

FREGI E TASSELLAZIONI DEL PIANO PER GUARDARE LA REALTÀ CHE CI CIRCONDA CON OCCHIO MATEMATICO

Ilaria Bencivenni (1), Luigi Bernardi (2), Federica Ferretti (3), Luigi Tomasi (3)

(1) IIS “Rita Levi Montalcini” Argenta (Ferrara)

(2) Aix-Marseille Université

(3) Università di Ferrara

bencivenni.ilaria@iisap.edu.it

luigi.bernardi@univ-amu.fr

Abstract

In questo articolo viene descritta una sperimentazione di attività progettate a livello nazionale all'interno del Progetto Klein del Liceo Matematico. La sperimentazione riguarda lo studio delle isometrie del piano ed è finalizzata alla creazione di fregi e tassellazioni. Verranno analizzate le varie fasi della sperimentazione con particolare attenzione al ruolo delle tecnologie, risorse indispensabili per la realizzazione delle attività.

Parole-chiave

Isometrie, didattica laboratoriale, GeoGebra, Tales Game, Liceo matematico

INTRODUZIONE

La progettazione della sperimentazione ha preso spunto dalle riflessioni nate all'interno del gruppo nazionale di ricerca del “Progetto Klein” coordinato da Ferdinando Arzarello e da Ornella Robutti dell'Università di Torino che si pone come obiettivo la trasposizione didattica delle “Vignette” dell'International Klein Project (blog.kleinproject.org). In particolare, la sperimentazione si riferisce alla trasposizione didattica inerente la vignetta *Symmetry Step by Step* (<http://blog.kleinproject.org/?p=1381>).

La sperimentazione ha coinvolto un gruppo di studentesse e studenti di seconda liceo scientifico sia a indirizzo tradizionale che a indirizzo scienze applicate dell'I.I.S. Rita Levi Montalcini di Argenta (FE) che hanno aderito al progetto in maniera volontaria. La sperimentazione è stata effettuata in due periodi, da aprile a maggio 2021 e da settembre a ottobre 2021 per un totale di 20 ore.

L'attività didattica, di tipo laboratoriale, svolta sia in presenza che a distanza, si è avvalsa di vari software didattici quali il software di geometria dinamica *GeoGebra* e *GeoGebra Classroom* per la gestione e il monitoraggio delle attività, *Frieze Symmetry* e *Wallpaper Symmetry* per lo studio e l'analisi dei gruppi di isometrie dei fregi e delle tassellazioni del piano, *Tales Game* per la riproduzione di specifiche tassellazioni del piano.

Gli obiettivi della sperimentazione sono stati:

- la conoscenza delle isometrie del piano, la loro composizione e gli elementi invarianti;
- l'individuazione di alcuni elementi fondamentali per la realizzazione e la classificazione di semplici fregi e tassellazioni del piano, anche mediante l'utilizzo di specifici software didattici;
- il riconoscimento delle isometrie nel mondo reale, di regolarità di una pavimentazione, di simmetrie in opere d'arte e regolarità in natura.

LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

Fase 0: test di valutazione diagnostico-formativo

La prima fase della sperimentazione è consistita nella somministrazione di un test composto da 24 quesiti tratti da prove INVALSI di matematica dei gradi 6, 8 e 10. La scelta dei quesiti è stata fatta con Gestinv (www.gestinv.it), il database delle prove INVALSI, tramite lo strumento “parole chiave”, ricercando i quesiti in riferimento a: “simmetria assiale”, “simmetria centrale”, “centro di simmetria”, “angolo di rotazione”, “rotazione di figure piane”, “traslazioni e rotazioni nello spazio”, “traslazione di figure piane”, “trasformazioni geometriche”. In linea con gli obiettivi della progettazione didattica, non sono stati presi in considerazione i quesiti con riferimenti al piano cartesiano, coordinate dei punti e funzioni. Il test è stato progettato per indagare le conoscenze degli studenti sul tema delle isometrie; è stato somministrato in modalità telematica non anonima attraverso Google moduli.

Il test ha svolto una funzione diagnostico-formativa nel senso di Black e Wiliam (1997); l'identificazione delle lacune ha determinato la progettazione delle attività. I quesiti che hanno totalizzato più del 50% di risposte errate sono stati quelli in cui è richiesta l'individuazione dell'asse di simmetria di determinate figure; a questo aspetto è stata rivolta particolare attenzione durante tutte le fasi della sperimentazione.

