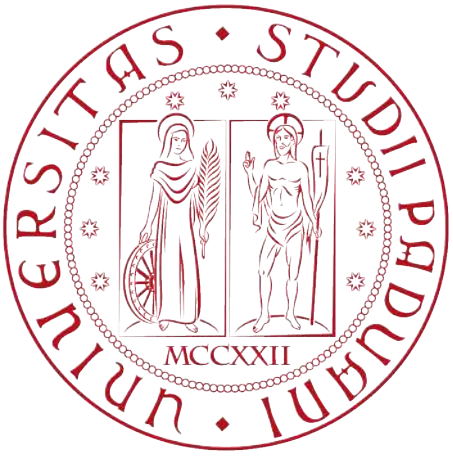
Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica



Le tassellazioni del piano: aspetti matematici e didattici

Tesi di Laurea Magistrale

Relatore: Prof. Francesco Ciraulo

Correlatore: Prof. Luigi Tomasi

Candidato

1237017

Andrea Troietto

Anno Accademico 2021/2022

23 Settembre 2022

Indice

Introduzione **1**

0 Richiami teorici **5**

0.1 Richiami sulle isometrie del piano 5

0.2 Gruppi finiti di isometrie nel piano 12

1 Fregi e mosaici **19**

1.1 Gruppi discreti di isometrie del piano 19

1.2 Successioni esatte corte e ricostruzione di gruppi 24

1.3 Fregi 27

1.4 Mosaici 32

2 Tassellazioni del piano **53**

2.1 Tassellazioni regolari 59

2.2 Tassellazioni uniformi 65

2.3 Tassellazioni monoedriche 78

2.4 Tassellazioni aperiodiche 110

3 Tassellazioni della sfera e di superfici **125**

3.1 Richiami sulle superfici 125

3.2 Tassellazioni regolari di superfici 132

4 Proposte didattiche **143**

4.1 Le trasformazioni del piano nei *curricula* scolastici 143

4.2 Sulle isometrie 148

4.3 Sulle tassellazioni 158

4.4 Su fregi e mosaici 160

Bibliografia e sitografia **167**

Introduzione

L'argomento principale della presente Tesi Magistrale sono le tassellazioni; questo ambito di ricerca matematica è estremamente vasto e non ci siamo posti l'obbiettivo di coprire interamente l'argomento. Il nostro intento è di fornire una panoramica chiara e completa delle principali famiglie di tassellazioni del piano, per poi estendere la discussione a una particolare famiglia di tassellazioni sulle superfici. Abbiamo quindi svolto un lavoro di rielaborazione, sistematizzazione e semplificazione di risultati presenti in letteratura.

L'idea nasce dal voler affrontare un argomento che potesse essere rilevante e applicabile anche nella Scuola Secondaria di II grado e abbiamo optato per le tassellazioni; questo tema, che permea la nostra esistenza, dalla natura all'architettura, permette di creare un forte legame tra Matematica e realtà e di comprendere come la Matematica sia uno degli strumenti che l'umanità utilizza per osservare, analizzare e comprendere ciò che la circonda.

Gli obbiettivi principali di questa tesi sono due: innanzitutto fornire una raccolta di informazioni e dimostrazioni che siano il più chiare e leggibili possibile, evitando dimostrazioni estremamente tecniche se non necessario. Durante la fase iniziale di ricerca per la stesura dell'elaborato, mi sono accorto che in letteratura non è presente un testo in cui vengano esposti questi argomenti in maniera organica e tramite un linguaggio semplice ma matematicamente corretto, di modo che sia leggibile anche da chi non ha una formazione matematica superiore. Ad esempio, esistono testi come *"Tilings and Patterns"* di Grünbaum e Shephard [GS87], estremamente completi sull'argomento, ma che utilizzano un linguaggio molto tecnico e molte dimostrazioni non sono presenti. D'altra parte ci sono diversi testi divulgativi, come *"Una via di Fuga"* di Piergiorgio Odifreddi, che accennano solamente all'argomento

senza entrare in dettagli matematici. La presente tesi ha l'obbiettivo di porsi "nel mezzo" e fornire, con strumenti il più semplici possibili, dimostrazioni chiare ed esaustive. Particolare importanza è stata data alle costruzioni e ai disegni, realizzati *ex novo* per questa tesi tramite il software GeoGebra; inoltre nel corso della tesi cercheremo di spiegare come si realizzano tali figure, per permettere ad un eventuale lettore interessato di ripetere i passaggi e verificare le conclusioni.
Il secondo obbiettivo è di proporre alcune attività didattiche, o per lo meno fornire spunti ed idee, al fine di introdurre alcuni degli argomenti trattati nella Scuola Secondaria Superiore.

La tesi è divisa in cinque capitoli.

- (**Cap. 0**): Nel capitolo introduttivo richiameremo alcuni risultati sulle isometrie del piano, fondamentali per lo sviluppo della tesi.

- (**Cap. 1**): Il primo capitolo è dedicato allo studio dei gruppi di simmetria dei fregi e dei mosaici; in particolare, dimostreremo che esistono solo 7 gruppi dei fregi e 17 gruppi dei mosaici, nel primo caso attraverso tecniche algebriche, nel secondo attraverso tecniche geometriche. In particolare, introdurremo dei metodi per riconoscere i gruppi di simmetria.
  La dimostrazione del Teorema 1.3.1 sulla classificazione dei gruppi di simmetria dei fregi prende spunto da quella presente in [Ded99], ma è interamente elaborata da me.

- (**Cap. 2**): Il Capitolo 2 rappresenta il cuore della trattazione; in questo Capitolo tratteremo approfonditamente le tassellazioni del piano. Dopo aver dato le prime definizioni generali, studieremo le tassellazioni regolari e uniformi; proseguiremo con lo studio delle tassellazioni monoedriche, cioè che sono composte da un solo tipo di tassello, e chiuderemo il capitolo con una discussione sulle tassellazioni aperiodiche, concentrandoci sopratutto sul lavoro di Penrose. In tutto il capitolo presenteremo molti disegni, accompagnati dalle istruzioni per la loro realizzazione.
  In particolare, le costruzioni del Teorema 2.2.1 sulle tassellazioni uniformi e le dimostrazioni delle sezioni sulle tassellazioni monoedriche in triangoli e qua-

drilateri sono state elaborate dal sottoscritto, in particolare non ho trovato traccia in letteratura del Teorema 2.3.4, che ho dimostrato.

Inoltre, nella sezione sulle tassellazioni monoedriche in pentagoni, cerchiamo di sistematizzazione le conoscenze attuali sull'argomento e di spiegare le costruzioni necessarie per realizzare i tasselli e le tassellazioni; in particolare, non ho trovato articoli che parlino di come costruire i tasselli, che quindi ho realizzato in autonomia.

Infine, per quanto riguarda la Sezione 2.4, non ho trovato in letteratura una dimostrazione semplice e completa della Proposizione 2.4.2, che quindi ho elaborato autonomamente tramite una ricerca esaustiva delle configurazioni.

- (**Cap. 3**): Nel terzo capitolo spostiamo l'attenzione dal piano alle superfici compatte e connesse; dopo un breve riepilogo dei risultati principali sulle superfici, classificheremo dettagliatamente le tassellazioni regolari nelle superfici a caratteristica di Eulero non negativa (sfera, toro, piano proiettivo e bottiglia di Klein), dimostreremo che esiste al più un numero finito di tassellazioni regolari nelle superfici di caratteristica negativa e che, in particolare, ne esiste almeno una in quelle orientabili.

  La dimostrazione del Teorema 3.2.1 sulla classificazione delle tassellazioni regolari su superfici di caratteristica non negativa trae spunto dai suggerimenti nel testo [Ded99], per poi essere sviluppata dal sottoscritto.

- (**Cap. 4**): L'ultimo capitolo è dedicato ad alcune proposte didattiche legate agli argomenti trattati. Il capitolo si apre con un'analisi di alcuni passi delle *Indicazioni Nazionali* e delle *Linee Guida* per le Scuole Secondarie di II grado sulle trasformazioni del piano e procede con la proposta di una serie di percorsi di approfondimento, divisi per argomento: sulle isometrie, sulle tassellazione del piano e su fregi e mosaici.

Un ulteriore motivo di interesse per le tassellazione è dato dal fatto che questo argomento si presta a molti collegamenti con altre materie scolastiche: una su tutte Disegno e Storia dell'Arte. Ad esempio, nel palazzo dell'*Alhambra* di Granada sono presenti esempi dei 7 i gruppi dei fregi e dei 17 i gruppi dei mosaici; il secondo

comandamento del Corano impone che *"non ti farai idolo né immagine alcuna di ciò che è lassù in cielo, né di ciò che è quaggiù sulla terra, né di ciò che è nelle acque sotto la terra"*, quindi l'arte araba, al contrario di quella cristiana, non può essere figurativa e si è quindi specializzata in motivi decorativi astratti. L'aspetto straordinario è che gli artisti arabi hanno rappresentato tutti i possibili gruppi di simmetria bidimensionali ben prima che la Matematica si interessasse del problema, basti pensare che l'*Alhambra* (Granada, Spagna) è stata realizzata nel XIII secolo, mentre la prima classificazione dei gruppi dei mosaici risale al 1891, ad opera del cristallografo russo Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919), che classificò anche i 230 gruppi di simmetria dello spazio euclideo. Questo non significa che gli artisti arabi fossero coscienti che i loro risultati fossero esaustivi, infatti non troviamo alcuna traccia di questo risultato nella letteratura matematica araba dell'epoca.
Un altro esempio sono le opere dell'incisore e grafico olandese Maurits Cornelis Escher (1898–1972), che nella prima metà del '900 studiò a lungo i risultati sui gruppi di simmetria, elaborando anche una propria teoria, per creare le sue incisioni raffiguranti motivi naturali stilizzati, incastrati tra loro a formare dei mosaici con varie simmetrie, come raccontato nello splendido testo *"Visioni della simmetria. I disegni periodici di M. C. Escher"* di Doris Schattschneider [SE92].
Infine le tassellazioni hanno interesse anche nelle Scienze, ad esempio nella struttura dei cristalli o degli alveari delle api. La recente scoperta dei quasi-cristalli, solidi in cui gli atomi sono disposti in maniera deterministica ma aperiodica, ha dato un applicazione pratica anche allo studio delle tassellazioni di Penrose.

Nella Bibliografia e sitografia, posta alla fine dell'elaborato sono riportati tutti i riferimenti utilizzati in questa tesi, con l'aggiunta di alcuni testi e materiali utili per un approfondimento sia matematico che didattico.

