo dei collegamenti con l'argomento trattato nei precedenti incontri. L'attenzione si sposta sul fatto che, assegnando i ruoli a gli stessi tre bambini, ci siano 6 modi in cui poterli assegnare, aspetto che il ricercatore prova a mettere in evidenza (intervento 9) e che viene ribadito dal bambino B2 (interventi 11, 13). Si inizia a ragionare sul numero di assegnazioni dei ruoli considerando 3 bambini diversi per volta.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R1: «Chi prima ha detto che non capiva dalla tabella, ora riesce a capire meglio? A. [B1], mi sembra che tu abbia detto questa cosa, da qui capiresti un po' di più?»
2. B1: «Sì»
3. R2: «Perché?»
4. B1: «Beh…si capisce di più perché lo dice meglio…»
5. R2: «Loro hanno detto: prendiamo Andrea, Bruno e Carla e vediamo in quanti modi diversi possono fare le cose, possono fare costumista, regista e sceneggiatore oppure possono fare costumista, sceneggiatore e regista…»
6. B2: «Abbiamo tenuto la A e abbiamo fatto gli altri due»
7. R2: «Si riesce a capire?»
8. B3: «Sì, hanno preso Andrea, Bruno e Carla e li hanno combinati in tutti i modi possibili.»
9. R2: «Sono arrivati qua e ne hanno presi solo sei, poi hanno detto: "Va beh, con Bruno e Carla abbiamo finito, che dobbiamo fare ora? Andrea, Daniela e Ettore e ne hanno fatti… quanti sono Andrea, Daniela e Ettore?»
10. B2: «Sempre sei»
11. R2: «Poi cosa avete fatto?»
12. B2: «Poi Bruno, Daniela e Ettore e erano sempre sei e poi Carla, Daniela e Ettore che erano sempre sei…»

4.5.5. Riflessioni sull'incontro

Nel quinto incontro si è cercato di realizzare un passo in più in termini di generalizzazione, introducendo un problema sulle disposizioni semplici, in modo che gli alunni possano farsi un'idea di permutazioni e disposizioni come strutture simili all'interno della stessa classe formale. L'ipotesi è stata proprio quella di variare contesti in cui, a partire da n elementi, se ne potesse considerare la totalità, così come avvenuto nelle attività che hanno avuto per oggetto le permutazioni, o anche soltanto una parte, come si è scelto di fare proponendo problemi sulle disposizioni semplici. Durante la scelta dell'attività da proporre, il problema del regista, sceneggiatore e costumista è sembrato sufficientemente significativo e costruito in maniera tale da poter elicitare determinate riflessioni da parte degli alunni. Già durante l'attività in coppie, gli alunni hanno mostrato difficoltà nella risoluzione del problema, probabilmente pensando che si trattasse di un argomento diverso rispetto a quelli precedentemente incontrati lungo il percorso. Gli elaborati hanno permesso di osservare che nessuno ha individuato le 60 disposizioni semplici del problema, provando però ad utilizzare degli strumenti di rappresentazione, come le tabelle, che gli aiutassero ad enumerare tutti i modi possibili di assegnazione dei ruoli. Alcuni bambini (Figura 4.5.5 e 4.5.6.) hanno impostato una tabella che sarebbe potuta essere utile all'individuazione delle disposizioni, ma c'è stato solo un tentativo di impostare l'assegnazione dei ruoli, senza però andare avanti con la compilazione, mentre solo in un caso (Figura 4.5.7.), i bambini hanno improntato un ragionamento adeguato, tenendo fissa l'assegnazione di un ruolo e variando quella degli altri due tra gli altri due bambini, presi a coppie. L'idea dei due autori, infatti, pur andando nella giusta direzione, non sono riusciti ad individuare una strategia di conteggio adeguata per contare tutte le possibili terne: avrebbero dovuto infatti tenere fissi tre bambini e variare i ruoli tra di essi. In ogni modo, la discussione sull'elaborato ha permesso di portare l'attenzione sul fatto che per ogni terna di bambini ci siano 6 modi per assegnare i ruoli, il che ha fornito alla classe degli spunti di riflessione e un input per favorire una prima generalizzazione. La discussione e il gioco di embodied cognition hanno permesso ai bambini di riflettere sugli aspetti principali del problema, favorendo la possibilità di riproporre l'attività alla classe per osservare se possa esserci un miglioramento nella loro comprensione.

In un momento successivo, i ricercatori hanno riflettuto su quanto emerso durante l'incontro, per progettare il successivo in modo tale da favorire prima di tutto che gli alunni individuino una rappresentazione che consenta loro di individuare tutte le possibili terne per assegnare i tre ruoli ai cinque bambini, come si potrà osservare nel dettaglio nel paragrafo successivo.

4.6. Incontro 6 – *Si va in scena!* – Parte 2 e *La piccola squadra di calcio*

Variazione della tipologia di elementi e del numero di elementi della classe k.

Nel sesto incontro si è cercato di mettere in evidenza, attraverso gli strumenti di rappresentazione, la struttura della relazione tra numero degli oggetti disponibili, numero degli elementi della classe considerata e numero totale delle possibili disposizioni. L'obiettivo è quello di portare all'attenzione degli alunni la somiglianza tra la struttura delle disposizioni e quella delle permutazioni perché possano ricondurle alla medesima classe di sistemi formali.

4.6.1. Descrizione generale dell'incontro

L'analisi degli elaborati che gli alunni hanno prodotto per risolvere una seconda volta il problema "Si va in scena!" dopo la discussione collettiva dell'incontro precedente (par. 4.5.3.), ha mostrato che, nonostante alcuni bambini siano arrivati a contare le 60 disposizioni possibili di 5 oggetti di classe 3 (5 bambini, 3 ruoli), le modalità di rappresentazione e le strategie di enumerazione non sono state sviluppate in modo da ottenere un elenco ordinato dei casi. A titolo esplicativo vengono riportati alcuni esempi nella Figura 4.6.1.:

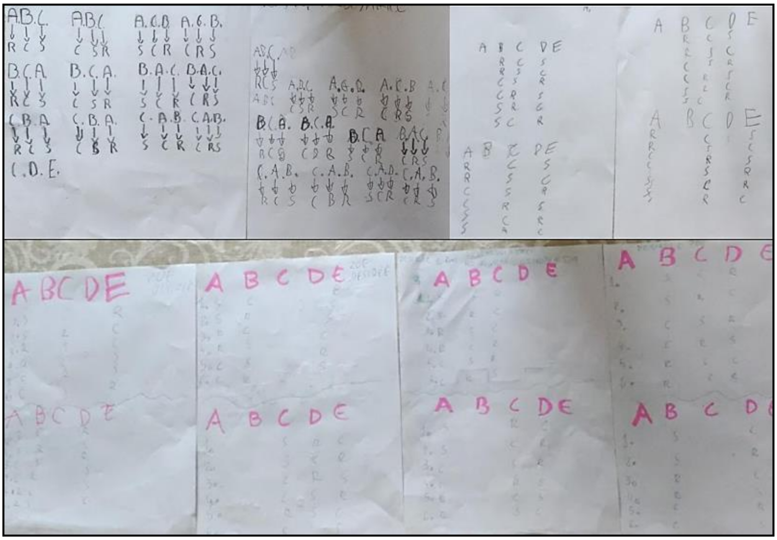
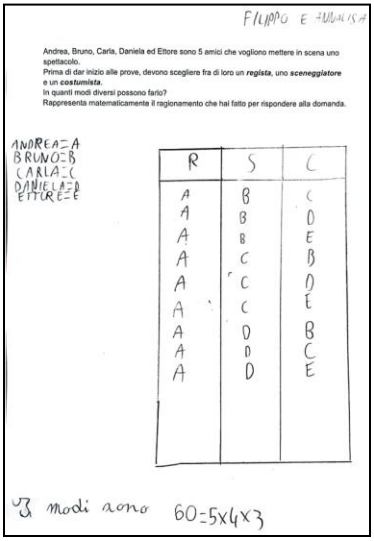


Figura 4.6.1. Alcuni elaborati tra i secondi tentativi di risoluzione del problema "Si va in scena!"

Nella seconda risoluzione, sembrerebbe che gli alunni abbiano scelto di risolvere il problema basandosi sulle rappresentazioni analizzate durante la discussione, con cui pensavano di riuscire ad elencare tutti i modi possibili di assegnare i ruoli. Nonostante alcuni alunni siano riusciti ad individuare le 60 disposizioni, va ricordato che l'interesse del presente percorso è rivolto al processo con cui si giunge ad un certo risultato e, soprattutto, alla luce di quanto previsto dalla Metodologia della Ricerca Variata, al fatto che gli alunni individuino modalità di rappresentazioni tali che consentano loro di individuare la struttura della relazione tra numero degli oggetti, numero degli elementi della classe e numero totale delle possibili disposizioni. Allo stesso tempo, c'è bisogno che gli alunni elaborino espressioni che consentano di esplicitare i loro processi di ragionamento e di risoluzione del problema. Nel progettare l'incontro si è, dunque, riflettuto su quale potesse essere la soluzione migliore per consentire ai bambini di costruire adeguatamente le terne di assegnazione dei ruoli e di elencare le disposizioni in base ad una strategia ordinata, come è avvenuto nel caso delle permutazioni. Condividendo l'importanza che la Metodologia della Ricerca Variata riconosce all'autonomia degli studenti nella costruzione della propria conoscenza (par. 1.2.4.), si è riflettuto a lungo sul tipo di stimolo da fornire agli studenti per non ostacolarne il percorso attivo di apprendimento. A tale riflessione si è legata quella inerente lo scopo ultimo del problema "Si va in scena!", cioè quello che gli alunni comprendessero, seppur a un livello implicito, che permutazioni e disposizioni semplici siano strutture inerenti alla stessa classe formale. Si è scelto, dunque, di mostrare agli alunni una tabella parziale (Figura 4.6.2.), in cui fosse elencata, in maniera ordinata, solo una parte delle disposizioni ottenute assegnando il ruolo di regista a uno dei cinque bambini del problema (A = Andrea). È stata fornita anche un'espressione che facesse riferimento non alla tabella parziale, ma al processo generale di risoluzione del problema. I due strumenti di rappresentazione sono stati mostrati ai bambini utilizzando uno "stratagemma": è stato detto loro che avrebbero visto come una coppia di bambini, Filippo e Annalisa (personaggi nati dalla fantasia dei ricercatori), appartenenti ad un'altra classe, avesse risolto il problema, invitandoli a una discussione sul tipo di ragionamento elaborato dai bambini per trovare la soluzione (Figura 4.6.2.).


FILIPPO E ANNALISA

Andrea, Bruno, Carla, Daniela ed Ettore sono 5 amici che vogliono mettere in scena uno spettacolo.
Prima di dar inizio alle prove, devono scegliere fra di loro un ***regista***, uno ***sceneggiatore*** e un ***costumista***.
In quanti modi diversi possono farlo?
Rappresenta matematicamente il ragionamento che hai fatto per rispondere alla domanda.

ANDREA=A
BRUNO=B
CARLA=C
DANIELA=D
ETTORE=E

R	S	C
A	B	C
A	B	D
A	B	E
A	C	B
A	C	D
A	C	E
A	D	B
A	D	C
A	D	E

I modi sono 60=5x4x3

Figura 4.6.2. Tabella parziale in cui viene mostrata solo una parte delle disposizioni del problema "Si va in scena!"

Dopo la discussione volta alla comprensione della struttura della tabella, ai bambini è stato chiesto di svolgere nuovamente il problema in coppie e, una volta terminata l'attività, di spiegare a uno dei ricercatori il ragionamento elaborato per risolvere il problema.

Nell'ultima parte dell'incontro, viene proposto di risolvere collettivamente un nuovo problema, generato dalla variazione del problema

"Si va in scena!" eseguita spontaneamente da tre alunni della classe, che lo avevano già svolto mentre i compagni stavano terminando la risoluzione del problema "Si va in scena!". Gli alunni, come si può notare leggendo il testo del problema riportato di seguito, hanno eseguito una variazione in cui il numero dei ruoli (k) risulti uguale al numero dei bambini (n).

4 amici, Luca, Irene, Alma e Matteo, vogliono formare una piccola squadra di calcio.
Devono scegliere l'ATTACCANTE, il CENTROCAMPISTA, il DIFENSORE e il PORTIERE.
In quanti modi possibili possono farlo?

Tale variazione spontanea è stata utilizzata con lo scopo di porre l'attenzione dei bambini sull'identità tra la struttura delle permutazioni e delle disposizioni semplici nel caso in cui k=n.

4.6.2. La tabella di Filippo e Annalisa

È stato mostrato ai bambini il testo presente nella Figura 4.6.2. ed è stato detto loro che si tratta della risoluzione elaborata da una coppia di bambini di un'altra classe che hanno svolto il loro stesso problema. Quando è stato chiesto loro di capire in che modo avessero ragionato Filippo e Annalisa, gli autori fittizi dello "stratagemma", in un primo momento, come riportato nello stralcio seguente, l'attenzione è stata focalizzata sulla simbolizzazione, quindi nell'associare alle lettere A, B, C, D, E i nomi dei cinque bambini del problema interventi 1, 2, 3). Dopodiché, gli alunni iniziano a formulare ipotesi sulla costruzione della tabella: una bambina (B1) riconosce che nella prima colonna (R=regista) il ruolo sia stato assegnato ad Andrea (intervento 4) e che le altre due colonne riguardino l'assegnazione del ruolo di sceneggiatore (S) e di costumista (C) (intervento 4). Il ricercatore (intervento 5) chiede allora come sia possibile individuare nella tabella il singolo modo in cui sono stati assegnati i ruoli (la disposizione) e la bambina, conferma di aver compreso la struttura della tabella, rispondendo «in riga» (interventi 6, 8).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3

B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. A: «A, Andrea»
2. B1: «A vuol dire "Andrea", B vuol dire "Bruno", C vuol dire "Carla", D "Daniela" ed E "Ettore"»
3. R: «È una cosa che avevamo detto anche noi, ma invece di scrivere ogni volta Andrea, Carla, Bruno, ecc., A, B, C, D, E»
4. A: «Che nella tabella nella prima colonna c'è la R di "regista" e c'è A, A, A, A… perché c'è Andrea, poi la seconda è lo sceneggiatore e c'è B, C e D on Bruno, Carla e Daniela e nella terza colonna c'è C che è costumista, che c'è C, D, E, B»
5. R: «Ho capito. E come faccio a capire che è un gruppo? Come prima lui [Andrea] mi ha fatto un esempio… come faccio a capire qual è una combinazione?»
6. B1: «Che sono… in riga c'è scritto A, B e C…»
7. R: «La riga. Quindi, la prima riga a cosa corrisponde?»
8. B1: «Andrea, Bruno e Carla»

Dopo aver individuato concretamente le assegnazioni presenti nella tabella (Figura 4.6.2.) con il gioco dell'incontro precedente in cui gli alunni hanno indossato i tre ruoli (par. 4.5.4.), viene chiesto di provare nuovamente a risolvere il problema e viene tolto dallo schermo l'esempio di Filippo e Annalisa.

4.6.3. E problema sia…

Dopo la breve discussione introduttiva con l'uso dello stratagemma, la maggior parte delle coppie risolve correttamente il problema, utilizzando la strategia ordinata che avevano già sperimentato con i problemi sulle permutazioni. Nell'esempio riportato di seguito (Figura 4.6.3), i bambini riportano anche l'espressione 5x4x3, la quale riprende chiaramente la divisione della tabella.