Fase 1: “Le schede sulle isometrie”

La sperimentazione è iniziata con l'esplorazione del software didattico GeoGebra; dopo un primo momento dedicato all'utilizzo dei principali comandi di GeoGebra, gli studenti sono stati liberi di esplorare in autonomia le schede relative alle isometrie raccolte nel libro di GeoGebra appositamente predisposto.

Tutte le schede conducono alla costruzione e successiva esplorazione delle isometrie, eventualmente anche con app di GeoGebra già predisposte.

Nella maggior parte delle schede, si richiede di fare delle congetture sulla costruzione eseguita e, in taluni casi, si richiede la verifica della congettura mediante un'applicazione pre-impostata. Tutte le schede si concludono con la richiesta di esplicitazione delle conoscenze acquisite (D'Amore, 1999).

Le schede sono state raccolte in un libro di GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/vvwjqx5z>) e fruite dagli studenti in maniera autonoma.

In questa fase sono state svolte le schede riguardanti la simmetria assiale, la traslazione, la rotazione e la simmetria centrale come caso particolare di rotazione (di 180°).

Le principali difficoltà si sono riscontrate nello svolgimento delle schede relative alla rotazione nel piano circa la definizione degli elementi che la caratterizzano, in particolare nell'individuazione dell'angolo di rotazione.

Per quanto riguarda le attività relative alla scheda sulla simmetria centrale, gli ostacoli principali si sono riscontrati nel riconoscere che i punti corrispondenti sono, in questo caso, allineati con il centro di rotazione.

Infine, diversi studenti hanno intuito gli elementi caratterizzanti la traslazione senza identificarli chiaramente. Nessuno studente ha collegato la traslazione ai vettori nonostante li avessero già incontrati nelle ore di fisica durante il precedente anno scolastico.

Fase 2: I fregi con GeoGebra e con Frieze symmetry

Una volta affrontate le attività inerenti le isometrie, gli elementi che le caratterizzano e i loro invarianti, è stata fornita la definizione di *fregio*. Successivamente è stato proposto un tassello con cui realizzare una decorazione lineare usando le trasformazioni analizzate: è stato richiesto dapprima di costruire un fregio utilizzando solo il vettore traslazione e poi anche le altre isometrie.

Gli studenti hanno dimostrato grande creatività nella realizzazione dei fregi; alcuni di loro hanno operato simmetrie anche rispetto ad assi che non erano né paralleli né perpendicolari ai lati della striscia di piano che avrebbe dovuto contenere il fregio. Questa situazione ha dato la possibilità di focalizzare

l'attenzione sul fatto che le isometrie da utilizzare sono unicamente le isometrie che lasciano invariato il fregio.

Dopo questo primo approccio è stato chiesto agli studenti di creare un fregio con il software web *Frieze symmetry* (<https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/frieze.html>) e di cercare di scoprire e descrivere come operano le sette “sigle”, ovvero i sette gruppi di isometria dei fregi, presenti nel software. Occorre qui sottolineare che non si è mai parlato di gruppo in quanto struttura algebrica, ma si è sempre fatto osservare quali sono le proprietà di ogni isometria, con particolare riguardo all'esistenza dell'identità e dell'inversa di ogni isometria.

In questa fase, la più apprezzata dal punto di vista del coinvolgimento emotivo, gli studenti oltre ad aver evidenziato una notevole propensione artistica hanno anche familiarizzato con le isometrie e con la loro composizione. Particolare attenzione è stata posta infatti, per ciascun gruppo di isometria analizzato, alle isometrie coinvolte e alla loro composizione. In figura 1 sono mostrati alcuni dei fregi realizzati dagli studenti.



Figura 1. Fregi realizzati dagli studenti

La condivisione dei lavori svolti ha permesso agli studenti di fornire una descrizione chiara e formale dei sette gruppi di isometria dei fregi e soprattutto ha veicolato una maggiore consapevolezza del significato delle sigle riportate nel software (per esempio, che la “*m*” sta per *mirror* e che i numeri 1 e 2 rappresentano le rotazioni minime che riportano la striscia in sé stessa, rispettivamente di 360° e di 180°).