Capitolo 0

Richiami teorici

In questo Capitolo 0 ci dedichiamo a richiamare alcune nozioni di base che ci saranno utili nel proseguo della trattazione. I risultati si incontrano nei vari corsi di algebra, geometria o didattica durante il corso di Laurea in Matematica, perciò dimostreremo solo i risultati più significativi e quelli che si incontrano meno frequentemente durante i corsi di Laurea.

0.1 Richiami sulle isometrie del piano

I riferimenti principali per questa sezione sono il libro [Ded96] e gli appunti del corso *Matematiche Complementari* del professor Ciraulo dell'a.a. 2020/2021.

Seguendo l'idea di Klein esposta nel *Programma di Erlangen*[1], per comprendere e classificare pienamente un sistema matematico è necessario capire le trasformazioni di quel sistema e in particolare quelle trasformazioni che lasciano qualche particolare aspetto invariato. Partiamo quindi con il definire cosa intendiamo per trasformazione del piano:

[1] Nel 1872, il matematico tedesco Felix Klein (1849–1925), nell'articolo *"Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"*, di cui [Kle08] è una recente traduzione in inglese, propose un metodo per classificare le geometrie a partire da quella proiettiva sfruttando la teoria dei gruppi; la scoperta delle geometrie non euclidee fece emergere la necessità di comprendere la gerarchia e le relazioni tra le varie geometrie. Il metodo divenne noto come *Programma di Erlangen* dal nome dell'Università in cui Klein lavorava.

Definizione 0.1.1. *Una **trasformazione del piano** è una corrispondenza biettiva dell'insieme dei punti del piano euclideo in sé.*

In particolare, per gran parte di questa tesi saremo interessati a quelle trasformazioni del piano che conservano la distanza.

Definizione 0.1.2. *Una **isometria** $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una trasformazione del piano che conserva le distanze.*

In realtà, notiamo che la definizione di isometria è ridondante: non è necessario specificare che l'applicazione φ sia biettiva, come ora dimostriamo.

(*iniettiva*) Supponiamo che $\varphi(P) = \varphi(Q)$ per due punti distinti P e Q. Ma

$$0 = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q) > 0$$

dove $d(P, Q)$ è la distanza tra due punti. Questo è chiaramente un assurdo, perciò necessariamente $P = Q$.

(*suriettiva*) Mostriamo innanzitutto che un'isometria è definita una volta assegnate le immagini di tre punti distinti non allineati A, B e C, cioè i vertici di un triangolo non degenere. Consideriamo un quarto punto P. Costruiamo le due circonferenze di centri $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ di raggio rispettivamente AP e BP. Due circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non si intersecano se e solo se $r_{\mathcal{C}} + r_{\mathcal{D}} < d(C_{\mathcal{C}}, C_{\mathcal{D}})$, dove $C_{\mathcal{C}}$ è il centro della circonferenza $\mathcal{C}$, e, nel nostro caso, $AP + PB > AB$ per la disuguaglianza triangolare; quindi le due circonferenze citate sopra si intersecano. Poiché φ mantiene le distanze, $\varphi(P)$ è necessariamente uno dei punti di intersezione delle due circonferenze. Se le circonferenze sono tangenti, e questo accade se P è allineato con A e B, possiamo concludere; altrimenti, consideriamo anche la circonferenza di centro $\varphi(C)$ e raggio CP: P è l'unico punto di intersezione tra le tre circonferenze considerate.
Tornando alla suriettività, dato un punto P', per costruire P tale che $\varphi(P) = P'$ basta ripercorrere la dimostrazione al contrario.

Inoltre, dalla definizione di isometria discende direttamente che tali applicazioni sono continue per la norma euclidea.
Usando semplicemente la condizione $d(\varphi(P), \varphi(Q) = d(P, Q))$, osserviamo che:

- l'identità è un'isometria;
- la composizione di isometrie è ancora un'isometria; inoltre la composizione di isometrie è un'operazione associativa;
- le isometrie in quanto biettive sono invertibili e le loro inverse sono ancora isometrie.

In altre parole le isometrie sono un gruppo, che si indica con $Iso(\mathbb{R}^2)$

Come emerge dalla dimostrazione precedente, nonostante si possano dimostrare molti risultati per via analitica, quando è possibile e non si perde di chiarezza, preferiremo sempre dimostrazioni sintetiche.
Infine, è chiaro che le definizioni e i risultati sopracitati, con le dovute modifiche, si possono estendere senza difficoltà a $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo ora le quattro isometrie e successivamente mostriamo che sono le uniche possibili:

Definizione 0.1.3. *La **traslazione** di vettore v è la trasformazione τ_v che al punto P associa il punto P' tale che il segmento orientato PP' rappresenti v.*
*La **rotazione** di centro O e angolo orientato α è la trasformazione $\rho_{O,\alpha}$ che a P associa P' di modo che $d(O,P) = d(O,P')$ e $P\hat{O}P' = \alpha$. In particolare, la rotazione $\rho_{O,\pi}$ viene spesso chiamata **mezzogiro** o **simmetria centrale** attorno ad O.*
*La **riflessione** di asse la retta r è la trasformazione σ_r che ad ogni punto P associa il punto P' tale che r è l'asse di PP'. Spesso viene detta **simmetria assiale**.*
*La **glissoriflessione** con asse r e vettore di traslazione v, con $v//r$, è la trasformazione $\gamma_{r,v} = \sigma_r\tau_v = \tau_v\sigma_r$.*

Con semplici ragionamenti di geometria elementare è facile mostrare che tutte e quattro sono isometrie. In particolare, le riflessioni sono fondamentali nella nostra analisi, in quanto si ha il seguente:

Teorema 0.1.1. *Ogni isometria φ è la composizione di al più 3 riflessioni.*

Dimostrazione. Se $\varphi = id$, possiamo vederla come la composizione di 0 isometrie. Altrimenti esiste almeno un punto A tale che $\varphi(A) = A' \neq A$. Sia r l'asse di AA' e notiamo che $\sigma_r(A) = A'$; se $\varphi = \sigma_r$ abbiamo concluso.

Altrimenti esiste B tale che $\varphi(B) = B' \neq \sigma_r(B)$. Sia s l'asse di $\sigma_r(B)B'$ e osserviamo che $\sigma_s(\sigma_r(B)) = B'$ e $\sigma_s\sigma_r(A) = \sigma_s(A') = A'$ perché $d(A', B') = d(A, B) = d(\sigma_r(A), \sigma_r(B)) = d(A', \sigma_r(B))$ e quindi $A' \in s$ in quanto è equidistante da B' e $\sigma_r(B)$. Se $\sigma_s\sigma_r = \varphi$ abbiamo concluso.
Altrimenti esiste C tale che $\varphi(C) = C' \neq \sigma_s\sigma_r(C)$. Sia t l'asse di $\sigma_s\sigma_r(C)C'$: $\sigma_t(\sigma_s\sigma_r(C)) = C'$, $\sigma_t\sigma_s\sigma_r(B) = \sigma_t(B') = B'$ perché

$$d(B', C') = d(B, C) = d(\sigma_s\sigma_r(B), \sigma_s\sigma_r(C)) = d(B', \sigma_s\sigma_r(C))$$

e infine $\sigma_t\sigma_s\sigma_r(A) = \sigma_t(A') = A'$ per lo stesso motivo.
Abbiamo già mostrato che un'isometria è definita una volta assegnate le immagini di tre punti distinti non allineati. In particolare,

- $B \neq A$ perché σ_r e φ si comportano allo stesso modo su A, ma non su B;
- $C \neq A$ e $C \neq B$ perché $\sigma_s\sigma_r$ e φ si comportano allo stesso modo su A e B (e quindi sulla retta per A e B) ma non su C;
- i tre punti non sono allineati perché, per quanto appena detto, se C fosse allineato con A e B, sarebbe univocamente determinato dalla distanza da essi e quindi per conoscere l'immagine di C basterebbe conoscere quelle di A e B, in altre parole $C' = \sigma_s\sigma_r(C)$ e questo non è vero.

Perciò $\varphi = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$. □

In particolare questo teorema ci permette di classificare le isometrie come **pari** o **dirette**, se possono essere scritte come composizione di un numero pari di riflessioni, o come **dispari** o **indirette**, nel caso contrario.
È facile vedere che dati un triangolo ABC in cui abbiamo ordinato i vertici in senso antiorario e una riflessione σ, allora $\sigma(ABC)$ ha i vertici orientati in senso orario. Da ciò possiamo concludere che le riflessioni invertono l'ordine delle figure. Ripetendo il ragionamento sulla composizione di riflessioni, le isometrie dispari invertono l'ordine, mentre quelle pari lo mantengono. Essendo un comportamento mutualmente esclusivo, si ha il seguente:

Corollario 0.1.1. *Se un'isometria si può scrivere come la composizione di un numero pari di riflessioni, non si può scrivere come la composizione di un numero dispari di riflessioni.Da ciò, la classificazione in isometrie pari e dispari è ben definita. Inoltre è immediato costruire la seguente tabella:*

$\circ$	Pari	Dispari
Pari	Pari	Dispari
Dispari	Dispari	Pari

Tabella di composizioni delle isometrie pari e dispari

È facile dimostrare che le isometrie pari formano un sottogruppo delle isometrie di indice 2 che si indica con $Iso^+(\mathbb{R}^2)$, mentre le isometrie dispari non formano un gruppo, perché, ad esempio, manca l'identità.

Classificazione delle isometrie del piano

Grazie al teorema appena dimostrato è possibile dimostrare che le famiglie di isometrie del piano sono solo le quattro sopracitate. Oltre ai casi banali in cui φ è l'identità o è una riflessione, abbiamo i seguenti casi.
Supponiamo che $\varphi = \sigma_s\sigma_r$:

- se r e s sono rette parallele otteniamo la traslazione di vettore perpendicolare agli assi di riflessione, modulo doppio della distanza tra le due rette e orientato in modo che se il primo estremo di τ_v appartiene a r, il secondo appartiene al semipiano individuato da s che non contiene r.
  Viceversa, ogni traslazione τ_v si può vedere come composizione di due riflessioni i cui assi sono entrambi perpendicolari a v e la loro distanza è la metà del modulo del vettore. Da notare che la scelta delle rette non è univocamente determinata.

- Se r e s sono rette incidenti si ottiene una rotazione $\rho_{O,2\alpha}$, dove il punto O è l'intersezione delle due rette e α è l'angolo orientato individuato da esse. Come prima, ogni rotazione $\rho_{O,\alpha}$ si può vedere come la composizione di due riflessioni con assi che si intersecano in O e che formano un angolo ampio $\frac{\alpha}{2}$. Di nuovo, la scelta degli assi non è unica.

Supponiamo che $\varphi = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$:

- se le tre rette sono parallele si ottiene una riflessione, il cui asse è parallelo ai precedenti.