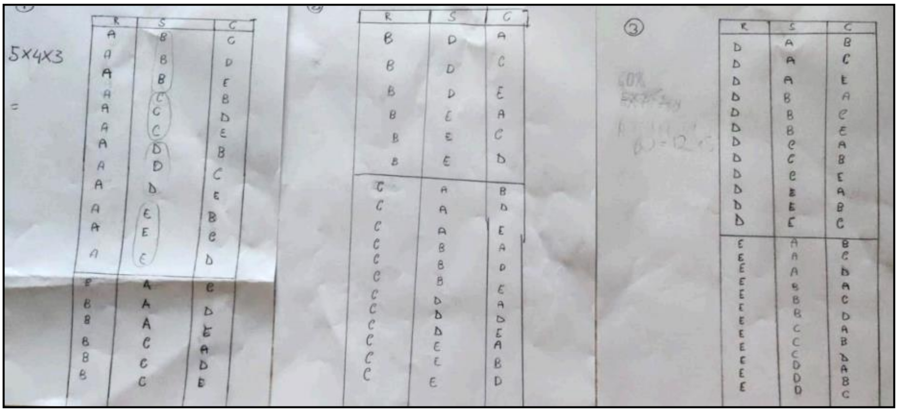


Figura 4.6.3. Esempio per mostrare come la maggior parte degli alunni abbia risolto per la terza volta il problema "Si va in scena!", dopo aver osservato la risoluzione di Filippo e Annalisa.

Nello stralcio successivo, il ricercatore chiede agli autori dell'elaborato di spiegare il significato di ciascun termine dell'espressione. I due alunni giustificano la loro espressione, attribuendo al numero 5 i raggruppamenti della prima colonna formati dalle 12 disposizioni con il ruolo di regista assegnato allo stesso bambino (intervento 2). Lo stesso alunno giustifica il 4x3 in riferimento alla seconda colonna in cui, fissata l'assegnazione del primo ruolo, il secondo (lo sceneggiatore) può essere assegnato per tre volte agli altri 4 bambini a cui non è stato assegnato il ruolo di regista (interventi 10, 13, 15).

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R: «Quindi, il 5 – ripetilo bene – che cos'è?»
2. B1: «5 sono i cinque bambini che si ripetono al primo posto»
3. R: «Quante volte?»
4. B1 e B2: «12 volte»
5. R: «Come si ripetono 12 volte? A caso? Basta che li scri…»
6. B1 e B2: «No!»
7. R: «No…perché?»

8. B1: «Perché la prima colonna – vedi? – c'è la A, che sarebbe Andrea. Poi dopo c'è la B nella… sempre al primo posto, che sarebbe Bruno, poi la C, Carla, sempre al primo posto la D che sarebbe Daniela e poi sempre al primo posto Ettore»
9. B2: «E questo è 5»
10. B1: «Poi, 4x3 l'abbiamo trovato nella seconda colonna, però stavolta vedendo solo questa [*il bambino indica la seconda colonna*], perché bastava che ne vedevamo una. Abbiamo fatto il 3 ripetuto per 4 volte»
11. R: «Ma il 3 che cos'è?»
12. [*Mentre i bambini spiegano, iniziano a raggruppare con una linea i primi quattro gruppi della seconda colonna*]
13. B1: «Il 3? Sono quante volte ogni bambino fa lo sceneggiatore che sarebbe tre volte Bruno, tre volte Carla, tre volte…»
14. B2: «…Daniela e tre volte Ettore»
15. B1: «E poi queste sono 4 volte, lo sceneggiatore lo rifanno 3 volte»

4.6.4. La piccola squadra di calcio (*k* = *n*)

Gli autori del problema "La piccola squadra di calcio" vengono chiamati alla LIM (Figura 4.6.4.), i quali definiscono alla classe i dati del problema, mentre il ricercatore li scrive al computer.

Figura 4.6.4. I tre autori del problema "La piccola squadra di calcio" espongono il problema alla lavagna.

A: alunni
B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. R: «Allora, abbiamo 4 amici. Come li chiamiamo questi 4 amici?»
2. B1: «Luca, Irene, Alma e Matteo»
3. R: «Quattro amici, vogliono formare una piccola squadra di calcio. Devono scegliere…quali ruoli abbiamo scelto?»
4. B1: «Attaccante, centrocampista, difensore e portiere»
5. R: «Questi sono i ruoli, giusto ragazzi?»
6. A: «Sì»
7. R: «Allora, dobbiamo scoprire… quale sarà la domanda che facciamo, come al solito?»
8. A: «In quanti modi possibili…»
9. R: «…in quanti modi possibili possono farlo?»

Di seguito, viene riportato il testo del problema, per agevolare la lettura:

4 amici, Luca, Irene, Alma e Matteo, vogliono formare una piccola squadra di calcio.
Devono scegliere l'ATTACCANTE, il CENTROCAMPISTA, il DIFENSORE e il PORTIERE.
In quanti modi possibili possono farlo?

È stato chiesto ai tre bambini che hanno generato e risolto il problema mentre i compagni terminavano l'attività precedente, di risolverlo anche insieme ai compagni. È stata realizzata una tabella simile a quella del problema "Si va in scena!" (Figura 4.6.3.), ma questa volta con una colonna in più, in quanto i ruoli da assegnare sono 4 (tabella 4.6.1.).

ATTACCANTE	CENTROCAMPISTA	DIFENSORE	PORTIERE
A	I	L	M
A	I	M	L
A	L	I	M
A	L	M	I
A	M	I	L
A	M	L	I
I	A	L	M
I	A	M	L
I	L	A	M
I	L	M	A
I	M	A	L
I	M	L	A
L	A	I	M
L	A	M	I
L	I	A	M
L	I	M	A
L	M	A	I
L	M	I	A
M	A	I	L
M	A	L	I
M	I	A	L
M	I	L	A
M	L	A	I
M	L	I	A

Tabella 4.6.1. Tabella mediante la quale gli alunni enumerano tutti i casi per n=k=4 de "La piccola squadra di calcio"

Nello stralcio successivo, il ricercatore chiede agli di contare i casi totali (intervento 1) e la risposta immediata è «24» (intervento 2). Il ricercatore fornisce un input, allora, per esprimete il numero 24 tramite un'espressione (intervento 3) e i bambini indicano 24=6x4 (intervento 4). Nel momento in cui viene chiesto di esplicitare meglio il 6 (intervento 5), l'alunno B2 identifica l'espressione 2x3x4 (intervento 6), che ricollega al problema sulle permutazioni di 4 lettere (intervento 10):

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2

R: ricercatore

1. R: «Quante sono?»
2. A: «24!»
3. R: «Come lo scriviamo? 24 cos'è?»
4. B1: «24=6x4»
5. R: «24=6x4, perché 24 sono 4 lettere che si ripetono… ognuna della quali c'ha 6. Perché che cos'è questo 6? Cos'è 6?»
6. B2: «2x3x4»
7. R: «Perché 6 è 2 con la I, 2 con la L e 2 con la M. Ora, sta roba qui, 2x3x4, ma vi ricorda qualcosa?»
8. B1: «Sì, io lo so»
9. R: «Cosa?»
10. B2: «Quando avevamo fatto l'esperimento con le 4 lettere»

Dato che i bambini devono svolgere la lezione di inglese, si è deciso di riprendere la discussione collettiva in un secondo momento.

4.6.5. Riflessioni sull'incontro

Grazie all'utilizzo dello stratagemma della tabella, gli alunni sono riusciti ad individuare correttamente la struttura del problema e a spiegare ciascun termine dell'espressione 5x4x3 utilizzata per rendere conto del processo di risoluzione del problema "Si va in scena!". L'ipotesi era quella di portare i bambini a rappresentare la struttura delle disposizioni in autonomia e di riconoscere, anche se ancora non pienamente, le analogie e le differenze con le strutture evidenziate nei problemi con le permutazioni. Anche se tale confronto non è stato ancora esplicitato, la variazione del problema "Si va in scena!" da parte dei tre alunni è stata realizzata in modo da avere k=n, può far pensare che gli alunni stiano iniziando ad inserire tutti i problemi incontrati fino a questo punto all'interno della stessa famiglia di situazioni, secondo il processo evidenziato nel modello del ciclo virtuoso (Par. 1.2.4.4.). Già nella fase di risoluzione collettiva del problema, un alunno ha ricollegato esplicitamente la rappresentazione della struttura del problema "La piccola squadra di calcio" con il problema sulle permutazioni di 4 lettere.

La questione principale su cui i ricercatori hanno posto attenzione è il fatto che nonostante gli alunni abbiano svolto il problema mostrando di aver intuito la struttura e le relazioni proprie delle disposizioni, quello che sembrerebbe essere ancora poco chiaro a questo punto è come riuscire ad esplicitare il concetto di ordine che ne è alla base. Gli alunni infatti, hanno intuito le analogie, almeno sul piano strutturale, tra disposizioni e permutazioni semplici, ma nel giustificare i termini delle espressioni prodotte, non è stato esplicitato il concetto che riguarda il numero di scelte possibili in funzione dell'ordine e, quindi, della posizione considerata. Negli incontri successivi, un primo obiettivo sarà, dunque, quello di esplicitare il riconoscimento delle analogie e delle differenze tra permutazioni e disposizioni semplici, in modo da favorire la generalizzazione e ampliare la classe formale degli alunni relativa al calcolo combinatorio. Mentre, un secondo obiettivo riguarderà l'esplicitazione del concetto di ordine in relazione alle disposizioni.

4.7. Incontro 7 – *"Nelle puntate precedenti…"* e *"Creiamo un'associazione"*

Generalizzare attraverso il riconoscimento di analogie e differenze tra le attività svolte

Nel settimo e penultimo incontro viene proposta un'attività che favorisca la generalizzazione, mediante l'individuazione di analogie e differenze tra le attività svolte. In questo modo si è cercato di promuovere lo sviluppo, da parte degli alunni, di una categoria all'interno della quale inserire le varie situazioni incontrate lungo il percorso, per le quali possano essere applicate le strutture e relazioni dei primi concetti di calcolo combinatorio appresi.

Variazione del contesto del problema per evidenziare la struttura delle disposizioni

Viene proposto il problema "Creiamo un'associazione", simile al problema della cooperativa incontrato nel par. 2.2.1.2., in cui bisogna eleggere tre cariche tra 6 membri di un'associazione. Il problema è costruito in modo che emerga il concetto di ordine, in quanto bisogna eleggere tre cariche di ordine progressivamente inferiore: presidente, vicepresidente e segretario. Mediante la variazione del contesto, presentando un problema di questo tipo, si cercherà di far sì che gli alunni, attraverso il riconoscimento delle analogie con i problemi "Si va in scena!" e "La piccola squadra di calcio", già sperimentati nei due incontri precedente, possano prestare attenzione alla relazione tra posizione e numero di scelte disponibili. L'obiettivo è quello di esplicitare che, dal momento in cui è stato eletto il presidente, per la scelta del vicepresidente il numero di scelte possibili sia n-1 e che, una volta eletti il presidente e il vicepresidente, le scelte possibili siano n-2.

4.7.1. Descrizione generale dell'incontro

La prima parte dell'incontro è stata dedicata alla generalizzazione, mediante una discussione collettiva in cui favorire il riconoscimento di analogie e differenze tra le varie attività svolte negli incontri precedenti. Si è voluta utilizzare una modalità narrativa, in modo che gli alunni avessero la possibilità di ripercorrere integralmente il percorso, spiegandolo a qualcuno che non avesse mai preso parte alle attività in classe. La situazione è stata creata presentando alla classe uno dei ricercatori dell'equipe che gli alunni non avevano direttamente conosciuto. Il ricercatore, mostrando curiosità verso le attività svolte dagli alunni, ha creato un'atmosfera positiva in cui la classe fosse particolarmente interessata a spiegare quanto svolto lungo il percorso. In questo modo gli alunni hanno ripercorso le attività principali, evidenziando i collegamenti tra le varie attività, sia sul piano strutturale che relazionale, soprattutto in riferimento al lavoro svolto sulle permutazioni.

La seconda parte dell'incontro è stata dedicata alla risoluzione collettiva del problema "Creiamo un'associazione", di cui viene riportato il testo di seguito:

> Sei bambini vogliono creare un'associazione e devono eleggere un presidente, un vice-presidente e un segretario. In quanti modi diversi è possibile effettuare la scelta?

Durante il periodo trascorso tra il sesto e il settimo incontro, gli alunni hanno avuto modo di risolvere altri problemi sulle disposizioni semplici simili a "Sì va in scena!" ($k<n$) e a "La piccola squadra di calcio" ($k=n$) durante momenti di didattica quotidiana insieme all'insegnante di matematica. Come già spiegato nelle riflessioni sull'ultimo incontro (par. 4.6.5.), la questione principale su cui i ricercatori si sono interrogati ha riguardato il fatto che gli alunni avessero individuato la presenza di analogie e differenze tra permutazioni semplici e disposizioni semplici soltanto sul piano strutturale, senza però esplicitarlo sul piano formale nell'ambito della discussione sulle espressioni da essi prodotte. La risoluzione dei problemi proposti dall'insegnante di matematica hanno

permesso di verificare che gli alunni abbiano imparato a risolvere adeguatamente problemi inerenti alle disposizioni, ma hanno fatto emergere la necessità di rendere maggiormente esplicito il concetto di ordine in relazione alle disposizioni. In altri termini, si potrebbe affermare che, nonostante gli alunni abbiano riportato oralmente, durante le discussioni sul problema "Si va in scena!", il fatto che il numero di ruoli (k) fosse inferiore al numero dei bambini (n) e nonostante abbiano generato un problema come quello de "La piccola squadra di calcio" in cui k=n, nel momento in cui si sono trovati a dover giustificare il significato delle espressioni prodotte (ad esempio, 60=5x4x3 nel caso del problema "Si va in scena!"), non è mai emerso un ragionamento connesso esplicitamente all'ordine. Gli alunni, infatti, hanno giustificato le espressioni prodotte sui problemi inerenti alle disposizioni, in stretto riferimento alla rappresentazione costruita per ordinare i casi, senza che emergesse il ragionamento fondamentale che riguarda la diminuzione progressiva di n in base ai ruoli già precedentemente assegnati. Si è pensato, quindi, di proporre alla classe di il problema "Creiamo un'associazione", simile al problema della cooperativa incontrato nel par. 2.2.1.2., in cui bisogna eleggere tre cariche tra 6 membri di un'associazione e in cui il concetto di "carica" potrebbe favorire l'esplicitazione del concetto di ordine. L'obiettivo è quello di esplicitare che ci sia una progressiva diminuzione delle scelte di n-1 per ogni carica già assegnata e che, quindi, dal momento in cui è stato eletto il presidente, per la scelta del vicepresidente il numero di scelte possibili sia n-1 e che, una volta eletti il presidente e il vicepresidente, le scelte possibili siano n-2.