Un aspetto rilevante di questa fase ha riguardato il concetto di punto fisso di una trasformazione: se da un lato è stato molto facile per la classe individuare figure invarianti per simmetria assiale o per rotazione, più difficile è stato individuare figure invarianti per traslazione poiché gli unici “oggetti” che hanno questa proprietà sono illimitati, per esempio una retta. Molto utile in questo contesto è stato richiamare il celebre esempio dell'albergo di Hilbert per veicolare il concetto di infinito; questo ha richiesto agli studenti uno sforzo di astrazione.

Gli studenti non hanno incontrato particolari difficoltà, invece, nel riconoscere le isometrie coinvolte; in particolare hanno riconosciuto facilmente anche la glissosimmetria, nonostante non fosse ancora stata affrontata come isometria a sé, ma solo come composizione di due isometrie particolari.

Anche in questa attività, le uniche criticità emerse sono state relative alla corretta identificazione degli elementi caratterizzanti le isometrie: assi di simmetria, centro e angolo di rotazione, vettore traslazione. In particolare, per quanto riguarda i gruppi $p112$ e $pmm2$, le principali difficoltà sono emerse nel riconoscimento della simmetria centrale come particolare rotazione (di 180°).

Nell'ultima fase dell'attività è stato assegnato un tassello, “il tassello del cuore”, chiedendo alla classe di realizzare con GeoGebra le sette tipologie di fregi. Questa attività ha consentito agli studenti sia di consolidare le conoscenze relative ai gruppi di isometria dei fregi sia di riconoscere le trasformazioni che mandano un fregio in sé stesso.

Questa fase si è conclusa con l'analisi e la compilazione di un diagramma di flusso in cui gli studenti hanno classificato alcuni fregi. L'attività ha permesso di formalizzare l'esistenza e unicità dei sette gruppi di isometria dei fregi.

Fase 3: verso le tassellazioni del piano

In questa fase sono state approfondite le composizioni di isometrie utilizzando diversi software. Inizialmente sono state esplorate con GeoGebra la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli e con assi incidenti, la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro, la composizione di due simmetrie centrali, la glissosimmetria come composizione di una simmetria assiale e una

traslazione e la composizione di due traslazioni. Si tratta di conoscenze necessarie per comprendere le tassellazioni del piano.

Successivamente, sempre utilizzando il software GeoGebra, abbiamo proposto attività di esplorazione e congettura finalizzate all'individuazione dei poligoni regolari che tassellano il piano. In un secondo momento si è estesa la possibilità anche a triangoli e a quadrilateri qualunque. In particolare, nel caso di triangoli e quadrilateri si è richiesto agli studenti di tassellare il piano utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni di cui dovevano individuare i vettori.

L'analisi di alcuni dei diciassette gruppi di isometrie delle tassellazioni del piano è stata effettuata utilizzando il software web *Wallpaper Symmetry* l'analogo di *Frieze Symmetry* per i fregi (<https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html>).

Le attività conclusive sono state realizzate tramite il software *Tales Game* (<https://oiler.education/tales>), che consente di creare tassellazioni a piacere, creando un tassello base per poi disporlo in una griglia. L'attività è cominciata selezionando una figura – i.e. il tassello base – scegliendo fra quadrato, rettangolo, rombo o triangolo. Si è decorato quindi il tassello tracciando rette – più propriamente segmenti - che uniscono punti che si trovano sul bordo del tassello, come mostrato in figura 2.