- Se $t \parallel s$, $\sigma_t\sigma_s\sigma_r = \tau_v\sigma_r$. Allo stesso modo se $s \parallel r$, $\varphi = \sigma_t\tau_v$.
  Se invece $\sigma_t\sigma_s = \rho_{O,\alpha}$ (o $\sigma_s\sigma_r = \rho_{O,\alpha}$), per quanto detto prima sulle rotazioni si possono scegliere gli assi in modo tale che $s \parallel r$ (o $t \parallel s$). In questo modo ci troviamo nuovamente nella condizione del punto precedente.
  A questo punto decomponiamo il vettore v nelle componenti parallele e perpendicolari all'asse di simmetria: $\tau_v = \tau_\parallel\tau_\perp = \tau_\perp\tau_\parallel$. Notiamo che $\tau_\perp\sigma$ è ancora una riflessione, con asse parallelo all'asse di σ traslato di $\frac{\mathbf{v}_\perp}{2}$. Lo stesso vale per $\sigma\tau_\perp$ ma con il vettore di segno opposto.
  Ci siamo quindi ridotti a comporre una riflessione con una traslazione di vettore parallelo all'asse di riflessione. È chiaro che queste isometrie commutano tra loro. Tale composizione è esattamente una glissoriflessione.

Chiaramente abbiamo esaurito tutti i casi possibili e quindi le possibili isometrie del piano sono di uno di questi quattro tipi. Dalla dimostrazione discende che, traslazioni e rotazioni sono isometrie pari, le riflessioni e le glissoriflessioni sono isometrie dispari.

Nelle prossime proposizioni, divise per argomento, elenchiamo alcune proprietà delle isometrie, senza dimostrazione:

Proposizione 0.1.1 (Sui punti fissi)**.** *(a) Le traslazioni (diverse dall'identità) e le glissoriflessioni non hanno punti fissi.*
(b) Le rotazioni (diverse dall'identità) hanno come unico punto fisso il centro della rotazione.
(c) Le riflessioni fissano puntualmente tutto l'asse di riflessione.

Proposizione 0.1.2. *(Su rette e circonferenze unite) (a) Una traslazione fissa tutte le rette parallele al vettore di traslazione.*
(b) Una rotazione fissa tutte le circonferenze di centro il centro della rotazione. Se $\alpha = k\pi$, tutte le rette per il centro di rotazione sono fissate, altrimenti non ci sono rette fissate.

(c) Una riflessione fissa, oltre all'asse di riflessione, tutte le rette perpendicolari all'asse e le circonferenze con centro sull'asse.

Proposizione 0.1.3. *(Sulla composizione) (a) Le traslazioni formano un sottogruppo commutativo delle isometrie.*
(b) La composizione di due rotazioni non è commutativa in generale, lo è solo nel caso in cui i due centri coincidono. In particolare, $\rho_{C,\phi}\rho_{C',\theta}$ è ancora una rotazione di angolo $\phi+\theta$, a meno che $\phi+\theta=0$ e in tal caso la composizione è una traslazione. Da ciò, le rotazioni e le traslazioni formano il sottogruppo delle isometrie pari.
(c) Le riflessioni sono involuzioni, cioè $\sigma_r^2 = id$.
(d) Il quadrato di una glissoriflessione è una traslazione: $\gamma_{r,v}^2 = \tau_{2v}$. Inoltre, ogni glissoriflessione si può vedere come la composizione di un mezzogiro con una riflessione rispetto a un asse che non contiene il centro del mezzogiro.

Per una collezione più completa e dimostrata di questi risultati si rinvia ai primi capitoli di [Mar82].

Proprietà algebriche delle isometrie

Fissiamo un sistema di riferimento e consideriamo le isometrie φ che fissano l'origine. Si può dimostrare che tali isometrie sono applicazioni lineari, quindi si possono scrivere come $\phi(x) = \mathbf{A}x$, dove $\mathbf{A}$ è una matrice 2x2 ortogonale in quanto deve avere determinante di modulo 1 per poter conservare le distanze.
Se invece consideriamo un'isometria Ψ senza punti fissi, possiamo considerare l'applicazione $\varphi(x) = \Psi(x) - \Psi(O)$ che invece è un'isometria che fissa l'origine ed è quindi rappresentabile con una matrice ortogonale $\mathbf{B}$; possiamo allora scrivere $\Psi(x) = \mathbf{B}x + \Psi(O)$, cioè la composizione di un'applicazione lineare ortogonale con una traslazione.
In particolare, ricordando che $O(\mathbb{R}^2)$ è l'insieme delle matrici ortogonali di dimensione 2, questa analisi permette di definire un omomorfismo $\Phi : Iso(\mathbb{R}^2) \to O(\mathbb{R}^2)$ che, fissato un sistema di riferimento, associa a ogni isometria φ la matrice ortogonale $\Phi(\varphi)$ tale che $\varphi(x) = \Phi(\varphi)x + \varphi(O)$.

Proposizione 0.1.4. *$\Phi : Iso(\mathbb{R}^2) \to O(\mathbb{R}^2)$ è un omomorfismo di gruppi suriettivo.*

Dimostrazione. Mostriamo che è un omomorfismo: siano φ e Ψ due isomerie che, fissato un sistema di riferimento, si scrivono come $\varphi(x) = \mathbf{A}x + v$ e $\Psi(x) = \mathbf{B}x + w$. Allora $\Phi(\Psi \circ \varphi) = \Phi(\mathbf{B}(\mathbf{A}x + v) + w) = \Phi(\mathbf{BA}x + \mathbf{B}v + w) = \mathbf{BA} = \Phi(\Psi)\Phi(\varphi)$.
Mostriamo che è suriettivo: presa una qualsiasi matrice $\mathbf{A}$ in $O(\mathbb{R}^2)$, l'applicazione $\varphi(x) = \mathbf{A}x$ è un isometria in quanto è un applicazione biettiva che preserva le distanze. □

In particolare, il nucleo di Φ è il sottogruppo normale composto dalle sole traslazioni.

0.2 Gruppi finiti di isometrie nel piano

In questa sezione richiameremo alcune nozioni sui gruppi, in particolare per quanto riguarda i gruppi finiti di isometrie del piano. Ricordiamo che i gruppi finiti sono tutti quei gruppi che hanno un numero finito di elementi.

Definizione 0.2.1. *Una **presentazione di un gruppo G mediante generatori e relazioni** è una scrittura del tipo $G = \langle g_1, ..., g_n;\ r_1 = ... = r_k = 1 \rangle$, intendendo che G è isomorfo al quoziente F/R, dove:*

1. *F è il gruppo libero generato da $g_1, ..., g_n$;*
2. *$r_1, ..., r_k$ sono elementi di F;*
3. *R è il più piccolo sottogruppo normale di F che contiene $r_1, ..., r_k$.*

Mostriamo e analizziamo due esempi che saranno fondamentali per il proseguo della trattazione, soprattutto quando parleremo di **Fregi e Mosaici**.
Il *gruppo ciclico di ordine n* si può presentare come $C_n = \langle a\ ;\ a^n = 1 \rangle$ ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, il gruppo delle classi di resto modulo n. Possiamo scegliere come generatore di C_n un qualsiasi elemento a^s, dove s è coprimo con n; i suoi sottogruppi sono isomorfi a C_k, con k un divisore di n, e generati da elementi del tipo a^s con $MCD(s, n) = \frac{n}{k}$. Tutti i gruppi ciclici sono abeliani e visti come gruppi di isometrie sono il gruppo di isometrie generato dalla rotazione attorno l'origine di $\frac{2\pi}{n}$; un esempio particolare è C_1 che contiene solo l'identità.

Il *gruppo diedrale su n elementi* è il gruppo

$$D_n = \langle a, b \ ; \ a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle = \langle c, d; c^2 = d^2 = (cd)^n = 1 \rangle$$

dove si passa da una presentazione all'altra ponendo $c = ab$ e $d = b$. Da $abab = 1$ si ha $ba = a^{-1}b^{-1} = a^{-1}b$ che per induzione porta a $ba^k = a^{-k}b$. Questo, assieme alle regole della presentazione, significa che possiamo scrivere un qualsiasi elemento di D_n come $a^i b^j$, con i, j interi, $i = 1, ..., n-1$ e $j = 0, 1$; in altre parole, il gruppo diedrale D_n ha $2n$ elementi, esplicitamente

$$D_n = \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}$$

e le regole di moltiplicazione sono:

$\cdot$	a^j	$a^j b$
a^i	$a^{i+j(mod\ n)}$	$a^{i+j(mod\ n)}b$
$a^i b$	$a^{i-j(mod\ n)}b$	$a^{i-j(mod\ n)}$

I possibili sottogruppi di D_n sono isomorfi a C_k o a D_k, con k un divisore di n.
Visti come gruppi di isometrie, sono i gruppi generati da una rotazione attorno all'origine di $\frac{2\pi}{n}$, rappresentata da a, e una riflessione lungo un asse passante per l'origine, rappresentata da b.
Questi due gruppi sono estremamente importanti per quanto riguarda il gruppo di simmetria dei poligoni.

Definizione 0.2.2. *Sia F una figura piana, cioè un qualsiasi sottoinsieme del piano. $\Gamma(F) = \{\varphi \in Iso(\mathbb{R}^2) \mid \varphi(F) = F\}$ è il **gruppo di simmetria di** F, cioè il gruppo formato dalle isometrie del piano che fissano la figura F.*

Teorema 0.2.1. *Sia F un n-agono. $\Gamma(F)$ ha le seguenti proprietà:*

1. *è un gruppo finito;*
2. *è un sottogruppo di D_n;*
3. *coincide con D_n se e solo se F è un poligono regolare.*

Dimostrazione. 1. Sia $\varphi \in \Gamma(F)$ e s un lato di F, allora $\varphi(s)$ è ancora un lato di F e abbiamo al massimo n possibilità. Fissati due lati congruenti, se esistono,

s e s' di vertici, in ordine ciclico, A, B, C e D, ci sono quattro isometrie che mandano s in s': due pari, cioè la composizione di una traslazione che sovrappone A con C o A con D con la rotazione dell'angolo che si forma tra i due segmenti, e due dispari, cioè la composizione di una delle due traslazioni con la riflessione lungo la bisettrice dell'angolo formato dai due segmenti. In conclusione, $\Gamma(F)$ non può contenere più di $4n$ elementi distinti.