4.7.2. Nelle puntate precedenti…

Dopo la presentazione del ricercatore, i bambini iniziano a raccontare le attività a partire dal problema "Si va in scena!" e "La piccola squadra di calcio". Mediante la spiegazione di quest'ultimo problema, nato da una loro stessa variazione, gli alunni per analogia arrivano a spiegare il problema sulle permutazioni di 4 lettere. Dalle permutazioni di 4 lettere si passa al problema delle 5 vocali e, come riportato nello stralcio seguente, gli alunni esplicitano la struttura del problema (interventi 4, 7, 9, 11, 12):

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2

B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «Eh, le cinque vocali, e noi dovevamo combinare tutte queste lettere”
2. B2: «Tutte queste parole con A fissata, poi B»
3. B3: «Al primo posto le fissavamo»
4. B1: «Eh M., e noi abbiamo fatto una combinazione. Diciamo che, tipo la A e poi E I O U, poi dovevamo fare la A al primo posto e poi si scambiavano ogni volta…»
5. R1: «Le altre quattro le scambiavate…»
6. B1: «Eh sì, e le prime le scambiavamo e poi scambiavamo pure l’altra finché non si facevano tutte la combinazione»
7. B3: «Però tutte queste parole che noi formavamo andavano messe, allora, le lettere che dovevano essere fisse delle vocali, erano sempre quelle, quindi, in ordine, e invece le altre quattro vocali andavano messe in ordine alfabetico, non andavano messe a caso»
8. R1: «Ah, la prima volta in ordine alfabetico.. »
9. B3: «Ad esempio c’è A, poi c’è A…»
10. R1: «E»
11. B3: «E sì, I…»
12. A: «..O e U»
13. B3: «Ed è la prima e poi si scambiavano»
14. R: «Queste quattro…»
15. B3: «AEI e invece di mettere OU, mettevamo UO»
16. R1: «UO, ok»
17. B3: «Così andavano…»
18. R1: «Perché poi le avete scritte tutte?»
19. A: «Sì»
20. R1: «Tutte le parole?»
21. B2: «Tutte sì, perché erano molte!»
22. R1: «Eh… quante erano in tutto?»
23. A: «Eh! Non ce le ricordiamo!»
24. R2: «Erano troppe!»
25. B4: «120!»
26. R1: «120?! Se erano 120, erano tante eh!»

Gli alunni esplicitano anche le espressioni prodotte, associate ai due problemi sulle permutazioni di 4 e 5 lettere (interventi 1, 3):

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «C'era anche un'espressione, che poi ci siamo arrivati, che per ogni cosa c'era anche un'espressione, tipo con 4 lettere, c'era 2x3x4»
2. R1: «Ah ah, e con 5?»
3. B1: «E con 5, si fa 2x3x4…»

Mediante l'analisi collettiva della struttura delle permutazioni delle 5 vocali, gli alunni, secondo un ragionamento induttivo guidato dal ricercatore, sono arrivati ad esplicitare il fatto che nelle permutazioni di 5 lettere venga ripetuta la struttura delle permutazioni di 4 lettere per 5 volte. In base a questo tipo di ragionamento gli alunni sono giunti a ipotizzare che ogni volta che si aggiunge una lettera a n, venga ripetuta la struttura di n-1 esattamente per le n volte. La conferma di tale comprensione arriva nel momento in cui il ricercatore chiede ai bambini di individuare le permutazioni di 6 lettere (intervento 1), problema che i bambini non hanno ancora mai affrontato, ma a cui rispondono molto velocemente (interventi 4, 8):

A: alunni
B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. R: «E con 6 lettere quante saranno?»
2. [*I bambini stanno provando a scrivere il risultato su un foglio*]
3. R: «Beh sì, forse c'è bisogno di fare i calcoli… provate a pensarci un attimo…»
4. B1: «120x6»
5. R: «Ah! 120x6 vuole fare…»
6. [*Brusio di sottofondo*]
7. R: «A. [B1] ha fatto 120x6 che effettivamente fa 720»
8. B1: «Sì perché in ogni colonna c'è 120»
9. R: «Quindi, tu hai detto che ad ogni passaggio, tipo, io qui ho 6 parole, quando faccio 4 lettere, ne ho 24, 120 è 5 x 24, e allora per trovare il corrispondente di 6 lettere hai fatto 6x120…»

10. B1: «Sì»
11. A: «Che è 720»

4.7.3. Creiamo un'associazione

Non appena è stato presentato il problema "Creiamo un'associazione", gli alunni hanno riconosciuto la somiglianza con il problema "Si va in scena!" (interventi 1, 5) e, come si può osservare nello stralcio riportato di seguito, alcuni alunni (interventi 7, 9, 11) ne confrontano i dati (*n* e *k*). Il riconoscimento di un problema simile ad un altro costituisce essa stessa una variazione, in quanto, come osservato nel par. 1.2.3. dedicato alla Teoria della Variazione, indica che gli alunni abbiano riconosciuto le analogie e le differenze tra le situazioni che appartengono alla medesima famiglia. È attraverso tale riconoscimento, infatti, che si arriva ad associare una situazione alla struttura che appartiene a una determinata classe formale di riferimento. Nel caso specifico, il riconoscimento delle analogie e delle differenze tra il problema "Si va in scena!" e "Creiamo un'associazione", ha consentito agli alunni di associare alla situazione proposta la struttura appresa nell'ambito delle disposizioni semplici.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. B1: «Secondo me per noi questo compito può essere più facile, perché lo abbiamo già fatto»
2. R: «Quello dell'associazione?»
3. B1: «Non dell'associazione, di un'altra cosa»
4. R: «Eh, fammi sapere…»
5. B1: «Sempre quello dello sceneggiatore…»
6. R: «Ah!»
7. B1: «Ce ne sono sempre tre di…»
8. R: «…tre… ruoli?»
9. B1: «Sì, tre ruoli»
10. R: «Ah… e li quanti bambini dovevano dividersi quei tre ruoli?»
11. B1: «Mi pare quattro?»

12. B2: «Cinque»
13. A: «Cinque»
14. R: «Quindi, se è facile, possiamo provarci di nuovo…»
15. B1: «Certo, certo!»
16. R: «Supponiamo che i bambini, invece di essere 5, siano uno in più, 6 bambini. [A B1] Complichiamo un po', che dici?»
17. B1: «Sì»
18. R: «Quindi, tre ruoli, sei bambini, proviamo a pensare a questo: in quanti modi possiamo scegliere un presidente, un vicepresidente, un segretario a partire da 6 bambini, 6 amici, che vogliono formare un'associazione»

Dopo aver svolto il problema in coppie, è stata avviata la discussione collettiva sul problema "Creiamo un'associazione": è stata chiamata alla lavagna una coppia di bambini che ha lavorato insieme allo svolgimento del problema. I due alunni disegnano la tabella (Figura 4.7.1.) in cui elencare le disposizioni semplici e scelgono i nomi dei 6 bambini che fanno parte dell'associazione (Karol, Annalisa, Annarita, Luigi, Giada e Sofia) e i rispettivi simboli, usando le iniziali (K, Al, Ae, L, G e S), come è possibile vedere nella Figura 4.7.1.

Figura 4.7.1. Impostazione della tabella relativa al problema "Creiamo un'associazione"

Nello stralcio riportato di seguito, l'alunno B1 spiega chiaramente la strategia utilizzata per elencare le disposizioni semplici (intervento 2, 4) secondo l'ordine appreso durante il percorso realizzato ("Strategia del contachilometri, pag. 126): i bambini hanno assegnato il ruolo di presidente (prima colonna a sinistra nella Figura 4.7.2.) a Karol e il ruolo di vice-presidente, abbinando sistematicamente tra loro gli altri elementi per il ruolo di segretario, fino all’esaurimento delle disposizioni che è possibile costruire in questo modo (interventi 9, 10).

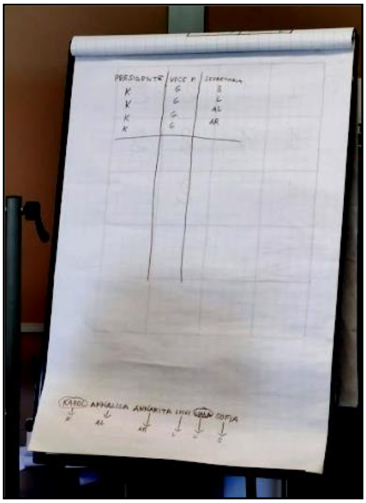


Figura 4.7.2. Tabella relativa al problema “Creiamo un’associazione”: elenco delle prime quattro disposizioni semplici con K in prima posizione, nel ruolo di “presidente”.

A: alunni
B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. R: «Fin qua la legenda la conosciamo, ora Andrea spiega come avete ragionato»
2. B1: «Abbiamo cominciato mettendo il presidente, che è fisso, la K, di Karol, poi abbiamo fatto con Giada, abbiamo scritto G, e poi abbiamo cominciato con una di queste [le altre lettere/nomi che mancano] e abbiamo messo Sofia»
3. R: «Allora io, ogni volta, ripeto a voce un po’ più alta, così possono sentire tutti. A. B1] ha detto: «fisso il presidente, poi scelgo un vicepresidente», allora Karol presidente, vice Giada e poi metto, ad esempio, Sofia come segretario. Poi?»
4. B1: «Poi, lascio sempre fissa la K, qua lascio sempre fisso Giada e poi qua metto la Al, poi qui riparto con la K, lascio sempre fisso Giada e poi qua posso mettere Ar, poi riparto con K, lascio la G, e metto la L, e qua abbiamo finito il primo giro, diciamo»

5. R: «Allora, cerchiamo di capire bene questo. Lui ha detto: "abbiamo finito il primo giro!. Il "primo giro" che cosa vuol dire?»
6. B1: «Nel senso… la prima distribuzione…»
7. R: «Hm. Che cos'hanno in come queste terne? Questi gruppi da tre che hai scelto?»
8. B1: «Che praticamente il vicepresidente e il presidente rimangono fissi, mentre la segretaria si scambia ogni volta»
9. R: «E quindi perché sei sicuro che sono 4 questi gruppi?»
10. B1: «Perché dopo aver fissato Karol e Giada, rimangono i 4 nomi, perciò, tra loro uno, due, tre e quattro»

Insieme alla classe sono state poi elencate tutte le disposizioni con K scelto come presidente, secondo la strategia spiegata dall'alunno B1 nello stralcio precedente, ottenendo la struttura riportata di seguito (Figura 4.7.3.):

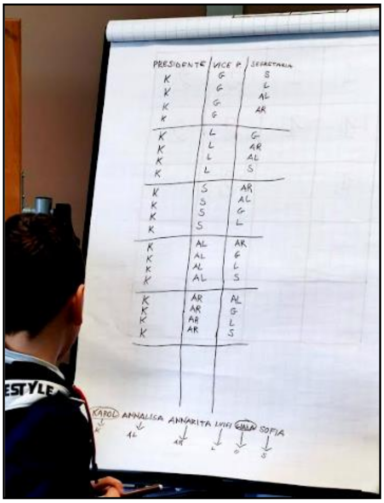


Figura 4.7.3. Tabella relativa al problema "Creiamo un'associazione": elenco delle prime 20 disposizioni, con Karol scelta come presidente.

Dopo aver completato la struttura con K presidente, nello stralcio successivo, l'alunno B1 giustifica di aver elencato tutti i possibili casi perché con K presidente, dal momento che sono stati enumerati tutti i casi possibili in cui gli altri membri fossero stati scelti come vicepresidente (intervento 1, 3, 7).

A: alunni

B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. B1: «Questi 5 nomi, sono stati messi tutti al vicepresidente e la K è stata messa per 20 volte»
2. R: «Quindi, avete capito cosa ha detto Andrea? Andrea ha detto che, tenendo fissa la K, i vicepresidenti possibili chi erano, visto che Karol è presidente, chi erano i vicepresidenti possibili?»
3. A: «Giada, Luigi, Sofia, Annalisa e Annarita»
4. R: «Giada, Luigi, Sofia, Annalisa e Annarita. Li abbiamo già visti tutti i casi di tutti i vicepresidenti possibili quando K è fisso. Giusto?»
5. A: «Sì»
6. R: «Quindi perché A. [B1] ha detto che è finita la tabella? Lui voleva dire che abbiamo finito i casi in cui K era – »
7. A: « – presidente!”»

A questo punto, nello stralcio seguente, si nota che il ricercatore ha fornito un input alla rappresentazione del problema in forma algebrica (intervento 1), chiedendo alla classe se esista un modo per conoscere tutti i casi senza necessariamente dover elencare tutti i possibili casi. La prima ipotesi proposta (intervento 2) è stata quella di moltiplicare il totale delle disposizioni che si ottengono mantenendo fissa l’assegnazione della carica di presidente per il totale dei bambini (20x6).

A: alunni
B1: bambino/a 1
R: ricercatore

1. R: «E quindi questo 4 come lo posso scrivere se voglio spiegarlo? Se voglio proporlo in un’altra classe e fargli vedere come abbiamo ragionato?»
2. B1: «Il 4 sono i bambini che stanno nella terza posizione»
3. R: «Ma sono bambini che possono fare quale ruolo?»
4. B1: «La terza posizione, per fare il segretario»
5. R: «Ok. Quindi, lui dice: «questi sono i 4 bambini per fare il segretario». Se volessi usare sempre “modi di scegliere”?»
6. B1: «Puoi scrivere, allora… “modi di scegliere il segretario nella terza posizione”»
7. R: «Tra quanti bambini?»
8. B1: «quattro»

Il ricercatore ha invitato i bambini ad esplicitare il numero 20, ponendo l'attenzione a come le 20 disposizioni in tabella fossero state elencate. Alcuni alunni hanno proposto di sostituire il numero 20 con l'espressione 5x4, in riferimento al numero dei 5 gruppi di disposizioni che si formano con il ruolo di vice-presidente assegnato allo stesso bambino (seconda colonna della tabella nella Figura 4.7.3.). Gli alunni hanno spiegato il 4 dell'espressione "5x4" come i modi possibili in cui scegliere il segretario, una volta fissati i ruoli di presidente e vicepresidente.

Una volta individuato il totale ($D_{6,3}$ =120), si è passato alla formulazione dell'espressione completa, che tenesse conto di tutto il problema e non solo di una parte. Come si osserva dalla Figura 4.7.4., il punto di partenza è stato 120=20x6 in cui il 6 è stato individuato come "numero di modi possibili di fissare il presidente" e il 20 come "numero di modi in cui scegliere il vice-presidente e il segretario, fissato il presidente". A questo punto è stato esplicitato che il 20 corrisponda all'espressione 5x4, secondo quanto stabilito poco prima dagli alunni (Figura 4.7.4.).

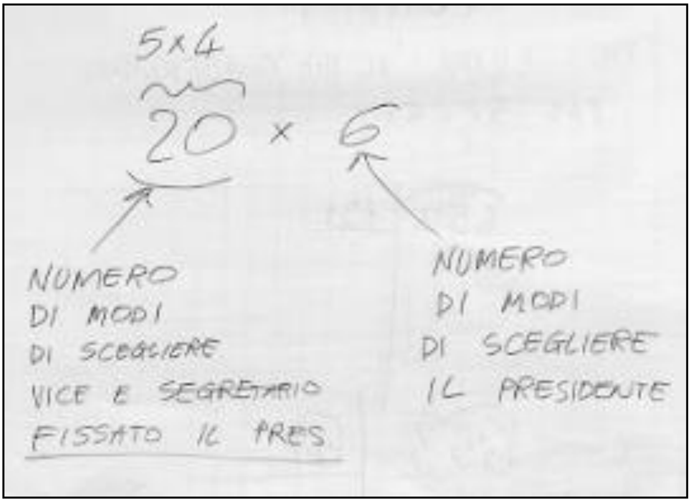


Figura 4.7.4. Formulazione dell'espressione associata al problema "Creiamo un'associazione", esplicitando il significato di ogni termine I

È stato chiesto ai bambini di esplicitare nuovamente il significato di ciascun termine dell'espressione 120 = 6x5x4, al fine di verificarne la comprensione (Figura 4.7.5.).