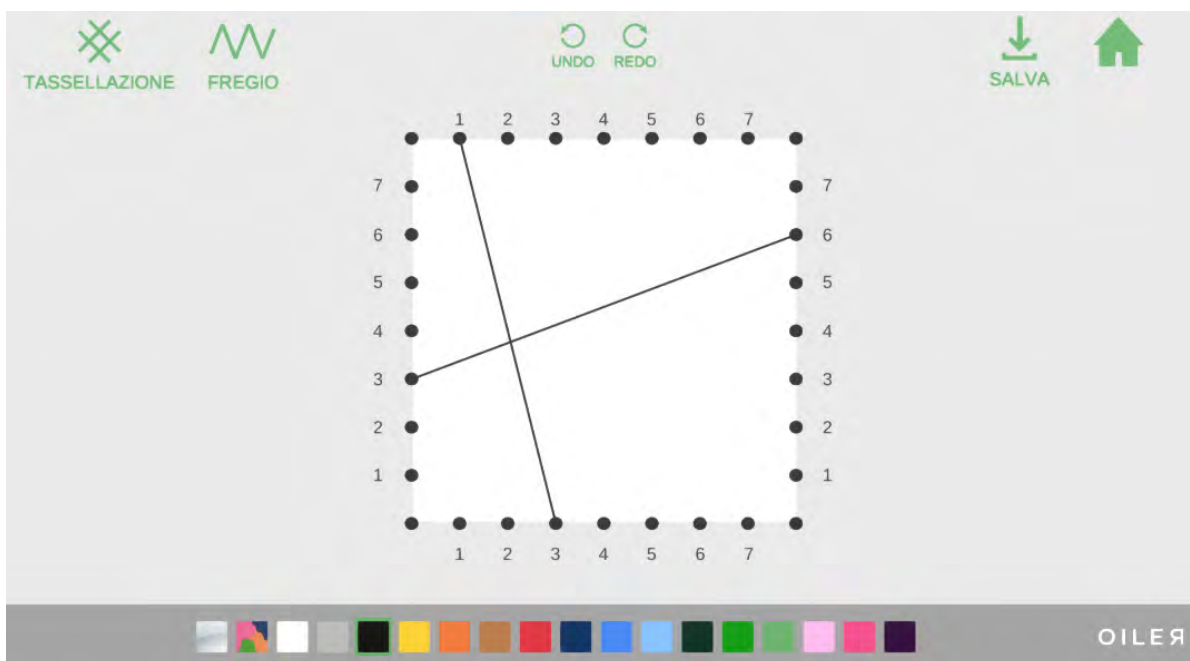


Figura 2. Costruzione del tassello iniziale

Il vincolo di disegnare esclusivamente rette, pur sembrando relativamente stringente, permette di focalizzare meglio le isometrie interne al tassello. Questo vincolo offre comunque la possibilità di creare involucri approssimando coniche come la parabola o l'ellisse, come mostrato in figura 3.

Una volta terminata la configurazione del tassello, si è proseguito con la modalità "tassellazione", con cui il tassello viene replicato più volte in modo da creare una pavimentazione. Prima di essere posizionato, il tassello può essere trasformato tramite rotazioni e simmetrie assiali (figura 4).

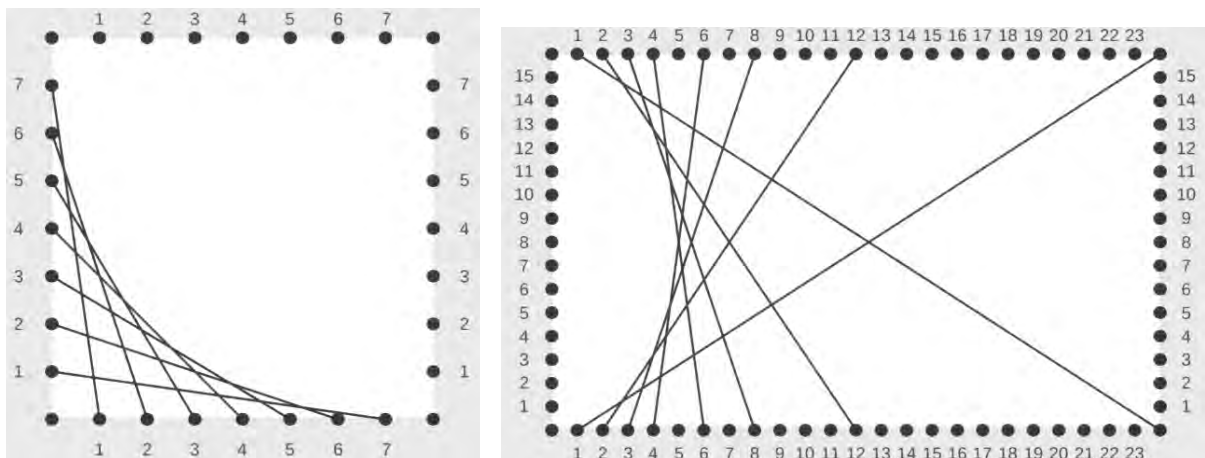


Figura 3. Il ramo di parabola sulla sinistra è ottenuto collegando fra loro numeri sui lati adiacenti con somma costante mentre la semiellisse sulla destra numeri su lati opposti con prodotto costante