2. Dal punto precedente, ci si accorge immediatamente che le uniche due isometrie che possono appartenere a $\Gamma(F)$ sono la composizione di τ_{AC} con la rotazione e la composizione di τ_{AD} con la riflessione. Quindi in realtà $\Gamma(F)$ ha al più $2n$ elementi.
   Mostriamo che $\Gamma(F)$ è isomorfo a un sottogruppo di D_n. Consideriamo l'applicazione $T : \Gamma(F) \to S_n$, dove S_n è il gruppo delle permutazioni su n elementi, che associa a $\varphi \in \Gamma(F)$ la permutazione che induce sui vertici.

   (a) T è evidentemente un omomorfismo di gruppi;

   (b) T è iniettivo in quanto se $T(\varphi) = id$ allora φ fissa almeno tre punti distinti e quindi è l'identità;

   (c) l'immagine $T(G)$ di G tramite T è contenuta nel sottogruppo di S_n generato da

   $$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Infatti sia $\varphi(v_1) = v_k$ per qualche $k = 1, \dots, n$, allora ci sono solo due possibilità: o $\varphi(v_2) = v_{k+1}$ (e quindi $\varphi(v_3) = v_{k+2}$ e così via), oppure $\varphi(v_2) = v_{k-1}$ (e quindi $\varphi(v_3) = v_{k-2}$ e così via). Quindi o $T(\varphi) = a^{k-1}$ o $T(\varphi) = ba^{k-1}$.

   (d) Il sottogruppo generato da a e b è isomorfo a D_n, in quanto si verifica immediatamente che $a^n = b^2 = (ab)^2 = 1$ e tale sottogruppo ha $2n$ elementi distinti.

   Da questo si deduce la tesi.

3. ($\Leftarrow$) Mostriamo che il gruppo di simmetria di un n-agono regolare F è D_n: siano O il centro del poligono, P_i i vertici e l_i il lato di estremi P_{i-1} e P_i, tutti i pedici da intendersi modulo n. Ogni isometria che fissa F fissa il centro O, quindi può essere solo una rotazione di centro O o una riflessione il cui asse passa per O. Più precisamente è facile notare che sono simmetrie di un n-agono:

   - le n rotazioni $id, \rho, \rho^2, ..., \rho^{n-1}$ dove ρ è la rotazione di centro O e angolo $\frac{2\pi}{n}$;
   - le n riflessioni $\sigma_1, ..., \sigma_n$ di asse s_i, dove s_i è
     - la retta passante per un vertice e il punto medio del lato opposto se n è dispari;
     - la retta passante per due vertici opposti se i è dispari o la retta passante per i punti medi di due lati apposti se i è pari, nel caso in cui n è pari.

   Non ci possono essere altre simmetrie perché come abbiamo già mostrato $\Gamma(F) \leq D_n$. Ora se mandiamo ρ in a e σ_1 in b è facile mostrare che $\Gamma(F) \cong D_n$: infatti evidentemente $\rho^n = \sigma_1^2 = id$, inoltre per come si compongono le riflessioni con assi incidenti $\sigma_1\sigma_2 = \rho$ e quindi $(\rho\sigma_1)^2 = \sigma_2^2 = id$. Infine notiamo che ρ manda l'asse di simmetria s_i in s_{i+2}, quindi le simmetrie con indice della stessa parità sono coniugate tra loro in D_n dalla relazione $\sigma_2 = \rho\sigma_i\rho^{-1}$. In realtà, si può dimostrare che se n è dispari sono tutte coniugate tra loro.
   ($\Rightarrow$) Se $\Gamma(F) = D_n$, le n rotazioni mandano ogni vertice e ogni spigolo in tutti gli altri, quindi il poligono è necessariamente equilatero e equiangolo.

□

Interessiamoci ora a classificare i gruppi finiti di isometrie.

Lemma 0.2.1. *Sia G un gruppo finito di isometrie del piano, allora esiste un punto O tale che $\varphi(O) = O$ per ogni $\varphi \in G$.*

Dimostrazione. Sia x un punto del piano e consideriamo la sua orbita $X = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G\}$; si scelga x di modo che X non si riduca a un solo punto; se questo non è possibile vuol dire che $G = \{id\}$ e il teorema in questo caso è banale.

X è un insieme finito di punti composto da almeno due punti. Mostriamo che esiste un unico disco D di raggio minimo che contiene X:

- esiste almeno un disco che contiene X in quanto X è finito;
- esiste almeno un disco di raggio minimo che contiene X: infatti esistono dischi che contengono sul loro bordo almeno tre punti di X o due diametralmente opposti; se un disco non soddisfa queste proprietà se ne può trovare uno che le verifica e di raggio minore del precedente;
- il disco di raggio minimo è unico: se ci fossero due dischi D e D' di raggio uguale e che contengono X, allora $X \subseteq D \cap D'$; quindi basta considerare il disco che ha per diametro il segmento che congiunge i punti di intersezione tra i bordi dei due dischi, che ha raggio minore di D e D' e contiene X.

Sia D tale disco e sia O il suo centro. $\varphi(D)$ è l'unico disco di raggio minimo che contiene $\varphi(X) = X$, per ogni $\varphi \in G$, quindi $\varphi(D) = D$ e in particolare $\varphi(O) = O$, per ogni $\varphi \in G$. □

Teorema 0.2.2. [2] *Sia G un gruppo finito di isometrie del piano. Allora G è isomorfo a un gruppo ciclico C_n o a un gruppo diedrale D_n, per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Notiamo che questo teorema, assieme al Lemma 0.2.1 e all'analisi sui sottogruppi di D_n fatta all'inizio della sezione, implica che i gruppi finiti di isometrie del piano sono tutti e soli i gruppi di simmetria dei poligoni.

Dimostrazione. Sia O il punto fissato da tutte le isometrie in G; in particolare, tutte le isometrie di G hanno almeno un punto fisso e in altre parole, tutte le isometrie pari in G sono rotazioni di centro O e tutte quelle dispari sono riflessioni il cui asse passa per O. Sia G^+ il sottogruppo delle isometrie pari di G e consideriamo la rotazione ρ di angolo minimo α, che esiste in quanto G è finito. Essendo appunto il gruppo finito, $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$, con $k, n \in \mathbb{N}$, e possiamo supporre k e n primi tra loro. In particolare, possiamo supporre anche $k = 1$: poiché k e n sono coprimi, esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $ak + bn = 1$, quindi

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2(ak+bn)\pi}{n} = \frac{2ak\pi}{n} + \frac{2bn\pi}{n} = \alpha a + 2b\pi$$

[2] Spesso questo teorema viene attribuito a Leonardo da Vinci (1452–1519)

e quindi $\rho_{\frac{2\pi}{n}} = \rho_{\alpha a} \circ \rho_{2b\pi} = \rho^a$; in altre parole se G contiene la rotazione di angolo $\frac{2k\pi}{n}$, contiene anche la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$, che è minore.

Quindi è chiaro che G^+ contiene il gruppo ciclico C_n generato dalla rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ di centro O. Mostriamo che in realtà $G^+ \cong C_n$: se per assurdo non fosse così, esisterebbe la rotazione $\rho_\beta \in G^+ \setminus C_n$. Esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{2j\pi}{n} < \beta < \frac{2(j+1)\pi}{n}$ e quindi $\rho^{-j}\rho_\beta$ è una rotazione di angolo $0 < \beta - \frac{2j\pi}{n} < \alpha$ che appartiene a G, ma questo è assurdo e quindi $G^+ \cong C_n$.

A questo punto abbiamo due possibilità: se $G \cong C_n$ abbiamo concluso, altrimenti esiste almeno una riflessione σ contenuta in G. In tal caso, poiché la composizione di due riflessioni i cui assi sono concorrenti è una rotazione, G^+ è un sottogruppo di indice due in G e quindi $G = G^+ \cup G^+\sigma$, che è isomorfo al gruppo diedrale D_n generato da σ e ρ con le relazioni, ovvie dalle proprietà delle isometrie,

$$\rho^n = \sigma^2 = (\sigma\rho)^2 = id$$

. □

Capitolo 1

Fregi e mosaici

In questo capitolo classificheremo i gruppi discreti di isometrie del piano. Questo ci servirà nel Capitolo 2, in quanto i gruppi di simmetria di una tassellazione sono necessariamente gruppi discreti.
I riferimenti principali per questo capitolo, da cui abbiamo preso spunto anche per le dimostrazioni, sono [Ded99] e [Mar82]. Altre letture interessanti sull'argomento, soprattutto per quanto riguarda l'ambito didattico, sono [RS81] e [Sch78a].

1.1 Gruppi discreti di isometrie del piano

Definizione 1.1.1. *Sia G un sottogruppo di $Iso(\mathbb{R}^2)$. G è un* ***sottogruppo discreto*** *se per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno U di P tale che $\varphi(P) = P$ oppure $\varphi(P) \notin U$, per ogni $\varphi \in G$; in altre parole, P è un punto isolato nella sua orbita sotto l'azione di G*

D'ora in poi, sia G un sottogruppo di $Iso(\mathbb{R}^2)$ e T il sottogruppo formato dalle sole traslazioni di G. Notiamo che T è normale in G, in quanto, per ogni $\varphi \in G$, se $\tau \in T$ è una traslazione anche $\varphi\tau\varphi^{-1}$ lo è; infatti è una isometria diretta senza punti fissi. Oppure, T è normale perché è il *kernel* dell'applicazione $\Phi : Iso(\mathbb{R}^2) \to O(\mathbb{R}^2)$, introdotta nella Proposizione 0.1.4, ristretta a G.
La seguente proposizione ci aiuta nella classificazione dei gruppi discreti di isometrie perché ci dà informazioni sulla struttura del loro sottogruppo delle traslazioni.