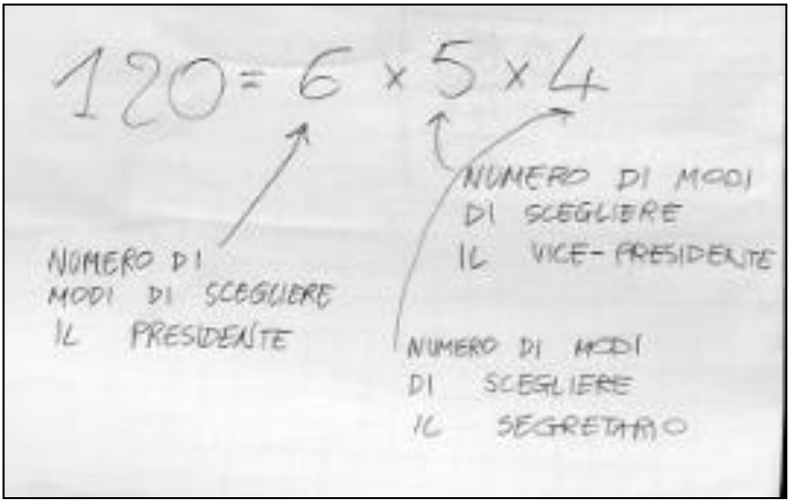


Figura 4.7.5. Formulazione dell'espressione associata al problema "Creiamo un'associazione", esplicitando il significato di ogni termine II

Come si può osservare dalla Figura 4.7.5., gli alunni hanno indicato il 6 come i modi di scegliere il presidente, il 5 come i modi di scegliere il bambino che farà il vice-presidente e 4 i modi in cui scegliere il segretario.

4.7.4. Riflessioni sull'incontro

Nel settimo e penultimo incontro grazie all'introduzione di una terza figura ha consentito agli alunni di ripercorrere le varie tappe del percorso, ragionando in termini di analogie e differenze sulle varie attività proposte fino a quel momento. Gli alunni hanno mostrato di ricordare ciascuna attività proposta, il che ha consentito ai ricercatori di avere un feedback sulla significatività delle attività proposte. Nonostante qualche errore iniziale, gli alunni hanno mostrato di individuare una precisa struttura connessa a ciascuna attività e di riconoscere le analogie e le differenze necessaria per generalizzare, riconducendole, in termini di ciclo virtuoso, a una famiglia di situazioni per cui applicare le strutture e le relazioni proprie della classe formale appresa di calcolo combinatorio.

Il problema "Creiamo un'associazione" si è rivelato estremamente utile, non solo nel favorire la comprensione della struttura delle disposizioni, ma anche per favorire negli alunni un ragionamento di tipo pre-algebrico, elaborando un'espressione matematica in grado di render conto della struttura realizzata per enumerare le disposizioni. L'obiettivo dei ricercatori era quello di focalizzare l'attenzione degli alunni sulla relazione tra ordine e classe (k) nell'ambito delle disposizioni. Rispetto a tale obiettivo, nell'ambito della discussione collettiva gli alunni hanno riflettuto sulla struttura della tabella mettendola in relazione ai termini dell'espressione prodotta 120=6x5x4, i quali sono stati spiegati da loro stessi in relazione al numero di elementi disponibili in base all'assegnazione dei ruoli, esplicitando la progressiva diminuzione delle scelte di n-1 per ogni carica già assegnata. A questo punto, gli alunni hanno mostrato di riconoscere la struttura sia delle permutazioni semplici che delle disposizioni semplici e, attraverso il collegamento tra il problema "La piccola strada di calcio" (k=n=4) e il problema sulle permutazioni di 4 lettere (n=4), di aver individuato, anche se in modo non ancora esplicito, la relazione tra le due strutture. Lo scopo finale del percorso è, dunque, quello di favorire la piena generalizzazione, intesa come costruzione di una categoria in cui inserire entrambe le strutture (permutazioni e disposizioni semplici), in modo da considerarle come declinazioni della medesima classe formale.

4.8. Incontro 8 – *Il punto della situazione…*

Generalizzare attraverso il riconoscimento di analogie e differenze tra le attività svolte II

L'ultimo incontro prevede una discussione collettiva per promuovere la generalizzazione, attraverso l'esplicitazione da parte degli alunni delle analogie e delle differenze tra le varie attività svolte. In questo caso, ad essere confrontate non sono solo i problemi svolti, ma l'attenzione sarà focalizzata sulle espressioni formulate dagli alunni, utilizzate per esprimere i processi di ragionamento che hanno condotto alla risoluzione dei problemi.

4.8.1. Descrizione generale dell'incontro

Prima dell'incontro vero e proprio, tenutosi a distanza di circa un mese e mezzo dal settimo incontro, gli alunni hanno ricevuto dall'insegnate di matematica un worksheet, elaborato dai ricercatori al fine di promuovere il processo di generalizzazione. Come si può osservare nella Figura 4.8.1, il worksheet è stato progettato in modo che gli alunni associassero a ciascuno dei problemi svolti durante il percorso, riportati nella prima colonna della tabella, l'espressione adeguata a spiegare il percorso risolutivo. Le espressioni sono state scritte in un elenco (Figura 4.8.1, in alto), all'interno del quale sono state inserite non solo le espressioni corrette, ma anche alcune non del tutto corrette, perché meno esplicative del processo (ad esempio, 60 = 20 x3), ed altre che non riguardano in alcun modo i problemi proposti (ad esempio, 16 = 4 x 4). Va aggiunto che per alcuni problemi, avrebbe potuto essere usata anche una stessa espressione come, ad esempio, nel caso dell'espressione 6 = 3 x 2, che può essere utilizzata sia nel primo che negli ultimi due problemi della tabella a sinistra della Figura 4.8.1. Nella terza colonna della tabella, c'è una parte dedicata alla giustificazione, la quale può essere utilizzata sia per motivare la propria scelta, sia come strumento di ragionamento per verificarne la correttezza.

L'ottavo incontro è stato dedicato allo svolgimento della discussione su quanto prodotto nel worksheet, per cercare di porre l'attenzione sulle analogie e differenze tra le strutture delle permutazioni e disposizioni semplici apprese durante il percorso dedicato all'introduzione del calcolo combinatorio.

Completa la seguente tabella inserendo, accanto a ciascuna domanda, l'espressione matematica che rappresenta il ragionamento per rispondere, e giustificando la risposta.

Scegli l'espressione fra le seguenti (la stessa espressione può essere usata più volte e alcune espressioni non vanno utilizzate!):

- $120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- $60 = 20 \times 3$
- $6 = 3 \times 2$
- $12 = 4 \times 3$
- $9 = 3 \times 3$
- $60 = 5 \times 4 \times 3$
- $24 = 4 \times 3 \times 2$
- $720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- $120 = 6 \times 5 \times 4$
- $16 = 4 \times 4$

DOMANDA	ESPRESSIONE	GIUSTIFICAZIONE
Quante parole puoi formare con 3 lettere diverse?	$6 = 3 \times 2$	
Quante parole puoi formare con 4 lettere diverse?		
Quante parole puoi formare con le 5 vocali?		
Quante frasi puoi formare con 3 parole diverse?		
Quanti numeri puoi formare con 3 cifre diverse?		
In quanti modi puoi assegnare 3 ruoli (regista, costumista e sceneggiatore) fra 5 persone?		
In quanti modi puoi assegnare i ruoli di portiere, difensore, centrocampista e attaccante fra 4 amici?		
In quanti modi diversi puoi colorare le pareti e il tetto di una casa con 2 colori diversi scelti fra 4 colori?		
In quanti modi diversi puoi scegliere presidente, vicepresidente e segretario in un'associazione di 6 soci?		

Figura 4.8.1. Worksheet finale

4.8.2. Analisi delle risposte fornite al worksheet finale

Alla consegna degli elaborati, i ricercatori si sono resi conto che la maggior parte degli alunni avesse risposto soltanto al primo foglio (quello a sinistra nella Figura 4.8.1.) e che la maggior parte non avesse utilizzato la colonna per giustificare, ma interi fogli A4 allegati agli elaborati (Figura 4.8.2.). L'incompletezza della compilazione è stata imputata al fattore temporale, in quando la classe ha avuto a disposizione circa 2 ore per completare l'attività e, per tale ragione, per molti alunni il tempo non è stato sufficiente.

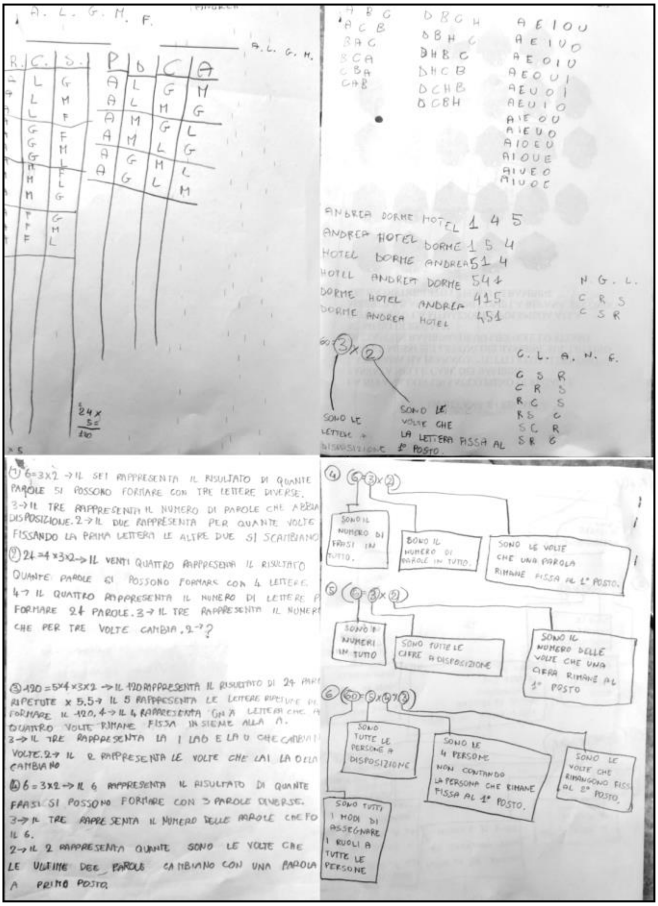


Figura 4.8.2. Esempi degli elaborati dagli alunni per giustificare la scelta delle espressioni da associare a ciascun problema del worksheet finale.

La maggior parte degli alunni è riuscita ad associare correttamente ai problemi presentati più della metà delle espressioni e, come già ipotizzato dai ricercatori, la maggior parte delle criticità sembrano essersi verificate nei problemi relativi alle disposizioni semplici (parte sinistra della Figura 4.8.1). Per quanto riguarda le giustificazioni, come è possibile osservare nella Figura 4.8.2, alcuni bambini hanno provato ad esplicitare il significato di ciascun termine dell'espressione, mentre altri hanno fornito una giustificazione scritta in forma narrativa. Si è notato che la maggior parte degli alunni ha avuto bisogno di realizzare un elenco dei casi per ragionare sulle espressioni fornite, realizzando almeno una parte della tabella, che permettesse di mettere in evidenza la relazione tra numero degli elementi e numero totale dei possibili casi. In base a quanto emerso dall'analisi degli elaborati, i ricercatori hanno progettato la discussione collettiva per mettere in evidenza le analogie e le differenze tra le varie espressioni presenti nel worksheet, in modo da promuovere la generalizzazione dei concetti legati alle permutazioni semplici e alle disposizioni semplici, appresi durante il percorso.

4.8.3. Discussione collettiva finale

Nella parte iniziale della discussione, i ricercatori hanno chiesto agli alunni lo scopo dell'attività proposta con il worksheet, al quale gli alunni hanno fornito una spiegazione legata al riportare in memoria tutte le attività svolte durante il percorso. Un alunno sottolinea il passaggio da attività più semplici ad attività progressivamente più complesse. Si passa alla discussione dei problemi proposti nella tabella (Figura 4.8.1.) del worksheet. Come si può osservare nello stralcio riportato di seguito, durante la discussione si cerca di porre l'attenzione degli studenti sul concetto di ordine (intervento 1), cercando di mettere in relazione la posizione considerata e numero delle scelte possibili (interventi 5, 8, 12, 18). In questo caso, viene posta attenzione al numero di scelte possibili in relazione all'ordine nel caso delle permutazioni di 3 lettere:

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Se io ho tre posizioni e ho tre lettere ABC, giusto? Quante ne posso mettere qua per creare una parola?»
2. A: «Tre»
3. R: «Perché posso cominciare con la lettera che voglio, giusto?»
4. B1: «Con la A»
5. R: «Con quella che voglio, con la A, con la B o con la C, quindi, quante scelte ho?»
6. A: «Tre»
7. R: «Sono libero di fare quello che voglio»
8. B2: «Dopo però con la seconda lettera ne ho due»
9. R: «Una volta che mi sposto, io non so quella che ho scelto al primo posto, ma sicuramente quante ce ne avrò?»

10. A: «Due»
11. R: «Perché?»
12. B1: «Perché non ci puoi mettere la A, l’hai già scelta»
13. R: «Ma se ho scelto la B?»
14. B1: «Non la puoi mettere»
15. R: «Quindi, comunque io abbia scelto la prima lettera, alla seconda posizione ne avrò soltanto due, perché una già l’ho messa all’inizio. Siete d’accordo?»
16. A: «Sì»
17. R: «E una volta che ho scelto le prime due…»
18. B3: «Sei costretto a mettere…»
19. R: «Sei costretto a mettere l’ultima che è rimasta! Se ho messo C e B qua, cosa metto?»
20. A: «La A»

Lo stesso ragionamento è stato svolto nel caso delle permutazioni di 4 lettere, come mostrato nella Figura 4.8.3. e nello stralcio riportato sotto la figura. Gli alunni, infatti, hanno riconosciuto che si trattasse della stessa struttura precedente alla quale bisogna aggiungere una casella in più perché è stata aggiunta una lettera.

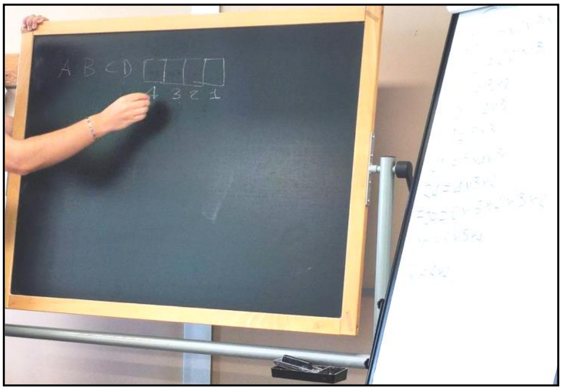


Figura 4.8.3. Tabella in cui viene posta attenzione al numero delle possibili scelte per ogni posizione, nel caso delle permutazioni di $n = 4$

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Qual è la prima lettera?»
2. A: «La A»
3. R: «No! Quante possibilità ho?»
4. A: «Quattro»
5. R: «Dopo che ho fissato la prima lettera, quante…»
6. A: «Tre!»
7. R: «poi?»
8. A: «Due»
9. B1: «E uno»
10. R: «oh!»