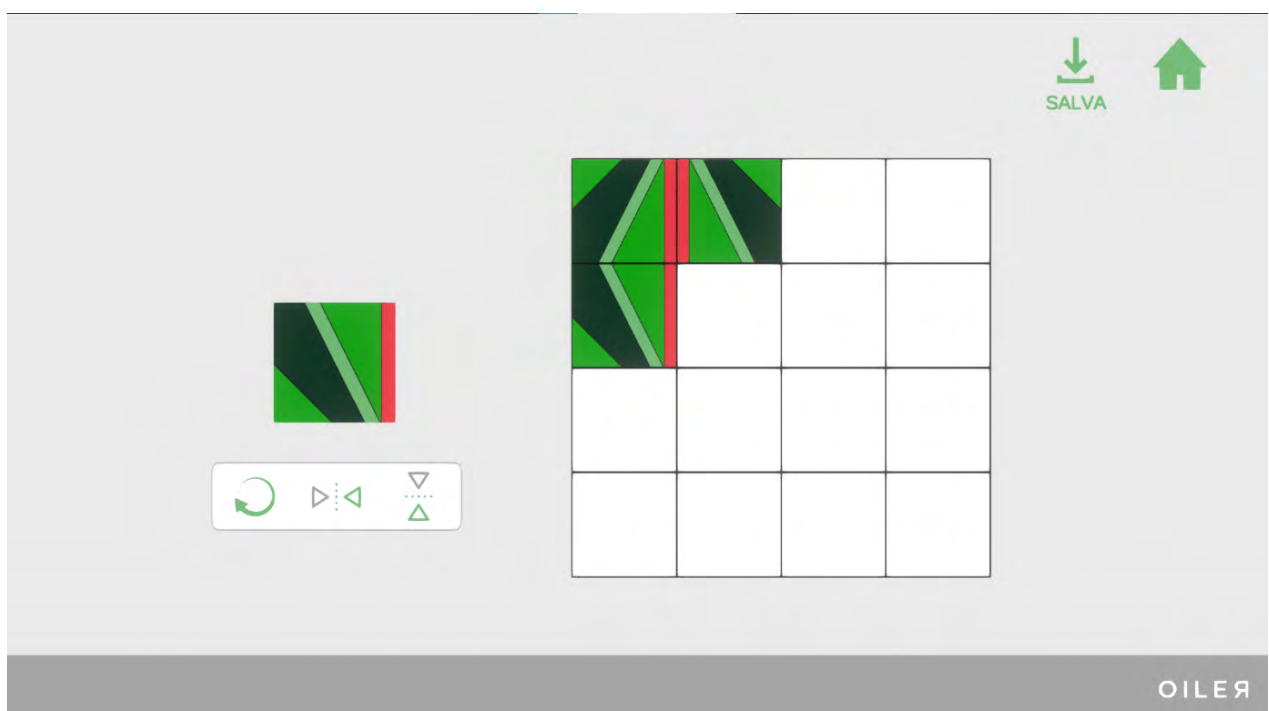


Figura 4. Realizzazione di una pavimentazione con tassello quadrato

Nella prima fase dell'attività la classe ha esplorato liberamente il software, analizzando poi i legami fra le proprietà aritmetiche dei numeri disposti sul bordo del tassello e le proprietà geometriche delle configurazioni ottenute. In particolare, sono state create tassellazioni in cui compaiono ellissi e archi di parabola (figura 5).

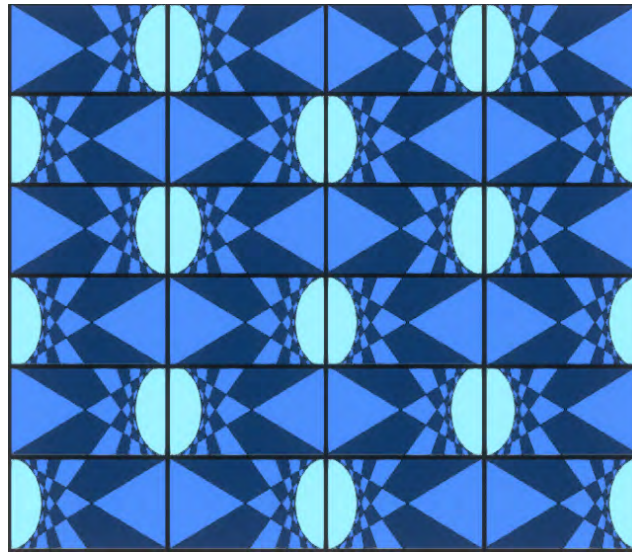


Figura 5. Tassellazione con ellissi

Durante la seconda attività si è proposto di creare una tassellazione seguendo il catalogo delle tassellazioni reperibile sulla pagina del software [<https://oiler.education/tales/catalogo>]. Il catalogo delle tassellazioni fornisce, per ciascuno dei diciassette gruppi di isometrie, istruzioni su come realizzarlo in uno o più modi (Figura 6).

p1 (O)

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

COME SI FA?