Proposizione 1.1.1. *Sia G un sottogruppo discreto di $Iso(\mathbb{R}^2)$ e T il suo sottogruppo delle traslazioni. Allora o $T = \{id\}$, o T è il gruppo libero generato da una sola traslazione τ_v, quindi isomorfo a $\mathbb{Z}$, oppure T è il gruppo libero generato da due traslazioni τ_v e τ_u, con v e u linearmente indipendenti, isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Supponiamo $T \neq \{id\}$, allora esiste una traslazione $\tau = \tau_v$ tale che v abbia lunghezza minima; infatti se così non fosse non esisterebbe nessun intorno U di nessun punto P con le proprietà richieste dalla definizione di sottogruppo discreto. Allora T contiene il sottogruppo K, isomorfo a $\mathbb{Z}$, generato da τ.
Se $K = T$ abbiamo concluso. In caso contrario, scegliamo una traslazione $\tau' = \tau_w$ in $T \setminus K$ tale che w abbia lunghezza minima.
Mostriamo che v e w sono linearmente indipendenti: se così non fosse, esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, perché $\tau' \notin K$, tale che $w = \lambda v$; ma allora esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n < \lambda < n + 1$ e quindi $\tau'' = \tau'\tau^{-n}$ è una traslazione in T di vettore $u = w - \lambda v$ che ha lunghezza strettamente minore di v e questo è assurdo.
Mostriamo che K', il gruppo generato da τ e τ' e isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, coincide con G. Per assurdo esiste $\tau'' \in T \setminus K'$; necessariamente il vettore relativo a τ'' è della forma $u = av + bw$ con almeno uno tra a e b non intero, altrimenti τ'' apparterrebbe a K'. Esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che $n \leq a < n+1$ e $m \leq b < m+1$ e consideriamo $u' = \lambda v + \mu w$, con $0 \leq \lambda = a - n < 1$ e $0 \leq \mu = b - m < 1$; notiamo che al più una delle due uguaglianze può essere vera, quindi u' non coincide con nessun lato del parallelogramma generato da v e w. Supponiamo che $\lambda + \mu < 1$, allora $\|u'\| \leq \lambda\|v\| + \mu\|w\| \leq (\lambda + \mu)\|w\| < \|w\|$ e questo è assurdo. Se $\lambda + \mu \geq 1$ applichiamo lo stesso ragionamento a $u'' = v + w - u'$. □

Fissiamo un punto O in $\mathbb{R}^2$ e riprendiamo l'omomorfismo Φ introdotto nella Proposizione 0.1.4 restringendolo a G: otteniamo l'omomorfismo $\Phi : G \to O(\mathbb{R}^2)$, il cui nucleo è T, mentre l'immagine P è un sottogruppo di $O(\mathbb{R}^2)$, isomorfo a G/T, che viene definito **gruppo puntuale**. La classificazione dei sottogruppi discreti di isometrie del piano si basa sulla struttura di P e T.

Proposizione 1.1.2. *Sia G un sottogruppo discreto di $Iso(\mathbb{R}^2)$. Se $T = \{id\}$ allora G è un gruppo finito.*

Questo significa che nel caso in cui $T = \{id\}$ abbiamo già classificato tutti i gruppi discreti nel Teorema 0.2.2.

Dimostrazione. Se $T = \{id\}$, G e P sono isomorfi e quindi esiste un punto Q fissato da tutte le isometrie di G, in quanto P, visto come sottogruppo di $O(\mathbb{R}^2)$, è composto di applicazioni che fissano l'origine di un opportuno sistema di riferimento. Mostriamo quindi che G è finito: consideriamo un punto $R \neq Q$ e l'insieme $G_R^+ = \{g(R) \mid g \in G^+\}$, dove G^+ è il sottogruppo di G contenente tutte e sole le isometrie pari. Tale insieme è interamente contenuto nel disco chiuso di centro Q e raggio $d(R,Q)$, che è un compatto e un insieme discreto[1] in un compatto è finito. Poiché le isometrie pari in G hanno un solo punto fisso, necessariamente Q, G_R^+ è in corrispondenza biunivoca con G^+ che quindi è finito. A questo punto, sia che $G = G^+$ o che G^+ sia un sottogruppo di indice due, possiamo concludere che G è finito. □

I seguenti lemmi danno informazioni sulla struttura del gruppo puntuale e saranno utili quando classificheremo i gruppi dei fregi e dei mosaici nelle sezioni seguenti.

Proposizione 1.1.3. *Sia G un sottogruppo discreto di $Iso(\mathbb{R}^2)$, il cui gruppo delle traslazioni T è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Allora G può contenere rotazioni di ordine al più due. In particolare ci sono quattro possibilità per il gruppo puntuale: C_1, C_2, D_1 o D_2.*

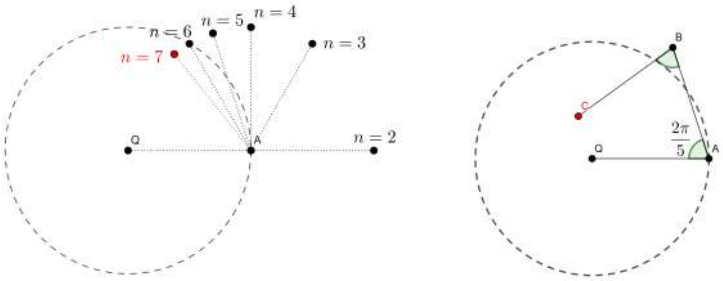
Dimostrazione. Sia ρ una rotazione in G e τ_v un generatore di T, allora anche $\tau_w = \rho\tau_v\rho^{-1}$ è una traslazione di T di vettore w, necessariamente parallelo a v perché $T \cong \mathbb{Z}$. In generale una retta è fissata da una traslazione se e solo se è parallela al vettore di traslazione; scegliamo quindi una retta r parallela a v e poniamo $s = \rho(r)$. Allora $\tau_w(s) = \rho\tau_v\rho^{-1}\rho(r) = \rho\tau_v(r) = \rho(r) = s$, cioè s è fissata da τ_w e quindi s è parallela a w. In particolare r e s sono parallele, ma r si ottiene da s tramite una rotazione, che è necessariamente una rotazione di un multiplo di π.
Per dimostrare la seconda affermazione, notiamo che, per come è definito il gruppo puntuale P, se P contiene una rotazione di angolo α allora anche G contiene una rotazione di angolo α. Questo significa che P^+, che contiene solo rotazioni, è isomorfo o a C_1 o a C_2. A questo punto, come nella dimostrazione del Teorema

[1] Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^\kappa$ è detto **discreto** se ogni suo punto è isolato.

0.2.2, possiamo concludere che le possibilità per P sono esattamente quelle elencate nell'enunciato del Teorema. □

Proposizione 1.1.4 (Restrizione Cristallografica)**.** *Sia G un gruppo discreto di isometrie del piano il cui gruppo delle traslazioni T è isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Allora G può contenere rotazioni solo di ordine due, tre, quattro o sei; quindi abbiamo dieci possibilità per il gruppo puntuale P: C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4 o D_6.*

Dimostrazione. Sia $\rho \in G$ una rotazione di periodo n e, come nel Teorema 0.2.2, possiamo supporre che sia una rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ e sia Q il suo centro. Sia φ un altro elemento di G e sia $Q' = \varphi(Q)$.
Mostriamo che in G esiste la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ di centro Q': consideriamo $\rho' = \varphi\rho\varphi^{-1}$, è un elemento di G^+, fissa Q' in quanto $\rho'(Q') = \varphi\rho\varphi^{-1}\varphi(Q) = \varphi\rho(Q) = \varphi(Q) = Q'$; inoltre notiamo che $(\rho')^k = \varphi\rho^k\varphi - 1$, quindi, poiché $\rho^n = 1$ ma $\rho^k \neq 1$ per ogni $0 < k < n$, lo stesso vale per ρ', che necessariamente è una rotazione ed esiste una sua potenza $0 < a < n$ tale che $(\rho')^a$ è la rotazione di centro Q' e angolo $\frac{2\pi}{n}$.
Consideriamo $X = \{\varphi(Q) \mid \varphi \in G\}$, l'orbita di Q, e scegliamo il punto $A \in X$ di minima distanza da Q, diverso da Q, che esiste poiché $G \neq \{id\}$ e quindi X contiene almeno un altro punto, inoltre la distanza dei punti di X da Q non può essere arbitrariamente piccola in quanto G è un gruppo discreto. Per quanto appena dimostrato, in G esiste la rotazione ρ di ordine n attorno a A e poniamo $B = \rho(Q)$.
Mostriamo che n può solo essere uno dei valori elencati dal Teorema. n è minore di 7: come è evidente della figura (a), dove i punti numerati rappresentano B, se $n \geq 7$, B è più vicino di A a Q. Inoltre $n \neq 5$: infatti, nonostante $d(Q, A) < d(Q, B)$, se reiteriamo il ragionamento notiamo che $C = \rho_{B,\frac{2\pi}{5}}(A)$ è più vicino a Q di A, come in figura (b). □



(a) (b)

A questo punto, grazie alle Proposizioni 1.1.1, 1.1.3 e 1.1.4, abbiamo stabilito le possibili strutture del sottogruppo delle traslazioni T e del gruppo puntuale P. Questo non è però sufficiente a classificare i gruppi discreti: infatti conoscere $P \cong G/T$ e T non determina univocamente G.
Innanzitutto dobbiamo stabilire sotto quale relazione di equivalenza vogliamo classificare i gruppi discreti. Una prima ipotesi può essere la relazione di isomorfismo, ma questa non è corretta: ad esempio C_2 e D_1 sono isomorfi tra loro ma vorremmo che rappresentassero casi distinti, nel primo una rotazione di π, nel secondo una riflessione; un altro esempio è dato dal gruppo discreto generato da un'unica traslazione o da un'unica glissoriflessione, entrambi sono descritti da gruppi ciclici infiniti $C_\infty \cong \mathbb{Z}$ ma rappresentano due casi diversi.
Un'altra ipotesi naturale potrebbe essere la relazione di coniugazione in $Iso(\mathbb{R}^2)$, cioè due gruppi discreti di isometrie G e H sono equivalenti se esiste $\varphi \in Iso(\mathbb{R}^2)$ tale che $\varphi G \varphi^{-1} = H$; in realtà questa relazione è troppo fine, in quanto due gruppi generati da una traslazione vorremmo fossero equivalenti, ma se sono generati da vettori di lunghezza diversa non esiste alcuna isometria che coniughi i due gruppi [2].
La relazione corretta per classificare questi gruppi è la coniugazione tramite affinità.

Definizione 1.1.2. *Un **affinità** o **trasformazione affine** in $\mathbb{R}^2$ è una trasformazione del piano che mantiene la collinearità e il parallelismo, cioè mappa rette in rette e manda rette parallele in rette parallele.*

Le affinità del piano formano il gruppo $Aff(\mathbb{R}^2)$ e si possono rappresentare come trasformazioni lineari del tipo $\mathbf{A}x + v$, con $\mathbf{A}$ una matrice invertibile e v un vettore.

Definizione 1.1.3. *Siano G e H due gruppi discreti di isometrie del piano, G e H sono **equivalenti** se esiste un'affinità f tale che $fGf^{-1} = H$*

In generale, dati $\varphi \in Iso(\mathbb{R}^2)$ e $f \in Aff(\mathbb{R}^2)$, non è detto che $\varphi' = f\varphi f^{-1}$ sia un isometria, ma nel caso lo sia hanno la stessa parità, φ' fissa le immagini tramite f dei punti fissi di φ e quindi le isometrie sono dello stesso tipo; infatti siano $f(x) = \mathbf{A}x + v$ una affinità e $\varphi(x) = \mathbf{B}x + w$ un isometria:

[2] Siano τ_v e τ_w i due generatori, x, y due punti e supponiamo che $\varphi \in Iso(\mathbb{R}^2)$ coniughi i due gruppi; allora $\|w\| = d(x, \tau_w(x)) = d(x, \varphi\tau_v\varphi^{-1}(x)) = d(\varphi^{-1}(x), \tau_v\varphi^{-1}(x)) = d(y, \tau_v(y)) = \|v\|$

- $f\varphi f^{-1}(x) = f\varphi(\mathbf{A}^{-1}x - \mathbf{A}^{-1}v) = f[\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}x - \mathbf{A}^{-1}v) + w] = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}x - \mathbf{A}^{-1}v) + w] + v = \mathbf{ABA}^{-1}x + (-\mathbf{ABA}^{-1}v + \mathbf{A}w + v)$ e poiché la parità è data dal segno del determinante della matrice $\mathbf{ABA}^{-1}$, che è lo stesso di $\mathbf{B}$, φ e φ' hanno la stessa parità.