Quando si è passati all'analisi degli ultimi due problemi nel primo foglio del worksheet ("Quante frasi puoi formare con 3 parole diverse?" e "Quanti numeri puoi formare con 3 cifre diverse?"), gli alunni hanno riconosciuto l'identità tra le due strutture e quella del problema "Quante parole puoi formare con 3 lettere diverse?", ponendo l'attenzione sul fatto che l'aspetto importante non riguardasse la tipologia di oggetto considerato, ma il numero degli oggetti.

Per quanto riguarda i problemi sulle disposizioni (parte destra della Figura 4.8.1.), è stata realizzata un'attività in cui i bambini potessero concretamente sperimentare il concetto di ordine in relazione al numero di possibilità di assegnazione dei ruoli in base alla posizione considerata, facendo in modo da rendere esplicita la progressiva diminuzione delle scelte di n-1 per ogni assegnazione già avvenuta. Sul pavimento sono stati realizzati tre quadrati con lo scotch, di cui uno verde, uno rosso e uno blu, come si può vedere nella Figura 4.8.4. (vengono evidenziati per rendere i colori maggiormente visibili).

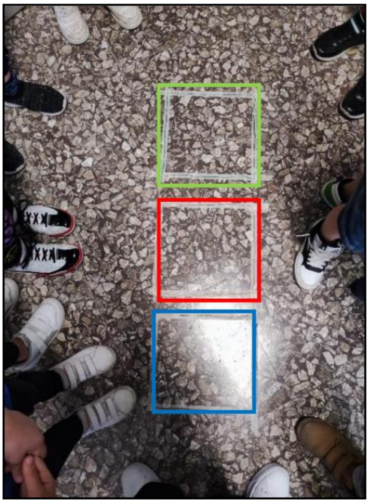


Figura 4.8.4. Attività con i tre quadrati per mettere in evidenza il numero delle scelte in base alla posizione considerata, nel caso del problema "Si va in scena!"

L'attività con i quadrati è stata realizzata in collegamento al problema "Si va in scena!" (pag. 178): ogni quadrato sarebbe corrisposto ad un certo ruolo (quadrato blu per il regista, quadrato rosso per lo sceneggiatore e quadrato verde per il costumista). Sono stati chiamati cinque bambini e viene chiesto alla classe in quanti modi può essere scelto il regista (prima posizione):

A: alunni
R: ricercatore

1. R: «Allora, diciamo… in quanti modi posso mettere una persona a fare il regista?»
2. A: «Cinque!»
3. R: «Quanti sono questi cinque modi?»
4. A: «Gli amici»

Uno dei cinque bambini che è stato scelto come regista si è posizionato all'interno del quadrato blu corrispondente al ruolo di regista. Nello stralcio successivo, il ricercatore, dopo che gli alunni hanno scelto il bambino con il ruolo di regista, chiede alla classe: «Quanti modi, una volta scelto il primo, posso scegliere chi fa lo sceneggiatore?» (intervento 2). Gli alunni sono concordi nell'affermare che ci siano quattro modi in cui poter scegliere lo sceneggiatore (intervento 4), giustificandolo con il fatto che il regista fosse già stato scelto (intervento 6). Lo stesso ragionamento è stato sviluppato anche per la terza posizione (interventi 9, 10), affermando che ora le scelte disponibili siano soltanto 3, perché due ruoli già sono stati assegnati (interventi 12, 13, 14, 15, 16):

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: "Ora, quanti amici sono rimasti senza ruolo?"
2. A: "Quattro"
3. R: "Quanti modi, una volta scelto il primo, posso scegliere chi fa lo sceneggiatore?"
4. A: "Quattro"
5. R: "Perché quattro e non cinque?"
6. B1: "Perché uno già ce l'ha"
7. R: "Uno è già stato fissato e ne rimangono 4. Chi scegliamo?"
8. B2: "Z."
9. R: "Ok. Quante persone ci sono rimaste?"
10. A: "Tre"
11. R: "E quanti ruoli ho già scelto?"
12. A: "Due"
13. R: "Tra quante persone posso scegliere chi fa il costumista?"
14. A: "Tre"
15. R: "Ok, tre. Perché?"
16. B3: "Perché le altre due già ce l'hanno"

Successivamente, è stata posta attenzione all'espressione elaborata nell'ambito della risoluzione del problema "Si va in scena", nell'incontro n°6 (pag. 189), che corrisponde a 60 = 5 x 4 x 3. Dopo il ragionamento emerso attraverso l'attività con i quadrati, gli alunni non hanno mostrato difficoltà nell'esplicitare il significato di ciascun termine in relazione all'ordine. I ricercatori hanno cercato di favorire il collegamento con il problema sulle permutazioni delle 5 vocali, in modo che gli alunni potessero rendersi conto che la differenza tra le due espressioni (5x4x3x2 e 5x4x3) stia nel fatto che nel caso delle vocali, di abbia $k=n=5$, mentre nel caso del problema "Si va in scena!", si abbia $k<n$, in quanto $n=5$ e $k=3$.

Per confrontare le due espressioni sono state realizzate sulla lavagna tre caselle a sinistra, in cui inserire le possibilità di scelta per ogni posizione considerata rispetto alle disposizioni semplici di 5 elementi di classe k relative al problema "Si va in scena!", e cinque caselle a destra, in cui inserire le possibilità di scelta per ogni posizione considerata rispetto alle permutazioni di 5 lettere (Figura 4.8.5.). Una volta completate sia le caselle di sinistra che quelle di destra, come mostrato nella Figura 4.8.5., è stato chiesto agli alunni che cosa rendesse simili o diverse le due tabelle. Gli alunni, come si può notare dallo stralcio riportato dopo la figura, si rendono conto che nel caso delle permutazioni di 5 lettere ci siano due posizioni in più (interventi 2, 4) e che questo si rifletta nella tra i due totali dei possibili casi (interventi 7, 8, 9, 10).

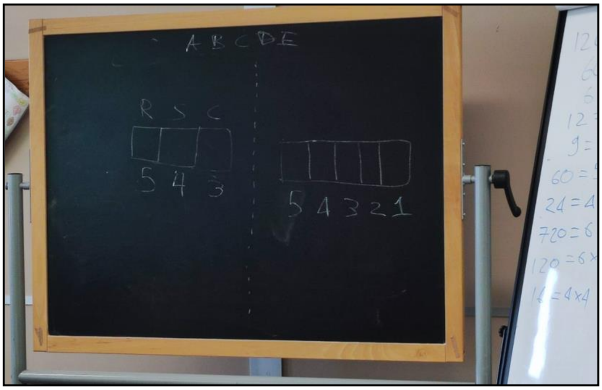


Figura 4.8.5. Confronto tra la struttura delle disposizioni semplici per $n = 5$ e $k = 3$ e delle permutazioni semplici per $n = 5$

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «Allora… perché… in cosa sono simili questi due problemi e in cosa sono diversi?»
2. B1: «Sono diversi che praticamente le posizioni sono di più e in quell'altra sono di meno»
3. R: «Quante posizioni hai qua?»
4. B1: «Cinque, invece, di là ce ne hai 3»
5. B2: «In tutte e due c'è scritto 5x4x3»

6. R: «In entrambe c'è 5x4x3, ma come ha sottolineato M. [B1], di là c'è un 2 che di là non c'è»
7. R: «Questi due problemi, a livello numerico, hanno la stessa soluzione?»
8. A: «No»
9. R: «Perché uno fa 120 e l'altro fa…»
10. A: «60»

Nello stralcio riportato di seguito, per verificare la comprensione da parte dei bambini, viene chiesto loro di provare a variare con l' "E se?" il problema "Si va in scena!" in modo che la soluzione divenisse la stessa del problema sulle permutazioni delle 5 vocali (interventi 1, 3). L'alunno B2 risponde velocemente: «Aggiungi altri due lavori» (intervento 5), confermando di aver compreso che ciò che differenzia le due strutture sia costituito dal valore assunto dalla classe *k*.

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
R: ricercatore

1. R: «A questa domanda rispondetemi bene… riuscite a variare questo problema…»
2. B2: «Che vuol dire variare?»
3. R: «Il gioco dell' "E se?"…a fare una variazione del problema dello sceneggiatore, in modo che la soluzione sia 5x4x3x2x1? Anche se il contesto è diverso eh…»
4. B1: «Sì sì sì»
5. B1: «Aggiungi altri due lavori»
6. R: «Bravo! Bravo! »
7. [*Applauso collettivo*]

Il ricercatore, in fine, ha condotto una riflessione sul significato dell'1 nell'espressione 5x4x3x2x1 e ha chiesto ai bambini di generare un problema con le disposizioni che potesse avere lo stesso risultato. In risposta, un alunno propone di assegnare 4 ruoli ai 5 bambini del problema "Si va in scena!", a conferma del fatto che, anche se la differenza tra permutazioni semplici e disposizioni semplici non sia stata chiaramente esplicitata, i bambini abbiano compreso la differenza sostanziale tra le due strutture.

4.8.4. Riflessione sull'incontro

Dal momento in cui, nel quinto incontro (par. 4.5.), sono state introdotte le disposizioni, i ricercatori hanno avuto modo di osservare lo sviluppo di criticità nel suo apprendimento. Nonostante, infatti, gli alunni ne abbiano rappresentato e compreso la struttura (incontro n°6) grazie all'uso dello stratagemma di Filippo e Annalisa (par. 4.6.1.) e abbiano elaborato la formula 5x4x3 relativa al problema "Si va in scena!" (pp. 190-191), il cui significato è stato esplicitato durante la discussione collettiva del penultimo incontro (par. 4.7.2.), l'ostacolo più grande è stato costituito dalla difficoltà nella categorizzazione di permutazioni e disposizioni semplici all'interno della medesima classe formale. Ciò significa che gli alunni mostravano di aver compreso sia la struttura e le relazioni tra numero di elementi disponibili e numero totale delle possibili permutazioni, sia la struttura e le relazioni tra numero di elementi disponibili, numero degli elementi della classe k e numero totale delle possibili disposizioni, ma senza esplicitare un collegamento tra i due argomenti di calcolo combinatorio. Per cercare di sollecitare la comprensione degli alunni in questa direzione, i ricercatori hanno riflettuto su quali strumenti della Metodologia della Ricerca Variata potessero essere sviluppati per poter raggiungere la completa generalizzazione e sull'elaborazione di attività che potessero mettere in rilievo il concetto di ordine, in relazione al numero di scelte possibili in funzione della posizione considerata nel caso di $k = n$ e di $k < n$, in modo da rendere esplicito che, nel caso di $k = n$, permutazioni semplici e disposizioni semplici arrivano a sovrapporsi. Il worksheet è stato realizzato per mettere gli alunni nella condizione di confrontare direttamente le espressioni elaborate da loro stessi per risolvere i problemi proposti durante il percorso di sperimentazione e, in base a quanto previsto dall'approccio MRV, di riflettere sulle analogie e le differenze tra le varie strutture. Inoltre, nella prima colonna della tabella (Figura 4.8.1.) i problemi sono stati inseriti in ordine cronologico, tenendo conto dei vari step che progressivamente hanno costituito il passaggio dalle permutazioni semplici di 3 elementi (anagrammi di 3 lettere) fino alle disposizioni di 6 elementi di classe 3 (6 bambini, 3 ruoli), per fare in modo che gli alunni problema dopo problema, mettessero a confronto ciascuna espressione inserita con quella precedente. La discussione collettiva prevista per quest'ultimo incontro è stata progettata con l'obiettivo di esplicitare le analogie e le differenze individuate dagli alunni e di generalizzare a partire dalla riflessione sul concetto di ordine. Per esplicitare l'ordine, i ricercatori hanno pensato di portare gli studenti a osservare i problemi svolti da una prospettiva che mettesse in primo piano le possibilità di scelta in relazione alla posizione considerata mediante l'uso della tabella in Figura 4.8.3, in cui viene posto in rilievo il numero delle scelte possibili per ciascuna posizione considerata. La tabella è stata prima utilizzata per riflettere sulle espressioni prodotte nel caso dei problemi sulle permutazioni, poi è stata riprodotta sul pavimento per riflettere sui problemi che hanno riguardato le permutazioni e, in particolare, sul problema "Si va in scena!". Il confronto mediante le tabelle (Figura 4.8.5.) tra le espressioni del problema "Si va in scena!" (disposizioni semplici di 5 elementi di classe 3) e del problema sulle 5 vocali svolto nel terzo incontro (permutazioni semplici di 5 elementi), ha promosso la comprensione da parte degli alunni delle analogie e delle differenze tra permutazioni semplici e disposizioni semplici. I bambini, infatti, attraverso il gioco dell' "E se?" hanno generato un problema in cui passare dalle disposizioni di 5 elementi di classe 3 alle permutazioni di 5 elementi, mostrando di aver compreso il ruolo della classe k nel discriminare le disposizioni semplici dalle permutazioni semplici. A partire dall'espressione sulle permutazioni di 5 elementi (5x4x3x2x1) hanno poi generato un ulteriore problema in cui ottenere lo stesso risultato cambiando il numero della classe, diminuendo il numero della classe da $k = 5$ a $k = 4$ (5x4x3x2), procedendo in maniera inversa in quanto si è passati dalle permutazioni semplici di 5 elementi alle disposizioni semplici di 5 elementi di classe 4. Attraverso l'uso di strumenti di rappresentazione adeguati e alla riflessione, prevista dalla Metodologia della Ricerca Variata, sulle analogie e sulle differenze tra le espressioni relative ai problemi risolti, e attraverso l'attività del problem posing mediante la strategia dell' "E se?", nell'ultimo incontro gli alunni sono riusciti a passare da una struttura all'altra della classe formale generalizzata rispetto ai primi concetti di calcolo combinatorio appresi nel corso degli incontri.

4.9. Itinerario parallelo

4.9.1. Considerazioni preliminari

Si è scelto di dedicare questa parte al percorso svolto nella classe che è stata inserita nel progetto in un secondo momento, la quale ha permesso di riflettere in maniera accurata sull'utilizzo della Metodologia della Ricerca Variata per introdurre i primi concetti di calcolo combinatorio nella scuola primaria. Si è pensato di realizzare questo secondo percorso parallelo perché avrebbe permesso di riflettere in maniera più accurata sulle applicazioni di MRV nella scuola primaria e, nello specifico, di mettere in luce quali siano gli aspetti didattici che ne possano da un lato potenziare, ma anche limitare, i vantaggi sull'apprendimento.

La classe del percorso parallelo, infatti, presenta un contesto molto differente dalla classe che ha partecipato al progetto principale: si tratta di una classe terza di 27 alunni di una scuola primaria paritaria nei pressi di Roma, all'interno della quale l'insegnamento della matematica avveniva secondo modalità variegate, senza l'adozione esplicita dei metodi e delle strategie che, in linea con quanto previsto dalla Metodologia della Ricerca Variata, favoriscano esplicitamente un approccio attivo, autonomo e collaborativo all'apprendimento.