FIGURA DA SELEZIONARE:
quadrato o rettangolo.

CONFIGURAZIONE INTERNA
DEL TASSELLO: libera, priva
di simmetrie interne.

TASSELLAZIONE: il tassello
si ripete uguale a sé stesso
per traslazione in entrambe le
direzioni.

VISUALIZZA ALTERNATIVA

Figura 6. Per ogni gruppo di isometria, e.g. P1, viene indicata la figura da selezionare, come comporre il tassello e come disporlo all'interno della griglia.

Tuttavia, anche seguendo le istruzioni, gli studenti hanno incontrato qualche ostacolo nella costruzione. Proprio dalla discussione degli errori commessi durante l'attività e dalla loro contestualizzazione, gli studenti hanno acquisito una maggiore comprensione delle tassellazioni stesse.

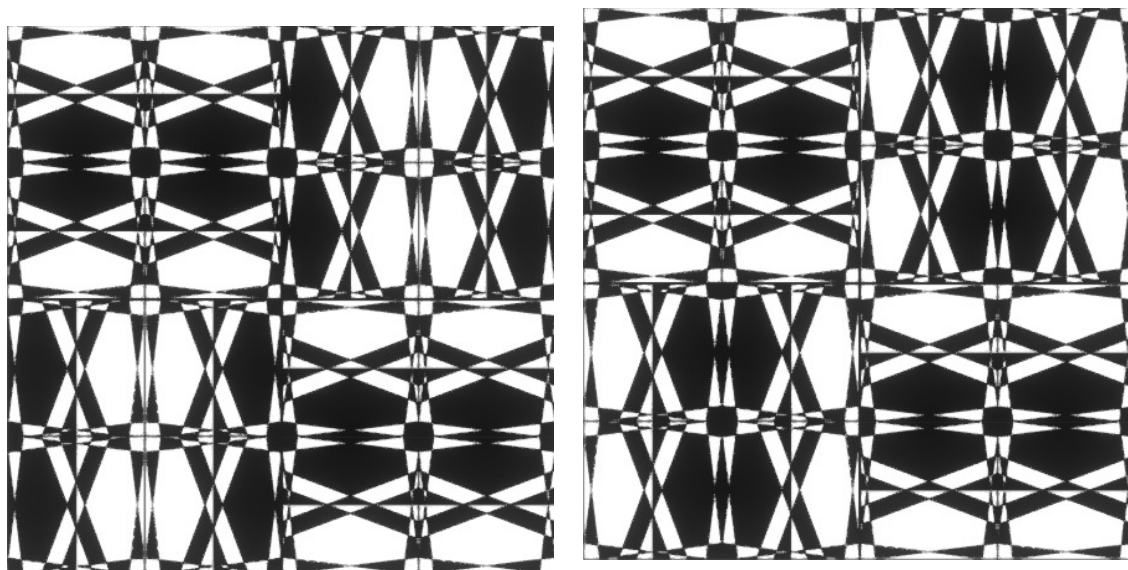


Figura 7. Esempio di tassellazione P4G errata sulla sinistra poi corretta sulla destra.

Nella terza e ultima attività si è richiesto di riprodurre una tassellazione realmente esistente, per poi classificarla usando il catalogo citato. Per questo è stato necessario identificare un possibile “tassello base”, quindi riprodurlo correttamente ed infine disporlo nella griglia in maniera opportuna.

La tassellazione con cui è cominciata l’attività è partita dalla fotografia di una pavimentazione di Lisbona (Figura 8) presente nella *vignette Symmetry step by step* (<http://blog.kleinproject.org/?p=1381>).