- se esiste un punto x tale che $\varphi(x) = x$, allora $f\varphi f^{-1}(f(x)) = f\varphi(x) = f(x)$; a parole, φ' fissa le immagini tramite f dei punti fissi di φ.

Infine, la parità e i punti fissi caratterizzano completamente una simmetria, quindi φ e φ' sono lo stesso tipo di isometria

In particolare, questo significa che il sottogruppo delle traslazioni di G è coniugato a quello di H e quindi anche i due gruppi puntuali sono coniugati tra loro.
Notiamo inoltre che fissate due coppie di vettori linearmente indipendenti (v, w) e (v', w') è sempre possibile trovare un'affinità lineare f tale che $f(v) = v'$ e $f(w) = w'$ e questo implica che il gruppo generato da τ_v e τ_w è coniugato tramite f a quello generato da $\tau_{v'}$ e $\tau_{w'}$, infatti:

$$f\tau_v f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x) + v) = x + f(v) = x + v' = \tau_{v'}(x)$$

e similmente si vede che $f\tau_w f^{-1} = \tau_{w'}$.
Questo non vuol però dire che possiamo fissare il gruppo delle traslazioni una volta per tutte, infatti la struttura di G può imporre dei vincoli su T; ad esempio, se G contiene rotazioni di ordine $n \geq 3$, i vettori v e w che generato T devono avere la stessa lunghezza e formare un angolo di $\frac{2\pi}{n}$; infatti, ripetendo il ragionamento fatto nella Proposizione 1.1.1, una volta scelto un vettore di lunghezza minima v in T, l'esistenza di una rotazione ρ di ordine maggiore o uguale a 3 in G implica che anche la traslazione di vettore $\rho(v)$ appartiene a T ed è indipendente da v.

1.2 Successioni esatte corte e ricostruzione di gruppi

Definizione 1.2.1. *Una **successione esatta corta** è una cinquina (H, G, K, α, β), con H, G, K gruppi, $\alpha : H \to G$ e $\beta : G \to K$ omomorfismi tra gruppi, tale che ad ogni livello della successione $1 \to H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \to 1$ il nucleo di un omomorfismo coincide con l'immagine del precedente; in altre parole, α è iniettivo, in quanto*

$Ker(\alpha) = Im(1 \to H) = 1$, *$\beta$ è suriettivo, in quanto* $Im(\beta) = Ker(K \to 1) = K$ *e* $Ker(\beta) = Im(\alpha)$.
Inoltre se esiste un omomorfismo $s : K \to G$ *tale che* $\beta s = id_K$, *si dice che la successione* ***spacca*** *(****to split*** *in inglese).*

Definizione 1.2.2. *Dati due gruppi* G *e* H *e data un azione di* H *su* G, *cioè un omomorfismo* $\theta : H \to Aut(G)$, *il gruppo degli automorfismi di* G, *si definisce il* ***prodotto semidiretto*** $G \times_\theta H$ *come l'insieme* $G \times H$ *dotato della struttura di gruppo data dall'operazione*

$$(g,h)(g',h') = (g(\theta(h)(g')), hh')$$

Mostriamo che $G \times_\theta H$ è effettivamente un gruppo.

$$((g,h)(g,h'))(g'',h'') = (g(\theta(h)(g')), hh')(g'',h'') = (g(\theta(h)g')(\theta(hh')g''), hh'h'')$$

$$(g,h)((g,h')(g'',h'')) = (g,h)(g'(\theta(h')(g'')), h'h'') = (g(\theta(h)g'\theta(hh')g''), hh'h'')$$

quindi l'operazione è associativa.
Mostriamo che $1_{G\times_\theta H} = (1_G, 1_H)$:

- $(g,h)(1_G,1_H) = (g(\theta(h)1_G), h) = (g,h)$ in quanto un qualsiasi automorfismo applicato all'identità del gruppo da l'identità;
- $(1_G,1_H)(g,h) = (\theta(1_H))g, h) = (g,h)$ e l'ultima uguaglianza è vera in quanto θ è un omomorfismo.

Mostriamo che l'inverso di (g,h) è $(\theta(h^{-1})g^{-1}, h^{-1})$:
• poiché $\theta(h)\theta(h^{-1}) = \theta(1_H) = 1_{Aut(G)}$, si ha

$$(g,h)(\theta(h^{-1})g^{-1}, h^{-1}) = (g(\theta(h)\theta(h^{-1})g^{-1}), hh^{-1}) = (1_G, 1_H)$$

• $(\theta(h^{-1})g^{-1}, h^{-1})(g,h) = (\theta(h^{-1})g^{-1}\theta(h^{-1})g, h^{-1}h) =$

$$= (\theta(h^{-1})g^{-1}g, 1_H) = (\theta(h^{-1})1_G, 1_H) = (1_G, 1_H)$$

Se l'azione di H su G è banale, cioè $\theta(h)g = g \ \forall h, g$, si ritrova il prodotto diretto $G \times H$, cioè il prodotto cartesiano con l'operazione $(g,h)(g',h') = (gg', hh')$.

Quando una successione esatta corta spacca è possibile ricostruire il gruppo G conoscendo H, K e s come prodotto semidiretto di H e K rispetto all'azione di K su H definita a partire da s nel seguente modo: consideriamo l'elemento $s(k)\alpha(h)s(k)^{-1}$ che appartiene a $\alpha(H)$, che è normale in quanto $\alpha(H) = Ker(\beta)$. Essendo α iniettiva, esiste un unico elemento $m \in H$ tale che $\alpha(m) = s(k)\alpha(h)s(k)^{-1}$; definiamo allora l'azione di K su H come $\theta(k)h = m$ e mostriamo che l'applicazione $\Theta : H \times_\theta K \to G$, definita come $\Theta(h,k) = \alpha(h)s(k)$ è un isomorfismo:

- è un omomorfismo:

$$\Theta((h,k)(h',k')) = \Theta(h(\theta(k)h'),kk') = \alpha(h)\alpha(\theta(k)h')s(k)s(k') =$$
$$= \alpha(h)s(k)\alpha(h')s(k)^{-1}s(k)s(k') = \alpha(h)s(k)\alpha(h')s(k') = \Theta(h,k)\Theta(h',k')$$

- è iniettivo: se $\alpha(h)s(k) = 1_G$, $s(k) = \alpha(h^{-1}) \in \alpha(H) = ker(\beta)$ e quindi $\beta s(k) = 1_K$, ma $\beta s = id_K$ e quindi $k = 1_K$; allora $\alpha(h) = 1_G$, ma α è iniettiva e quindi $h = 1_H$;

- è suriettivo: sia $x \in G$; $\beta(x) \in G$, $\beta(x) = \beta(s\beta(x))$ e quindi $\beta(x(s\beta(x))^{-1}) = \beta(x)\beta(s\beta(x))^{-1} = 1_K$, cioè $x(s\beta(x))^{-1} \in Ker(\beta)$ e quindi esiste $h \in H$ tale che $\alpha(h) = x(s\beta(x))^{-1}$. Consideriamo l'elemento $(h,\beta(x)) \in H \times_\theta K$:
  $\Theta(h,\beta(x)) = \alpha(h)s(\beta(x)) = x$

Nel nostro caso possiamo considerare la successione $1 \to T \to G \to P \to 1$ dove la mappa da T a G è l'inclusione mentre quella da G a P è la mappa quoziente; la prima è ovviamente iniettiva così come la seconda è suriettiva, nucleo e immagine coincidono per come è definito P, quindi è una successione esatta corta.
Possiamo vedere queste successioni come restrizione della successione esatta corta

$$1 \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Psi} Iso(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\Phi} O(\mathbb{R}^2) \to 1$$

dove Ψ manda un vettore v di $\mathbb{R}^2$ nella traslazione τ_v e Φ è l'omomorfismo definito nella Proposizione 0.1.4. Tale successione spacca: basta considerare $s : O(\mathbb{R}^2) \to Iso(\mathbb{R}^2)$ che manda $\mathbf{A} \in O(\mathbb{R}^2)$ nell'isometria $\varphi(x) = \mathbf{A}(x)$.
Allora possiamo vedere il gruppo $Iso(\mathbb{R}^2)$ come prodotto semidiretto di $\mathbb{R}^2$ e $O(\mathbb{R}^2)$,

dove l'azione di $O(\mathbb{R}^2)$ su $\mathbb{R}^2$ è data da $\theta(\mathbf{A})(v) = \mathbf{A}v$, che riletta in $Iso(\mathbb{R}^2)$ è la coniugazione:

$$\tau_{\mathbf{A}v}(x) = x + \mathbf{A}v = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}x + v) = \mathbf{A}\tau_v\mathbf{A}^{-1}(x)$$

La successione esatta corta $1 \to T \to G \to P \to 1$ spacca nel caso in cui il gruppo puntuale P è composto solo da rotazioni: in tal caso infatti sappiamo che P è generato da una rotazione ρ di angolo $\frac{2\pi}{n}$ e sappiamo che questo implica che esiste in G una rotazione di centro A e angolo $\frac{2\pi}{n}$; è sufficiente mandare ρ in tale rotazione per ottenere l'omomorfismo che funge da inverso destro di β.

1.3 Fregi

In questa sezione ci occuperemo di mostrare e discutere i gruppi discreti di isometrie il cui sottogruppo di traslazione è generato da un'unica traslazione, comunemente denominati *gruppi dei fregi* (*frieze groups* in inglese). Equivalentemente, un gruppo dei fregi è un gruppo di isometrie che fissa una data retta r e il cui gruppo delle traslazioni è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Nel seguente teorema di classificazione useremo la *notazione cristallografica* composta da 4 simboli nel seguente modo:

- il primo termine è sempre una **p** (*primitive*, vedi i gruppi dei mosaici);
- il secondo termine può essere una **m** (*mirror*), se è presente una riflessione nella direzione ortogonale a quella di traslazione, o un **1** altrimenti;
- il terzo termine può essere una **m** o una **a** (*antitraslazione*, sinonimo desueto di glissoriflessione) se è presente una riflessione o una glissoriflessione nella direzione parallela a quella di traslazione, un **1** altrimenti;
- l'ultimo termine può essere un **2**, se è presente una rotazione di angolo π, o un **1** altrimenti.