Uno dei punti su cui si è dovuto riflettere preliminarmente è stato il fatto che gli alunni non avessero avuto una formazione specifica sulla variazione e non fessero abituati, quindi, ad utilizzarla durante le attività didattiche quotidiane. L'idea è stata quella di promuovere la variazione attraverso domande come «è possibile cambiare qualcosa nel testo del problema in modo da creare un problema simile, ma non identico?» oppure «cambiereste qualcosa in questo problema?», ecc.

Un altro aspetto fondamentale riguardava il pensiero pre-algebrico: la classe non ha mai avuto l'opportunità di costruire espressioni e, soprattutto, di servirsi di esse per riflettere sul processo di ragionamento eseguito per raggiungere una determinata soluzione a un problema. Inoltre, lo stile di apprendimento della classe sembrava essere maggiormente indirizzato a una didattica di tipo individualistico, senza dedicare momenti specifici al lavoro di gruppo in ottica collaborativa. Trattandosi di un contesto classe decisamente differente da quello coinvolto nel percorso principale, lo scopo della ricerca è stato quello di osservare se tali differenze legate al contesto classe comportassero anche delle differenze legate all'apprendimento degli alunni e alla qualità della loro esperienza formativa. Inoltre, il secondo percorso ha contribuito ad arricchire la riflessione riguardo alle applicazioni didattiche della Metodologia della Ricerca Variata nella scuola primaria per l'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio.

4.9.2. Aspetti chiave del secondo percorso di sperimentazione

4.9.2.1. Variare

Gli alunni più esperti dal punto di vista logico-matematico hanno iniziato a variare spontaneamente già durante lo svolgimento dell'attività "Anagrammi I" (par. 4.1.2.). Quando, ad esempio, è stato chiesto loro cosa sarebbe successo se fossero state scelte ulteriori tre lettere diverse da quelle già utilizzate, un alunno ha esplicitamente affermato che sarebbe cambiato qualcosa, solo se fossero state aggiunte altre lettere e che, cambiando il tipo di lettere, si sarebbe ottenuto una variazione solo nel tipo di parole, ma non nel numero. La variazione del numero di lettere è stata più volte proposta dagli alunni durante lo svolgimento della prima parte del primo incontro. Di seguito, ne vengono riportati tre stralci esplicativi dalla trascrizione della prima mezz'ora del primo incontro:

Stralcio I

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R: ricercatore

R: «Quindi, state dicendo che io con tre lettere quante parole posso formare?»
A: «Sei!»
R: «E basta?»
A: «Sì»
R: «Cioè, di questa cosa siete sicuri?»
Alcuni alunni: «Sì»
Alcuni alunni: «No»
R: «Proviamo a cambiare lettere e vediamo se cambia qualcosa? Secondo voi, se vado a cambiare le lettere, cambia qualcosa?»
B1: «Se sono di più sì»
R: «Eh, ma io ora cambio solo il tipo di lettere»

B1: «Ah, allora no»
A: «No!»
B2: «Diventano solo parole diverse»

Stralcio II

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

B1: «Non si possono fare altre combinazioni»
R: «F. [B2] prima ha detto una cosa interessante… F., cosa hai detto prima quando sono passata vicino a te?»
B2: «Che… che poi… alla fine di quelle vediamo che quelle parole, chi ne forma di più»
R: «Non credo di aver capito bene, potresti ripeterlo gentilmente?»
B1: «Che EAR ne forma sei e pure OLD, però se ci sono altre, si formano più parole»
R: «Tipo?»
B2: «Tipo quattro lettere»
R: «Che c'entrano quattro lettere?»
B3: «La parola può diventare più lunga…»
R: «Cioè, se tu ci metti quattro lettere…»
B4: «Ci puoi fare più combinazioni!»
B2: «Con più lettere ci puoi fare più parole»

Stralcio III

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
R: ricercatore

R: «Allora, M. [B1] dice…»
B1: «… che con quattro lettere ci puoi fare più combinazioni»
B2: «Perché metti la O prima, poi la L, la D e poi ci metti…»
B1: «Magari ci puoi mettere una parola che inizia con loro e poi scambi»

R: «Ok, teniamolo a mente. Lo riprenderemo…»
B2: «Non lo possiamo fare un esperimento per vedere se con quattro ne escono di più?»
R: «Teniamolo a mente. Per ora finiamo di ragionare su questa cosa, poi possiamo ragionare sulle quattro lettere più tardi»

Il terzo incontro è stato specificamente dedicato alla variazione e in fase di progettazione si è dovuto considerare che gli alunni non avessero mai realizzato attività di problem posing e che, quindi, non avessero familiarità anche con la strategia dell' "E se?". Si è scelto di proporre la variazione agli alunni, informandoli di voler creare dei giochi simili a quello proposto nel primo incontro, chiedendo il loro aiuto. La classe ha prodotto numerosi tipi di variazione, variando sia il numero che la tipologia di oggetto. Nello specifico, hanno variato:

- Il numero delle lettere (Figura 4.9.1)

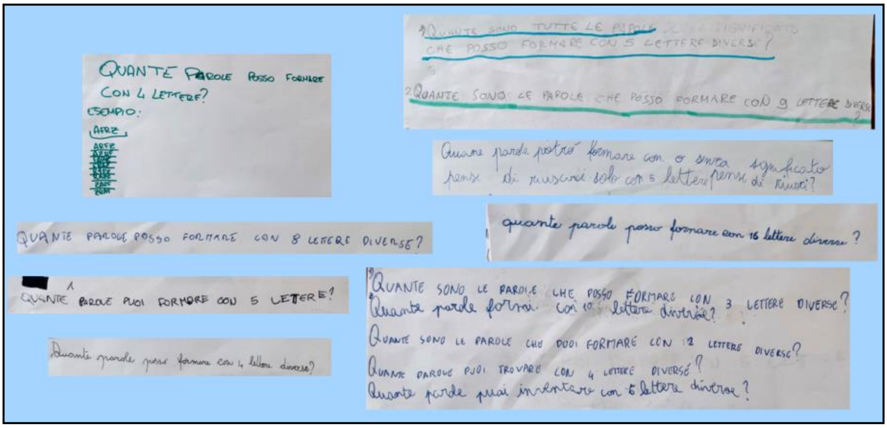


Figura 4.9.1. Variazione del numero delle lettere

- La tipologia di lettere (Figura 4.9.2), secondo un ragionamento analogo a quello con cui è stato generato il problema delle 5 vocali nel percorso principale (par. 4.3.) e, cioè, utilizzando la variazione della tipologia di lettere, è stata realizzata anche variazione del numero di lettere.

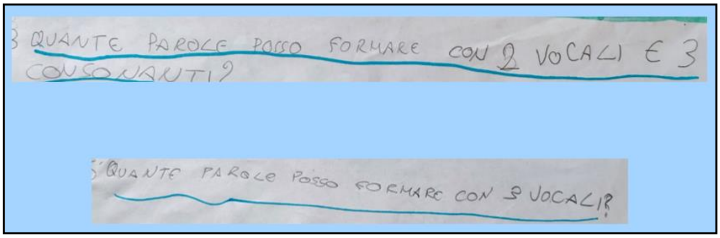


Figura 4.9.2. Variazione della tipologia di lettere

- La ripetizione degli elementi di *n*, sostituendo "lettere diverse" con "lettere uguali" o inserendo sia lettere "diverse" che "uguali" (Figura 4.9.3).

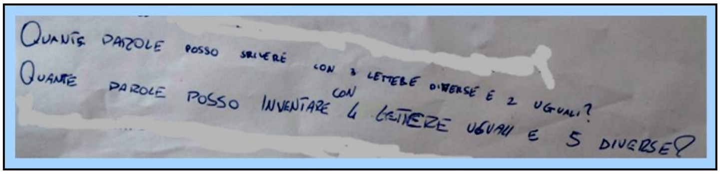


Figura 4.9.3. Variazione di "lettere diverse" con "lettere uguali"

- La tipologia di oggetto, sostituendo "parole" con "numeri". Nell'esempio riportato in figura (Figura 4.9.4.) la coppia di alunni ha inserito "numeri" anche lì dove sarebbe stato corretto scrivere "cifre", non considerandone la differenza.

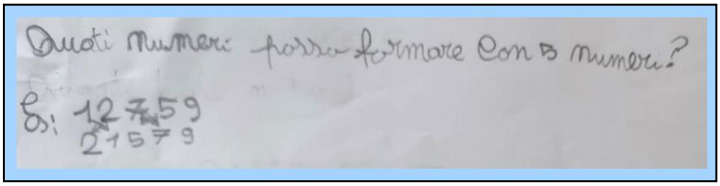


Figura 4.9.4. Variazione della tipologia di oggetto ("parole" con "numeri")

È interessante notare che una coppia abbia generato un problema che facesse riferimento esplicito agli anagrammi (Figura 4.9.5), mostrando probabilmente di averne intuito il meccanismo di funzionamento.

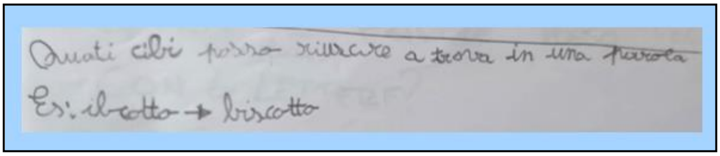


Figura 4.9.5. Variazione con riferimento agli anagrammi

4.9.2.2. Giustificare e argomentare

Sin dal primo incontro, in generale, la classe ha mostrato di essere molto intuitiva e di possedere un ottimo pensiero di tipo logico-matematico. Tale capacità sembra non aver avuto un ruolo significativo nella risoluzione dei problemi proposti durante il percorso. La particolarità è stata costituita dal fatto che, nonostante ci fosse la presenza di numerosi alunni molto dotati rispetto alla disciplina, nessuno abbia spontaneamente utilizzato un linguaggio matematico pre-algebrico per rappresentare la modalità di risoluzione dei problemi, se non quando esplicitamente richiesto dal ricercatore. Quando alla classe è stato chiesto di giustificare il numero totale delle parole che si possono formare con 3 lettere diverse, nessuno ha utilizzato espressioni o, in generale, numeri, ma la maggior parte ha fornito spiegazioni più narrative e, solo negli elaborati di 3 coppie erano presenti gli elenchi delle permutazioni di 3 lettere, utilizzati a titolo esemplificativo. Durante la discussione collettiva, gli alunni hanno iniziato spontaneamente ad elencare le parole secondo la strategia del contachilometri (par. 2.2.5.), la quale ha favorito l'individuazione degli aspetti chiave della struttura. In un primo momento, gli alunni hanno elaborato il loro ragionamento utilizzando strumenti grafici e, cioè, scrivendo con tre colori diversi le lettere poste in prima posizione in ciascuno dei tre gruppi di parole che iniziano con la stessa lettera (Figura 4.9.6.) e inserendo delle frecce per indicare lo scambio, all'interno dello stesso gruppo, tra le lettere in seconda e in terza posizione.

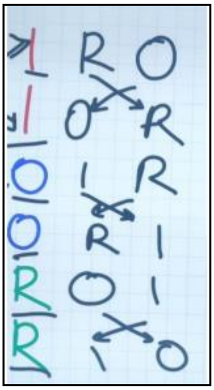


Figura 4.9.6. Spiegazione grafica della struttura delle permutazioni semplici di 3 lettere I

Quando è stato chiesto di provare a spiegare il loro ragionamento utilizzando gli strumenti della matematica, alcuni alunni hanno indicato un generico x2 in rifermento alle 2 parole che iniziano con la stessa lettera in prima posizione (Figura 4.9.7.). A differenza di quanto avvenuto nella classe che ha partecipato al percorso principale, è stato proposto di scrivere 1x2 per indicare che ciascuna lettera in prima posizione si ripetesse per due volte all'interno di ogni gruppo.

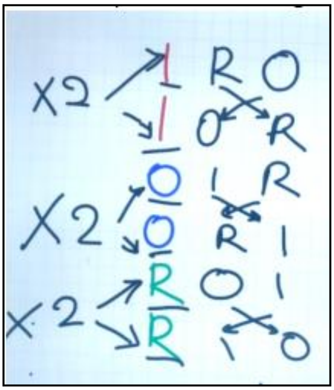


Figura 4.9.7. Spiegazione grafica della struttura delle permutazioni semplici di 3 lettere II

Alcuni alunni hanno formulato l'espressione 1x2x3 in riferimento alle permutazioni di 3 lettere (intervento 17), indicandola come la ripetizione per tre volte dei gruppi formati dalle due parole che iniziano con stessa lettera in prima posizione (interventi 4, 6, 7, 11, 15), come si può notare nello stralcio seguente:

A: alunni
B1: bambino/a 1
B2: bambino/a 2
B3: bambino/a 3
B4: bambino/a 4
R: ricercatore

1. R: «Bene… quindi alla domanda “quante parole puoi formare con tre lettere diverse” si può rispondere 1x2? Si capisce?»
2. Alcuni alunni: «Sì»
3. Alcuni alunni: «No»
4. B1: «Però tu puoi dire che si ripete…»
5. R: «Puoi dire che si ripete… e quante volte si ripete?»
6. B2: «Tre volte»
7. B3: «Questa cosa che si ripete due volte si ripete per tre volte»
8. R: «Vieni qui A. [B2]… provamelo a scrivere»
9. [*B2 va alla lavagna*]
10. R: «Una cosa che si ripete per due volte si ripete per tre volte…»
11. B1: «Cioè, A. [B2], io ho scritto che la lettera si ripete per due volte [indica 1x2]»
12. R: «Una lettera, la I, si ripete per due volte, poi metto un’altra lettera e si ripete per due volte e ne metto un’altra e si ripete per altre due volte…»
13. B4: «Sì»
14. R: «Quante volte devo fare questo gioco di ripetere?»
15. B1: «Per tre volte! Lo fai per tre volte, sì!»
16. R: «Che espressione scriviamo alla lavagna?»
17. B4: «È 1x2x3!»

Anche nel caso delle permutazioni di 4 lettere, dopo aver enumerato solo il primo gruppo delle 6 permutazioni che iniziano con la stessa lettera in prima posizione, gli alunni hanno elaborato l’espressione 6x4, giustificandola come la ripetizione di gruppi di 6 parole che iniziano con la stessa lettera. Nonostante la formulazione delle due espressioni, che di per sé costituiscono un risultato estremamente positivo, considerando la totale assenza di familiarità degli alunni con l’early algebra, bisogna evidenziare che dietro la loro formulazione non ci sia comunque la consapevolezza di una qualche utilità nell’esplicitare il processo di ragionamento, la quale potrebbe essere raggiunta attraverso un percorso di algebrizzazione precoce, considerando anche l'elevato livello in matematica della classe.