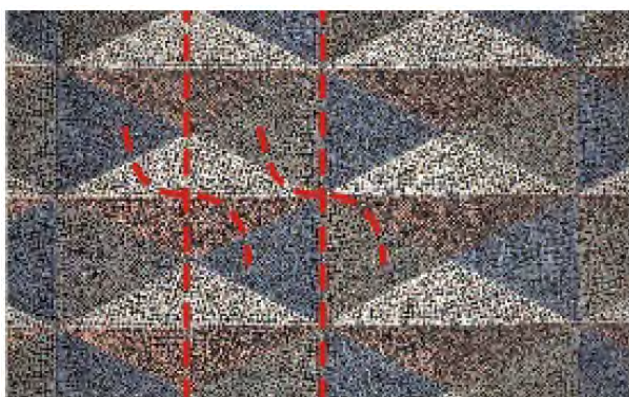


Figura 8. Pavimento vicino al monastero di San Gerolamo, Lisbona (gruppo PG)

La pavimentazione, pur non sembrando complicata da riprodurre, nasconde diverse insidie strutturali. Molti studenti l’hanno infatti inizialmente riprodotta come P1, senza accorgersi della glissosimmetria presente. Anche in questo caso l’errore è stato un utile passaggio per analizzare non solo il gruppo PG ma anche i gruppi P1, PM e P2.

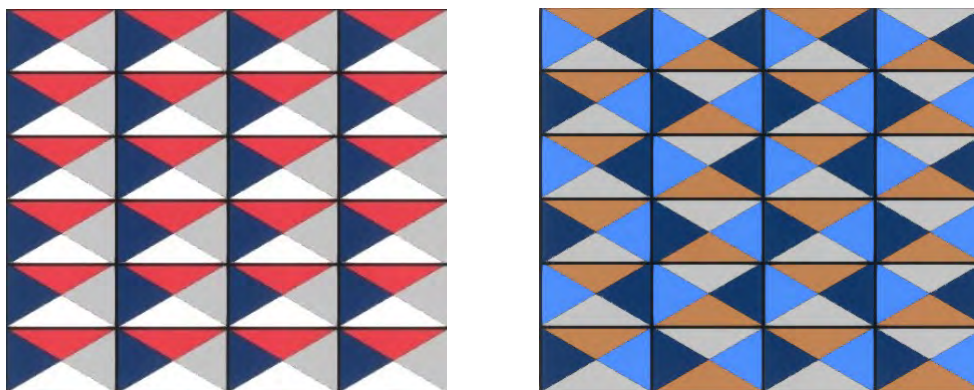


Figura 9. A sinistra riproduzione errata P1, a destra la corretta PG

Isometrie e realtà

Fin dall'avvio della sperimentazione è stato chiesto agli studenti di provare a osservare la realtà con gli occhi del matematico per riconoscere eventuali isometrie. Abbiamo messo a disposizione un *padlet* in cui gli studenti potevano caricare foto di elementi della realtà circostante che presentavano isometrie. Per vivere in maniera esperienziale i sette gruppi di isometria dei fregi è stata svolta un'attività che è stata poi intitolata "Le isometrie danzanti": gli studenti hanno riprodotto i sette gruppi di isometrie dei fregi sia in modalità statica, per creare un fregio vivente, sia in modalità dinamica con passi danzanti.

CONCLUSIONI

Alla fine delle attività è stato riproposto il test iniziale. In generale, c'è stato un aumento di risposte corrette rispetto ai risultati ottenuti nella somministrazione iniziale. In particolare, la percentuale di risposte corrette è nettamente incrementata per quanto riguarda i quesiti inerenti all'individuazione degli assi di simmetria delle figure proposte. Diversi momenti di valutazione formativa in itinere, hanno evidenziato un accrescimento delle conoscenze e delle competenze degli studenti per quanto riguarda il tema delle isometrie e delle loro composizioni. L'utilizzo dei diversi software, oltre a stimolare la motivazione e l'interesse anche durante i momenti svoltosi a distanza, ha favorito l'acquisizione di diversi concetti.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano i colleghi dell'I.I.S. "Rita Levi Montalcini" di Argenta (FE) che hanno partecipato alla progettazione e alla conduzione della sperimentazione, Delia Farolfi e Laura Resta e tutti i colleghi del Progetto nazionale Klein del Liceo Matematico, in particolare del gruppo che si è occupato della trasposizione della *vignette* "Symmetry step by step".

BIBLIOGRAFIA

- D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276
- Black, P. J. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice*, 5(1), 7-73.