Teorema 1.3.1. *Esistono, a meno di equivalenza, soltanto sette gruppi discreti di isometrie del piano il cui sottogruppo delle traslazioni sia isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

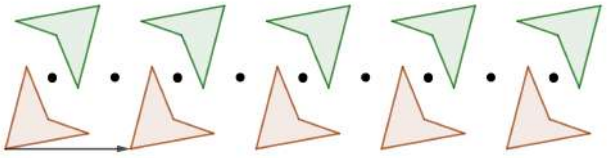
Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione indicheremo sempre con $\tau = \tau_v$ il generatore del sottogruppo delle traslazioni. Inoltre per ogni gruppo inseriremo l'immagine di un fregio con tale gruppo di simmetria. Le linee continue rappresentano

gli assi di riflessione, quelle tratteggiate gli assi di glissoriflessione, mentre i punti neri rappresentano i centri delle rotazioni di π. Abbiamo colorato dello stesso colore le figure che differiscono di una traslazione e abbiamo scelto la figura di modo che sia contenuta in un dominio fondamentale (vedi Definizione 2.0.7), così che che le sue immagini rispetto agli elementi del gruppo siano tutte disgiunte. Il numero di colori rappresenta la cardinalità del gruppo puntuale P e, in particolare, il marrone indica la figura originale, il blu indica che la figura ha subito una glissoriflessione, il verde una rotazione di π, l'arancione una riflessione di asse ortogonale alla traslazione e il nero una riflessione parallela alla traslazione.
Abbiamo già mostrato che ci sono solo quattro possibilità per il gruppo puntuale P; partiamo da questo risultato per classificare i gruppi dei fregi.

- Se $P \cong C_1$, T e G sono isomorfi e sono costituiti soltanto da infinite traslazioni di vettori multipli interi di v. Allora $G = C_\infty$, il gruppo ciclico infinito, e la presentazione è $G = \langle \tau \rangle$. La notazione cristallografica è **p111**.

p111

- Supponiamo che $P \cong C_2$: sappiamo che la corrispondente successione esatta corta spacca, l'azione di P su T è non banale e vista in $Iso(\mathbb{R}^2)$ è la coniugazione: se $\rho \in P$ è il mezzogiro, $\rho\tau_v\rho^{-1} = \tau_{-v}$, quindi G è isomorfo al gruppo diedrale infinito, composto da infinite traslazioni e infinite rotazioni di π, necessariamente attorno a centri equidistanti, tutti allineati su una retta parallela a v e la cui distanza è la metà della lunghezza di v. Il gruppo si presenta come $G = \langle \tau, \rho;\ \rho^2 = (\tau\rho)^2 = 1 \rangle$ e la notazione cristallografica è **p112**.

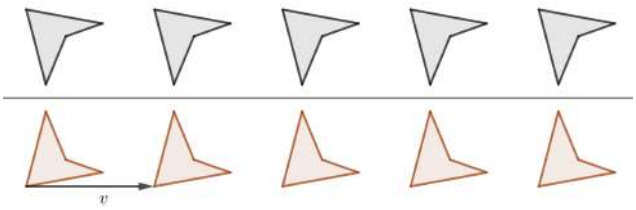


p112

- Se $P \cong D_1$ non è detto che la successione spacchi. Sia σ l'unica riflessione nonché l'unico elemento diverso dall'identità in P e sia φ l'elemento di G tale che $\Phi(\varphi) = \sigma$. φ può essere sia una riflessione che una glissoriflessione. Nel primo caso la successione spacca perché l'applicazione s che manda σ in φ è un omomorfismo, mentre nel secondo questo non è vero: $id = s(id) = s(\sigma^2) = s(\sigma)s(\sigma) = \varphi^2$ e se φ è una riflessione l'uguaglianza è vera, ma se è una glissoriflessione no.

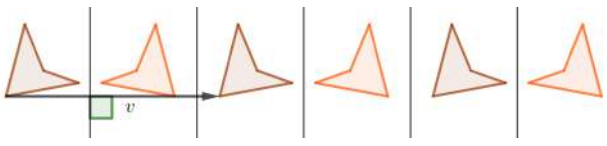
  Inoltre sappiamo anche che $\tau' = \varphi\tau_v\varphi^{-1}$ è ancora una traslazione necessariamente di un vettore multiplo di v; sia r l'asse di riflessione di σ, se r è parallelo a v, τ' fissa necessariamente $\varphi(r)$, perché $\tau'\varphi(r) = \varphi\tau_v\varphi^{-1}\varphi(r) = \varphi\tau_v(r) = \varphi(r)$, e questo significa che $\varphi(r)$ deve essere parallela a r.

  Supponiamo di essere nel primo caso, in cui $\varphi = \sigma_t$ è una riflessione: poiché $\sigma_t(r)$ deve essere parallelo a r ci sono due possibilità, $t \parallel r$ o $t \perp r$. Se $t \parallel r$, allora $\sigma_t(v) = v$ e quindi l'azione di di $P \cong D_1$ su $T \cong C_\infty$ è banale e quindi $G \cong D_1 \times C_\infty$; tale gruppo è composto da un'unica riflessione σ, infinite traslazioni e infinite glissoriflessioni, composizione della riflessione e di una traslazione. $G = \langle \sigma, \tau;\ \sigma^2 = 1,\ \tau\sigma = \sigma\tau \rangle$ e la notazione cristallografica è **p1m1**.



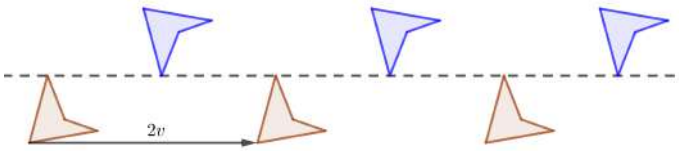
p1m1

Se invece $t \perp s$, $\sigma_t(v) = -v$ e quindi l'azione è non banale. G è isomorfo al prodotto semidiretto di D_1 e C_∞, il gruppo diedrale infinito D_∞, che contiene infinite traslazioni, infinite riflessioni di assi perpendicolari a v e distanti $\frac{\|v\|}{2}$ l'un l'altro. $G = \langle \tau, \sigma;\ \sigma^2 = (\tau\sigma)^2 = 1 \rangle$ e la notazione cristallografica è **pm11**.



pm11

Consideriamo il caso in cui φ è una glissoriflessione $\tau_w\sigma_t$, con $w \parallel t$. Sappiamo che r e $\varphi(r)$ sono parallele, ma allora anche $\varphi^2(r) = \tau_{2w}(r)$ deve essere parallelo a queste, quindi $r \parallel w \parallel t$. Inoltre $2w = nv$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$ e questo significa che $\tau_v = \varphi^2$; quindi $G = \langle\gamma\rangle$ è il gruppo ciclico infinito generato da una glissoriflessione, contiene infinite glissoriflessioni e infinite traslazioni, generate da un vettore doppio di quello della glissoriflessione minima. Notiamo che la glissoriflessione è la composizione di una traslazione e di una riflessione che non appartengono al gruppo. La notazione cristallografica è **p1a1**.

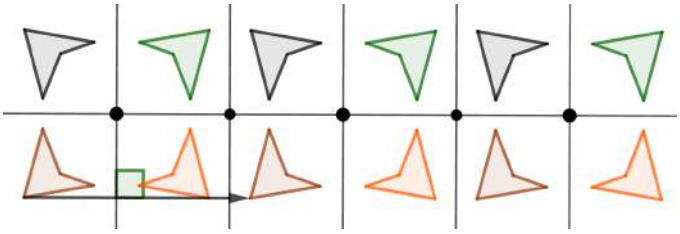


p1a1

Non ci sono altre possibilità, in quanto gli unici margini di scelta sono il vettore che genera le traslazioni v, e nel caso di **pm11** la retta di riflessione, ma a meno di affinità possiamo pensarli fissati.

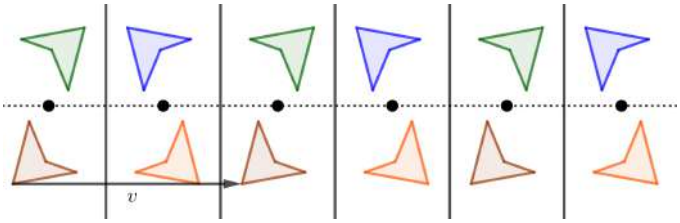
- Se $P \cong D_2$, siano σ_r e σ_s le riflessioni in P, con $r \perp s$, e la rotazione di π è la loro composizione. Siano $\varphi, \psi \in G$ tali che $\Phi(\varphi) = \sigma_r$ e $\Phi(\psi) = \sigma_s$; in questo caso, ripetendo un ragionamento simile al caso $P \cong D_1$, necessariamente una delle due è una riflessione di asse perpendicolare a v, infatti possiamo avere una glissoriflessione solo nella direzione parallela a v.
  Se entrambe le isometrie sono riflessioni, la successione spacca, in quanto basta porre $s(\sigma_r) = \varphi$, $s(\sigma_s) = \psi$ e si ha $s(id) = id$ e $s(\rho_\pi) = s(\sigma_r\sigma_s) = \varphi\psi$ che è una rotazione di π attorno all'intersezione dei due assi di simmetria. Allora G è il prodotto semidiretto di C_∞ e D_2, dove l'azione è data da $\varphi(v) = -v$ e $\psi(v) = v$. Il gruppo è composto da infinite traslazioni generate da v, una riflessione di asse parallelo a v, infinite riflessioni di assi ortogonali a v e distanti $\frac{\|v\|}{2}$ l'uno dall'altro, e infinite rotazioni di π attorno alle intersezioni tra gli assi di riflessione. Vedendo le rotazioni come prodotto tra la riflessione di asse parallelo a v e una delle riflessioni di asse ortogonale, il gruppo si presenta come $G = \langle\tau, \sigma_1, \sigma_2;\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_1\sigma_2)^2 = 1\rangle$ e la sua notazione cristallografica è

pmm2. Infine notiamo che le traslazioni possono essere viste come prodotto di due riflessioni di asse ortogonale a v.