4.9.2.3. *Discussione collettiva*

Riuscire a condurre una discussione collettiva efficace si è rivelato uno degli aspetti più complessi del percorso, per via di una serie di ragioni che si cercherà di far emergere all'interno del discorso. Prima di tutto, il numero elevato di alunni (27) ha portato il ricercatore ha riflettere su quali input porter fornire, in modo da facilitare la partecipazione generale della classe. Sin da subito è stato possibile notare che gli alunni non avessero familiarità con tale modalità didattica, in quanto mostravano difficoltà a rispettare le regole di una buona conversazione di gruppo (ad esempio, prendevano la parola senza alzare la mano). Si è notata anche la presenza di dinamiche all'interno del gruppo classe che gli alunni tendevano a riproporre anche durante la discussione collettiva come, ad esempio, quella di dare la precedenza agli interventi degli alunni considerati dai compagni più "esperti" in matematica. Il ricercatore ha cercato di far in modo di far partecipare tutta la classe, ponendo domande indirizzate direttamente agli alunni meno partecipativi, ma che comunque davano l'impressione di voler intervenire nella discussione. La discussione collettiva costituisce uno dei cardini della Metodologia della Ricerca Variata, in quanto strumento principe di un apprendimento che nasce dalla costruzione attiva e partecipata degli alunni. In una classe in cui viene privilegiato un approccio all'apprendimento di matrice più individualistica e tradizionale, la discussione collettiva ha rappresentato un contesto nuovo per gli alunni, soprattutto, per quelli meno abituati a partecipare, in cui sperimentare collettivamente le proprie conoscenze e testare con mano l'importanza anche di un intervento che in un primo momento possa sembrare poco pertinente, favorendo anche la percezione della propria autoefficacia. Nonostante le difficoltà inizialmente riscontrate, infatti, col progredire degli incontri, la partecipazione è aumentata progressivamente e gli alunni hanno mostrato di intuire l'importanza del contributo di ciascuno, lasciando il turno a un compagno solitamente meno partecipativo o informando il ricercatore che un compagno avesse alzato la mano per intervenire. Nella maggior parte degli scambi la tendenza è spesso stata quella di rivolgersi al ricercatore, nonostante siano stati più volte forniti input affinché il confronto fosse tra pari. La motivazione è probabilmente dovuta al fatto che quello alla discussione collettiva sia un tipo di allenamento che dovrebbe essere condotto quotidianamente e con costanza per favorire una didattica della matematica che includa la discussione collettiva come modalità principale di costruzione della conoscenza, altrimenti, si rischia che soltanto gli alunni più abili possano trarne giovamento, ottenendo per gli altri il medesimo effetto di una lezione unidirezionale condotta dall'insegnante.

Conclusioni

Lo svolgimento del primo ciclo della ricerca sull'applicazione della Metodologia della Ricerca Variata all'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio in classe terza primaria ha stimolato una riflessione sulle applicazioni del metodo e sull'introduzione dell'insegnamento del calcolo combinatorio nel curriculum della scuola primaria. Di seguito si ragionerà su alcuni aspetti che il percorso di ricerca design-based ha permesso di mettere in luce.

Per quanto riguarda la variazione, si è potuto osservare che, sia nella classe abituata all'uso dell' "E se?", sia nella classe che non aveva mai avuto una formazione diretta all'uso della variazione e al problem posing, gli studenti, in special modo i più abili, hanno prodotto spontaneamente variazioni già a partire dal primo incontro, in cui è stata svolta l'attività "Anagrammi I" sulle permutazioni di 3 lettere. Tale dato risulta in linea con i risultati delle ricerche condotte da English (1991, 1993, 1999, 2005) e Maher & Martino (1996), in cui gli alunni tendevano a variare i problemi spontaneamente per individuare la struttura dei problemi (pag. 70). L'uso esplicito e mirato della variazione, così come previsto dalla metodologia MRV, però, ha fatto in modo che, anche gli studenti meno abili di entrambe le classi, producessero variazioni, da cui trarre spunti per le riflessioni attivate durante le discussioni collettive. Se non fossero state progettate attività mirate a favorire la variazione da parte di tutta la classe, tale prerogativa sarebbe rimasta probabilmente circoscritta all'uso esclusivo e spontaneo da parte degli alunni più "esperti", non garantendo necessariamente la produzione di una varietà di contesti tale da poter condurre efficacemente la ricerca delle analogie e delle differenze, utili a generalizzare la struttura sottostante. L'uso della variazione nell'insegnamento della matematica, infatti, è rivolto in modo specifico alla ricerca e al riconoscimento delle analogie e delle differenze tra contesti simili riconducibili alla stessa categoria di situazioni riferiti ad una certa classe di sistemi formali. Il suo utilizzo sistematico nella pratica didattica quotidiana fa sì che gli studenti sviluppino atteggiamenti tipici della "mente matematica" (pag. 51), quali la ricerca di similarità e differenze tra strutture e l'identificazione di famiglie di situazioni per cui è applicabile un certo concetto matematico. Si tratta del meccanismo alla base della generalizzazione, che permette di superare la separazione tra il piano formale del linguaggio matematico e quello delle situazioni concrete da affrontare nei contesti di vita quotidiana, e di andare oltre rispetto alla distinzione tra il "come è" e il "perché è", che spesso porta gli studenti alla mancata comprensione del significato della disciplina. Gli alunni che hanno partecipato al percorso principale di sperimentazione hanno mostrato, sin da i primi momenti dell'incontro, di elaborare tentativi di generalizzazione, mediante il confronto delle enumerazioni delle due terne di lettere ("ERA" e "IVA") per scorgere una struttura comune, identificandola come la ripetizione per tre volte di gruppi formati da due parole che iniziavano con la stessa lettera. Mentre nella seconda classe in cui è stata condotta la ricerca è stata individuata una similarità generica tra le due terne, gli alunni del percorso principale hanno attivamente esplicitato gli aspetti in comune, generando un'espressione (6 = 3x2) che esplicitasse la struttura emersa dalla rappresentazione. La tendenza a individuare le analogie e le differenze tra strutture è stata il motore che ha permesso agli alunni di individuare, problema dopo problema, la struttura delle permutazioni semplici a partire da $n = 1$ fino a $n = 5$ e di sviluppare un collegamento tra di esse. Ogni volta che è stato aumentato il valore di n, gli alunni, seguendo un ragionamento di tipo induttivo, hanno incluso la struttura precedente ($n - 1$) in quella successiva (n). Per fare un esempio esplicativo, quando si è passati alla struttura delle permutazioni di 5 lettere, gli alunni hanno ipotizzato che la struttura delle enumerazioni derivasse dalla ripetizione per 5 volte delle permutazioni di 4 lettere e, in fase di giustificazione, hanno elaborato l'espressione 5 x 24, esplicitando 24 come 4x3x2, in quanto espressione utilizzata nel caso di 4 lettere. L'utilizzo funzionale della variazione, infatti, non può limitarsi alla semplice produzione di problemi simili rispetto a un contesto dato, ma è finalizzata ad una ricerca attiva delle analogie e delle differenze, al fine di generalizzare strutture e relazioni tra concetti. Questo tipo di processo è strettamente connesso alla giustificazione e all'argomentazione, le quali sono alla base della costruzione della comprensione matematica a partire dall'esplicitazione del proprio ragionamento in maniera chiara e completa, facendo ricorso agli strumenti di rappresentazione, tra cui particolare rilievo riveste la rappresentazione di tipo aritmetico-simbolico. Come osservato nel paragrafo 1.2.4.6, la Metodologia della Ricerca Variata promuove l'uso delle rappresentazioni in quanto strumenti che, da un lato, consentono di visualizzare le strutture dei problemi e, dall'altro, nel caso delle rappresentazioni delle quantità numeriche, mediante l'elaborazione di espressioni favoriscono la possibilità di cogliere i processi e le relazioni che legano le quantità numeriche. Nel percorso di ricerca, gli studenti sono stati sollecitati ad esplicitare e argomentare il proprio ragionamento mediante l'uso di rappresentazioni come elenchi dei casi e tabelle, per visualizzare la struttura delle permutazioni semplici e delle disposizioni semplici, e ad utilizzare il linguaggio della matematica (linguaggio prealgebrico) per esplicitare il percorso di risoluzione dei problemi, mettendo in evidenza la relazione tra numero di elementi disponibili e numero totale dei casi. A tal proposito, come ipotizzato dai ricercatori in fase di progettazione, le due classi hanno mostrato grandi differenze, dovute al fatto che la classe che ha partecipato al percorso principale avesse già alle spalle la partecipazione ad un progetto di early algebra e che partecipasse a un tipo di didattica della matematica quotidiana basata sull'uso di rappresentazioni. Soltanto due alunni, appartenenti alla classe che è stata aggiunta in un secondo momento, hanno inserito elenchi nelle risposte ai problemi, utilizzati, però, esclusivamente per conteggiare i casi e non ai fini di una giustificazione della risposta. La classe del percorso principale, invece, ha mostrato di utilizzare le rappresentazioni aritmetiche non solo ai fini di una giustificazione, ma anche come strumenti di ragionamento, di cui disporre per riflettere sulla struttura e sulle relazioni tra quantità. Ogni volta in cui è stata elaborata un'espressione, gli alunni ne hanno sempre esplicitato i collegamenti con la struttura emersa dalle rappresentazioni grafiche, mostrando di aver acquisito la modalità operativa tipica della disciplina, la quale è stata rafforzata, attraverso l'uso sistematico che se ne è fatto all'interno del percorso sul calcolo combinatorio. Durante il percorso, infatti, i ricercatori hanno cercato di potenziare l'elaborazione di espressioni e rappresentazioni tabulari durante le discussioni collettive, utilizzandole come strumenti di ragionamento, su cui elaborare argomentazioni che potessero mettere in evidenza i significati che, incontro dopo incontro, gli alunni andavano sviluppando e che hanno condotto progressivamente alla generalizzazione di permutazioni semplici e disposizioni semplici come elementi della stessa classe formale. Risulta fondamentale esplicitare che l'aspetto della Metodologia della Ricerca Variata che ha permesso di mettere in luce le connessioni tra permutazioni semplici e disposizioni semplici come elementi della stessa classe di sistemi formali è proprio quello legato all'uso del linguaggio aritmetico-simbolico. L'uso delle rappresentazioni, in generale, ha fatto sì che gli alunni osservassero direttamente le strutture dei problemi, individuando le relazioni tra le quantità. In questo modo, gli alunni hanno progressivamente creato collegamenti tra le strutture attraverso l'individuazione di analogie e differenze, scorgendo regolarità che portassero a categorizzarle all'interno di una stessa famiglia. Ciò è avvenuto prima per le permutazioni semplici e poi, con un percorso conoscitivo analogo, per le disposizioni semplici. Ad un certo punto (incontro n°7, par. 4.7), è stato chiaro ai ricercatori che, nonostante le rappresentazioni costruite li portassero a scorgere delle analogie tra permutazioni semplici e disposizioni semplici sul piano strutturale, gli alunni continuassero a trattare le due strutture come distinte. L'ostacolo, di cui ampiamente si è parlato nel par. 4.8.1., costituito dal fatto che gli alunni non scorgessero il parallelismo tra disposizioni semplici e permutazioni semplici, è stato superato soltanto attraverso il confronto tra le due espressioni prodotte nel caso delle permutazioni di 5 elementi (problema sulle 5 vocali) e nel caso delle disposizioni di 5 elementi di classe 3 (problema "Si va in scena!"). Tale confronto ha favorito il riconoscimento delle analogie e delle differenze, individuando nel valore di k l'elemento discriminante. Gli alunni, infatti, variando spontaneamente il valore da attribuire a k, hanno modificato le espressioni, in modo da passare dalle disposizioni semplici di 5 elementi di classe 3 (5x4x3) alle permutazioni semplici di 5 elementi (5x4x3x2x1) e, in modo analogo, hanno variato nuovamente il valore di k, in modo da passare dalle permutazioni semplici di 5 elementi alle disposizioni semplici di 5 elementi di classe 4, esplicitando il fatto che, nonostante il problema fosse diverso (perché si richiede di assegnare un ruolo in meno rispetto al problema precedente), il numero dei casi restasse invariato, in quanto 5x4x3x2x1 (P_5) produce lo stesso risultato di 5x4x3x2 ($D_{5,4}$).

Nell'ambito della Metodologia della Ricerca Variata si propone di stimolare lo studente a spiegare mediante il linguaggio matematico il ragionamento utilizzato per risolvere un problema e, soprattutto, in fase di argomentazione, a esplicitare il significato dei termini utilizzati nelle espressioni prodotte, al fine di cogliere le relazioni tra le quantità numeriche e giungere progressivamente alla generalizzazione delle strutture e delle relazioni analizzate.

Un'ultima considerazione va fatta in merito alla discussione collettiva, in quanto aspetto fondamentale della Metodologia della Ricerca Variata che ha costituito il momento principale in cui sono state cocostruite le conoscenze degli alunni. Il metodo, come spiegato nel par. 1.2.4., accoglie pienamente la visione socio-costruttivista dell'apprendimento, il quale viene considerato un prodotto che nasce dall'esperienza attiva e partecipata degli alunni. La discussione collettiva va oltre la lezione partecipata, a cui si è più soliti incorrere nel caso di una didattica più tradizionale, in quanto costituisce un momento conoscitivo fondamentale, in cui la conoscenza viene prodotta mediante un processo di co-costruzione sinergica da parte degli alunni. Mediante gli interventi, le argomentazioni e gli esempi da loro stessi prodotti, gli alunni sperimentano un banco di prova in cui confrontare e verificare le loro ipotesi e quelle dei compagni, arrivando progressivamente alla costruzione di un prodotto di apprendimento condiviso, che tutti hanno contribuito a realizzare. Si tratta di una modalità di apprendimento complessa, che va progettata fin nei suoi minimi dettagli e che presuppone di fornire stimoli costanti affinché gli alunni sviluppino la capacità di ascoltare attivamente gli altri e di negoziare i significati. Stimoli di questo tipo dovrebbero essere forniti il più precocemente possibile, in modo che già da molto piccoli i bambini possano considerarla la via principale di accesso all'apprendimento. La discussione collettiva, così come intesa dall'approccio MRV, implica un impegno da parte dell'insegnante nell'osservare gli alunni e progettare le discussioni alla luce di tali osservazioni. In una classe maggiormente indirizzata a una visione individualistica dell'apprendimento, di stampo più "tradizionale", può essere faticoso realizzare una discussione collettiva efficace in tempi brevi, così come è accaduto per la seconda classe che ha partecipato alle attività sperimentali. Anche se all'inizio si sono presentati degli ostacoli dovuti all'estraneità della classe verso esperienze di apprendimento collaborativo, nel momento in cui hanno intuito che lo scopo fosse quello di arrivare ad una conoscenza comune, gli alunni hanno iniziato a rispettare i turni di parola e ad ascoltare gli interventi dei compagni, piuttosto che cercare di cogliere l'attenzione del ricercatore. Per quanto riguarda il percorso principale, gli alunni hanno sin da subito mostrato naturalezza nello svolgere attività di tipo collaborativo, in quanto modalità didattica prevalente di accesso al sapere. Anche nel percorso principale c'è stata la presenza di alunni che partecipavano più di altri e quella di alcuni che tendevano a rivolgersi maggiormente al ricercatore. In entrambi i casi, i ricercatori hanno sempre cercato di invitare i bambini a rivolgersi ai compagni e di fornire input in modo da favorire gli interventi anche degli alunni meno partecipativi. Si può ben capire, quindi, quanto la discussione collettiva sia un tipo di approccio che dovrebbe essere utilizzato quotidianamente e con costanza, in modo da realizzare una didattica della matematica che possa adottarla come modalità principale di costruzione della conoscenza.

La realizzazione del primo ciclo della ricerca in due classi distinte ha permesso di identificare gli aspetti su cui porre l'attenzione nel caso di un approccio all'introduzione dei primi concetti di calcolo combinatorio mediante la Metodologia della Ricerca Variata. La letteratura in merito all'insegnamento del calcolo combinatorio ha messo in luce il fatto che gli studenti, di fronte a problemi di calcolo combinatorio, mostrino la tendenza a variare spontaneamente i testi dei problemi, in modo da favorire l'emergere della struttura e delle relazioni tra le quantità. La ricerca design-based realizzata ha mostrato che tale tendenza si verifichi soprattutto per gli alunni che sviluppano in modo innato questo atteggiamento di ricerca. Soltanto mediante l'utilizzo di un metodo, come quello MRV, che faccia della variazione lo strumento principale per stimolare processi di ricerca e scoperta si può giungere ad un uso della variazione anche da parte degli studenti meno abili in matematica e, soprattutto, ad utilizzarlo in modo da favorire la generalizzazione dei concetti attraverso l'individuazione di similarità e differenze tra le strutture considerate. Per quanto riguarda la discussione collettiva, nelle ricerche di English emerge spesso che gli studenti inizino a confrontarsi tra loro per riflettere sulle strategie di enumerazione e sulla risoluzione dei problemi. La Metodologia della Ricerca Variata favorisce il dialogo tra pari e predilige una visione collaborativa dell'apprendimento fondata sulla co-costruzione attiva di significati che, nel caso dell'insegnamento dei primi concetti di calcolo combinatorio, ha potenziato il raggiungimento di una comprensione condivisa della struttura di permutazioni semplici e disposizioni semplici, attraverso lo scambio di interventi e l'esplicitazione dei ragionamenti degli alunni. Chiedere agli alunni di giustificare sempre le risposte elaborate, argomentando il processo di ragionamento per risolvere un problema di fronte ai compagni, permette a tutti gli alunni di entrare in contatto con ulteriori punti di vista diversi dal proprio e di integrare le diverse informazioni ritenute pertinenti, in modo da arricchire la propria conoscenza e di costruire un significato più complesso dell'argomento oggetto di studio. Un aspetto cruciale messo in risalto dal percorso è quello relativo all'algebrizzazione promossa dalla Metodologia della Ricerca Variata, in quanto, insieme alla variazione, la considera la via di accesso principale alla generalizzazione. Se da un lato la variazione ha permesso di accedere alla generalizzazione attraverso l'individuazione di analogie e differenze strutturali, l'uso del linguaggio matematico ha fatto in modo che gli alunni, esplicitando il significato di ciascun termine delle espressioni da loro stesse prodotte, giungessero alla comprensione della relazione tra permutazioni semplici e disposizioni semplici e alla loro conseguente integrazione nella medesima classe formale. L'uso del linguaggio matematico e l'analisi delle espressioni costruite sembrerebbe rappresentare la chiave di volta affinché gli studenti possano effettivamente categorizzare all'interno di famiglie di situazioni problemi di calcolo combinatorio che richiedano l'uso della stessa classe formale. In questo modo, si potrebbe riuscire a superare l'impasse comune degli studenti di fronte a problemi di calcolo combinatorio, i quali spesso non riescono ad individuare la struttura adeguata per la risoluzione di problemi anche molto simili a quelli già affrontati in precedenza. Ulteriori studi potrebbero essere sviluppati anche in altri gradi d'istruzione per indagare il ruolo dell'algebra in relazione ai problemi di calcolo combinatorio.

Un'importante osservazione riguarda gli strumenti offerti dalla Metodologia della Ricerca Variata all'insegnamento del calcolo combinatorio, i quali sono risultati estremamente efficaci nella classe che ha partecipato al percorso principale. Ciò porta a fare una riflessione riguardo ai presupposti didattici per un inserimento del calcolo combinatorio come parte del curricolo della scuola primaria. Come si è osservato nel secondo capitolo, l'insegnamento del calcolo combinatorio necessita di una didattica che metta al primo posto aspetti come argomentazione, giustificazione, variazione, discussione collettiva, i quali in maniera sinergica contribuiscono alla generalizzazione. Inoltre, il presente studio ha mostrato quanto il linguaggio algebrico sembrerebbe giocare un ruolo di prim'ordine nel favorire la piena comprensione dei concetti di calcolo combinatorio e una generalizzazione delle classi formali di cui si compone.

Si tratta di aspetti che non possono essere trattati soltanto *ah hoc*, in occasione di un percorso dedicato al calcolo combinatorio, ma che dovrebbero essere coltivati in modo precoce già a partire dai primi anni d'istruzione, con particolare riguardo all'algebrizzazione precoce. Si è osservato, infatti, che nella classe che è stata inserita in una fase successiva del progetto, variazione e discussione collettiva abbiano promosso la ricerca di analogie e differenze per individuare la struttura delle permutazioni semplici, ma che gli alunni abbiano soltanto improntato una prima generalizzazione, intuendo che il numero di permutazioni aumenta con il numero degli elementi considerati. L'aspetto cruciale che ha permesso, invece, agli alunni del percorso principale di generalizzare le strutture e le relazioni di permutazioni semplici e disposizioni semplici singolarmente e di metterle in relazione tra loro, riconducendole alla medesima classe formale, è stata la capacità degli alunni di esprimere i propri ragionamenti mediante rappresentazioni sia grafiche (tabelle ed elenchi ordinati) che numerico-simboliche. Attraverso l'esplicitazione del significato di ciascun termine delle espressioni prodotte, gli alunni di volta in volta hanno elaborato sul piano algebrico lo stesso confronto realizzato sul piano concreto, in un continuo rimando che li ha portati a categorizzare le strutture all'interno di famiglie di situazioni per le quali applicare le classi formali di calcolo combinatorio apprese. Il primo ciclo della ricerca design-based ha mostrato, dunque, che nell'ambito di una didattica improntata sui fondamenti della Metodologia della Ricerca Variata, l'insegnamento del calcolo combinatorio può costituire un contesto significativo in cui sviluppare contemporaneamente tutte quelle abilità che forgiano la "mente matematica" e di attivare processi inerenti alle tre aree del conoscere, argomentare e risolvere problemi, fondamentali per lo sviluppo della competenza in matematica.

Un'ultima considerazione riguarda la formazione dei docenti, la cui preparazione agli strumenti e metodi promossi dalla Metodologia della Ricerca Variata risulta essere un presupposto fondamentale per la sua applicazione. Dal momento in cui i protagonisti del percorso di apprendimento diventano gli alunni stessi, l'insegnante ha il compito fondamentale di guidarli opportunamente nella costruzione attiva della loro conoscenza. Per tale ragione, l'insegnante di matematica ha bisogno di osservare attentamente i propri alunni e conoscere le caratteristiche e gli stili di apprendimento, in modo da poter fornire gli input adeguati per favorirne gli apprendimenti. L'insegnante, inoltre, ha l'arduo compito di allestire attività significative che possano effettivamente elicitare gli apprendimenti e stimolare l'interesse degli alunni. Per quanto riguarda le discussioni collettive, quest'ultime implicano un'accurata progettazione preliminare in funzione degli obiettivi da raggiungere e delle domande da porre agli alunni per stimolare riflessioni su aspetti fondamentali dell'argomento trattato. In quanto tale, la discussione implica un'accurata formazione del docente, in modo che sappia fornire gli input adeguati, affinché gli alunni pongano attenzione a particolari aspetti funzionali alla comprensione e alla generalizzazione dei concetti. Si passa, dunque, da un insegnante inteso come trasmettitore di conoscenze a quello di guida esperta dei processi di apprendimento, in grado di attuare le giuste strategie di scaffolding che possano potenziare i processi già messi in atto dagli alunni stessi.

Il primo ciclo della ricerca design-based ha fatto in modo di mettere in luce gli aspetti chiave di un approccio al calcolo combinatorio mediante la Metodologia della Ricerca Variata e di osservarne le potenzialità nel caso di una didattica di matrice socio-costruttivista, ma anche i limiti che possono presentarsi nel caso di un suo utilizzo all'interno di una didattica di stampo più tradizionale. In quest'ultimo caso, infatti, ha portato in luce la necessità di implementare la didattica mediante il ricorso di strategie e strumenti che favoriscano da un lato un approccio collaborativo all'apprendimento e dall'altro un insegnamento della matematica che metta lo sviluppo del pensiero pre-algebrico in posizione di rilievo, in quanto consente di sviluppare un linguaggio mediante il quale esplicitare le strutture e le relazioni tra concetti. Auspicando una prosecuzione del progetto mediante la realizzazione di cicli successivi che possano condurre a nuove riflessioni sull'argomento, si sottolinea l'importanza di arricchire il campo della ricerca sia sull'insegnamento del calcolo combinatorio nella scuola primaria, in quanto argomento della matematica discreta che possa effettivamente favorire lo sviluppo della competenza matematica, sia sulle applicazioni della Metodologia della Ricerca Variata con lo scopo di favorire una didattica della matematica che possa essere maggiormente equa e di qualità.

Bibliografia

Arwadi, F., Bustang, B., Putri, R. I. I., & Somakim, S. (2017). *Small-Scale Design-based Research on Elementary School Children's Skills and Understanding of Combinatorics: A Case of Indonesia*. Makassar: Global RCI.

Arzarello, F. (2015). *Per un apprendimento sensato della matematica*. 2ª scuola estiva per insegnanti CIIM AIRDM (31 agosto 2015), Marina di Pietrasanta.

Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *42 (5), A-B*, 541-554.

Banchi, H. & Bell, R. (2008). The Many Levels of Inquiry. *Science and Children, 42(2)*, 26-29.

Baumanns, L. & Rott, B. (2023). Identifying metacognitive behavior in Problem-Posing Processes. Development of a framework and proof of concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 1381-1406. Doi: 10.1007/s10763-022-10297-z

Brown, S. I. & Walter M.I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3ª ed.). Lawrence Erlbaum Associates.

Brualdi, R. A. (2004). Introductory combinatorics (4th ed.). In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287-301. Doi: 10.1007/s10649-020-10008-x

Cai, J. & Rott, (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 61-71. Doi: 10.1007/s11858-023-01536-w

Calabrese, J.E., Capraro, M. M. & Thompsoson, C.G. (2022). The Relationship between Problem Posing and Problem Solving: a systematic Review. *International Education Studies,* 14(4). Doi: 10.5539/ies.v15n4p1

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing. In English, L. D. (2005). *Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning*. Doi: 10.1007/0-387-24530-8_6.

Cusi, A. (2020). L'argomentazione riflessiva come strumento a supporto dei processi di valutazione formativa: il ruolo fondamentale del docente. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *8*, 9-27. Doi: 10.33683/ddm.20.8.1

Cusi, A. et al. (6 novembre 2020). *La metodologia della ricerca variata: un'esperienza di didattica a distanza nei licei matematici*.

De Pretis, V. (15 maggio 2002). *La combinatoria. Primi elementi per la scuola dell'obbligo*. Disponibile da https://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/MD2014/Combinatoria.pdf

De Pretis, V. (2002). *La combinatoria. Primi elementi per la scuola dell'obbligo*. Disponibile da https://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/MD2014/Combinatoria.pdf

Decreto ministeriale n° 254 del 16/11/2012. *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, MIUR. Gazzetta Ufficiale n. 30 del 5 febbraio 2013. Reperibile in: www.gazzettaufficiale.it

Einstein A. & Infeld L. (1938). *The Evolution of Physics*. The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta. New York: Simon & Schulster.

Ellis, A. B., Tillema, E., Lockwood, E., & Moore, K. C. (2017). Generalization across domains: The relating-forming-extending generalization framework. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020), *ibid*.

English, L. D. (2005). *Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning*. Doi: 10.1007/0-387-24530-8_6

Hasan, M., Khan, M.S.H., Foysal Ahmed, A.K.M. (2024). Application of variation theory in STEM education: A comprehensive guideline for STEM teachers. *Jour (12)*.

Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Gazzetta Ufficiale n. 30 del 5 febbraio 2013, D.M. n° 254. Disponibile da: www.gazzettaufficiale.it

INVALSI (30 agosto 2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di matematica*.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics, Educational Studies in Mathematics. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783.

Kopparla, M. et al. (2019). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies, 45(6)*, 708-725. Doi: 10.1080/03055698.2018.1509785

Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry – a case study. *The Journal of Mathematical Behavior, 22(4),* 369-387. Doi: 10.1016/j.jmathb.2003.09.007.

Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Maher, C. A. & Yankelewitz, D. (2011). Representations as tools for building arguments. In Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194–214.

Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, Nj: Lawrence Erlbaum.

Menietti, E. & Bautino, M. (2 marzo 2023). Come sette ponti portarono a una nuova matematica. *Il Post*. Disponibile da https://www.ilpost.it/2023/03/02/sette-ponti-teoria-grafi/ .

Munroe, R. (2014). *What If? Serious scientific answers to absurd hypothetical questions*. New York: Harper Collins Publishers (trad it. *Cosa accadrebbe se? Risposte scientifiche a domande ipotetiche assurde*, Bompiani, Firenze, 2016, ed. digitale)

OECD (2016). *Ten Questions for Mathematics Teachers… and how PISA can help answer them*. Parigi: OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264265387.

Pang, M.F. & Ki, W.W. (2016). Revisiting the idea of "critical spects". *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 323-336. Doi: 10.1080/00313831.2015.1119724

Patera, S. (2022). Qualità e validità della ricerca qualitativa in educazione. Alcune riflessioni da un caso di studio. *Formazione e insegnamento*, *20*(1). Doi: 10.7346/-fei-XX-01-22_28.

Pedaste, M. (2016). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, *14*, 47-61, doi: 10.1016/j.edurev.2015.02.003.

Pellerey, M. (2006). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-Based Research). *Orientamenti pedagogici*, *52*(5), 721-737.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In Baumanns, L. & Rott, B. (2023). *Identifying metacognitive behavior in Problem-Posing Processes. Development of a framework and proof of concept* (pp. 1381-1406).

Silver, E.A. (2013). Problem posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 157-162. Doi: 10.1007/s10649-013-9477-3

Sriraman, B., & English, L.D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. *The Mathematics Teacher*, *98*(3), 182-191.

Università di Pisa, dipartimento di matematica (2017). *Il calcolo combinatorio*. Disponibile da https://people.dm.unipi.it/gelli/2017/chimica17/combinatoria2.pdf

Zhang, L. et al. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: the impact of task format and its relationship to problem solving. *Mathematics Education*, *54*, 497-512. Doi: 10.1007/s11858-021-01324-4

Sitografia

https://it.oiler.education/ (ultima consultazione: 15 maggio 2024)

www.gazzettaufficiale.it (ultima consultazione: 15 maggio 2024)

www.iea.nl/studies/iea/timss (ultima consultazione: 21 aprile 2024)

www.ilpost.it/2023/03/02/sette-ponti-teoria-grafi/ (ultima consultazione: 4 aprile 2024)

www.invalsi.it (ultima consultazione: 12 marzo 2024)

www.mat.uniroma2.it/~gealbis/MD2014/Combinatoria.pdf (ultima consultazione: 4 aprile 2024)

www.oecd.org/pisa/ (ultima consultazione: 21 aprile 2024)

www.progetto"ArAl".it/ (ultima consultazione: 15 maggio 2024)

www.xkcd.com/ (ultima consultazione: 15 marzo 2024)

www.youtube.com/watch?v=3fMC-z7K0r4 (ultima consultazione: 20 marzo 2024)

Finito di stampare nel mese di Maggio 2024
presso il Centro Stampa Pioda Imaging S.r.l., Roma