pmm2

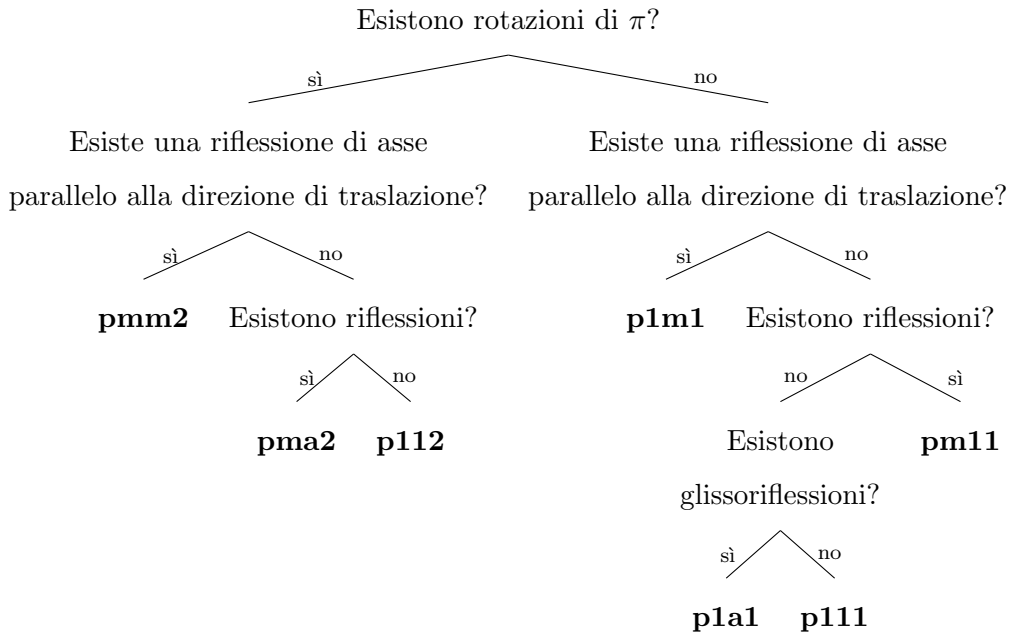
Se ψ è una glissoriflessione di asse parallelo a v e φ è una riflessione di asse perpendicolare a v, possiamo supporre $\psi^2 = \tau_v$. Allora la successione non spacca e G è isomorfo al gruppo diedrale infinito, generato da una glissoriflessione e da una riflessione di asse perpendicolare a quello della glissoriflessione; contiene infinite glissoriflessioni generate da $\gamma_{r,v}$, infinite traslazioni generate da $2v$, infinite riflessioni di assi ortogonali a r e distanti $\|v\|$ l'uno dall'altro, infinite rotazioni di π attorno a centri su r e equidistanti da due assi di riflessione successivi. $G = \langle \gamma, \sigma;\ \sigma^2 = (\gamma\sigma)^2 = 1 \rangle$ e la sua notazione cristallografica è **pma2**.



pma2

□

Mostriamo di seguito un albero decisionale utile a determinare quale sia il gruppo di simmetria di un fregio:



1.4 Mosaici

In questa sezione analizziamo invece i gruppi discreti di isometrie il cui sottogruppo delle traslazioni è isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$; tali gruppi sono comunemente denominati *gruppi dei mosaici* (*wallpaper groups* in inglese). Se nella sezione relativa ai fregi abbiamo preferito mostrare un approccio legato all'algebra, in questo caso, per non ripetere un ragionamento identico ma più complicato del precedente, preferiamo dimostrare la classificazione attraverso ragionamenti di tipo geometrico, che con le opportune semplificazioni, possono essere riproposti anche nella Scuola Secondaria di II grado.

Per classificare i gruppi dei mosaici abbiamo bisogno di richiamare alcune definizioni e dimostrare alcuni lemmi e proposizioni. D'ora in poi, sia G un gruppo discreto di isometrie del piano il cui sottogruppo delle traslazioni T è isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ generato da $\tau_1 = \tau_v$ e $\tau_2 = \tau_w$, dove v e w sono vettori linearmente indipendenti di lunghezza minima, e sia P il sottogruppo puntuale.

Definizione 1.4.1. *Dato un punto A, il **reticolo di traslazione** per G definito da A è l'insieme delle immagini di A tramite le traslazioni appartenenti a G.*
Poiché ogni traslazione in T è del tipo $\tau_1^i\tau_2^j$, tutti i punti del reticolo si possono scrivere come $A_{i,j} = \tau_1^i\tau_2^j(A)$.

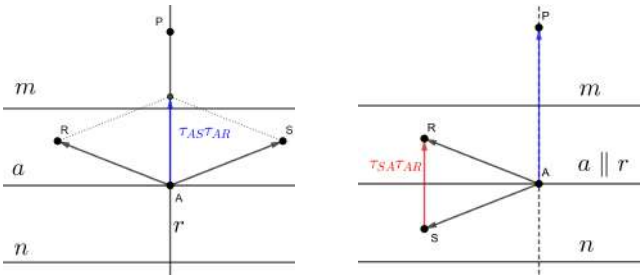
Definizione 1.4.2. *Una **cella unitaria** (**unit cell** in inglese) di G rispetto a un punto A è una qualsiasi delle regioni individuate da punti del tipo $A_{i,j}$, $A_{i+1,j}$, $A_{i,j+1}$ e $A_{i+1,j+1}$. Ovviamente tali celle unitarie sono sempre dei parallelogrammi.*

Lemma 1.4.1. *Se G contiene un'isometria dispari, allora la cella unitaria è rombica o rettangolare.*

Dimostrazione. Esistono soltanto due casi: sono presenti delle riflessioni oppure tutte le isometrie dispari sono glissoriflessioni.
Supponiamo che una riflessione σ_r appartenga a G; vogliamo mostrare che r è parallela alla diagonale di una cella unitaria rombica o a un lato di una cella unitaria rettangolare. Sia A un punto su r e sia τ_{AP} la traslazione in G di lunghezza minima. Abbiamo due casi:

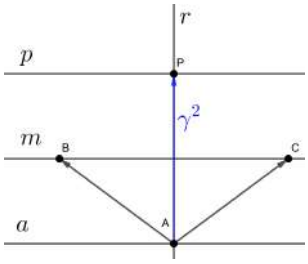
- AP non è né perpendicolare né parallelo a r. Sia $Q = \sigma_r(P)$, allora $\tau_{AQ} = \sigma_r\tau_{AP}\sigma_r \in G$ perché composizione di elementi di G. Poiché $\|AP\| = \|AQ\|$ e A, P e Q sono tre punti non allineati, necessariamente $T = \langle \tau_{AP}, \tau_{AQ} \rangle$. Da ciò, la cella unitaria è rombica e r contiene una diagonale di tale rombo.

- Viceversa, $AP \in r$ o $AP \perp r$. Siano p la perpendicolare a AP passante per A, m l'asse di AP e $n = \sigma_p(m)$, come mostrato nelle figure sottostanti.
  Sia R tale che τ_{AR} è di lunghezza minima in $T \setminus \langle \tau_{AP} \rangle$; necessariamente R si trova nella regione compresa tra m e n, rette incluse, altrimenti $(\tau_{AP})^{\pm 1}\tau_{AR}$ è più corta di τ_{AR}. Inoltre, potendo considerare sia τ_{AR} che la sua inversa, possiamo supporre che R appartenga alla regione compresa tra a e m, rette comprese. Sia $S = \sigma_r(R)$ e supponiamo che R sia strettamente compresa tra a e m. Se r contiene AP, allora $\tau_{AS}\tau_{AR} \in G$ ed è più corta di τ_{AP}, come mostrato nella figura (a). Se invece $r \perp AP$, allora $\tau_{SA}\tau_{AR} = \tau_{SR}$ è nuovamente una traslazione in G più corta di τ_{AP}, come mostrato nella figura (b).
  Quindi R appartiene necessariamente a m o a; se $R \in a$, allora $\langle \tau_{AR}, \tau_{AS} \rangle$ coincide con $\langle \tau_{AP}, \tau_{AR} \rangle = T$ poiché $\tau_{AP} = \tau_{AS}\tau_{AR}$. Di conseguenza la cella unitaria è rombica e r è parallela a una diagonale del rombo. Se $R \in m$, $T = \langle \tau_{AP}, \tau_{AR} \rangle$, la cella unitaria è rettangolare e r è parallelo a un lato del rettangolo.



Supponiamo che le uniche isometrie dispari in G siano glissoriflessioni. Sia γ una glissoriflessione di asse r. Sappiamo già, dalla discussione fatta sui fregi, che l'asse di γ è necessariamente parallelo a una direzione di traslazione. Siano A un punto su r, a la perpendicolare a r per A, $m = \gamma(a)$, $p = \gamma^2(a)$ e $P = \gamma^2(A) = p \cap r$. La minima traslazione lungo r è $\gamma^2 = \tau_{AP}$ e sia τ_{AB} la minima traslazione in $T \setminus \langle \gamma^2 \rangle$; con lo stesso ragionamento di prima possiamo supporre che B sia compreso tra le rette a e p, soltanto a inclusa.

Se $B \in a$, allora la cella unitaria è rettangolare e r è parallelo a uno dei suoi lati. Altrimenti, sia $C = \sigma_r(B)$; notiamo che $\tau_{AC} = \gamma\tau_{A,B}\gamma^{-1} \in G$. Allora $\tau_{AC}\tau_{AB}$ è necessariamente una traslazione parallela a r, quindi un multiplo di γ^2 e questo è possibile se e solo se B appartiene a m. Allora $\tau_{AC}\tau_{AB} = \gamma^2$ e $T = \langle \tau_{AC}, \tau_{AB} \rangle$. In tal caso la cella unitaria è rombica e l è parallela a una diagonale del rombo.



□

Lemma 1.4.2. *Se G contiene una glissoriflessione che fissa il reticolo di traslazione, allora G contiene anche una riflessione.*

Dimostrazione. Se una glissoriflessione γ porta A in P e la traslazione τ_{AP} appartiene a G, allora $\tau_{AP}^{-1}\gamma$ appartiene a G ed è una riflessione, in quanto è una isometria dispari, perché prodotto di una pari e di una dispari, e fissa A. □

Cominciamo ad analizzare le rotazioni.

Definizione 1.4.3. *Un punto P è un **n-centro** di G se le rotazioni di centro P appartenenti a G formano il gruppo ciclico C_n.*

Sappiamo già dalla Restrizione Cristallografica (Prop. 1.1.4) che esistono solo 2-, 3-, 4- o 6-centri.

Lemma 1.4.3. *Sia P un n-centro e φ un'isometria in G, allora anche $\varphi(P)$ è un n-centro.*

Dimostrazione. Ripetendo il ragionamento fatto con le affinità, $\varphi\rho_{P,\frac{2\pi}{n}}\varphi^{-1}$ è ancora una rotazione di centro $\varphi(Q)$ e appartiene a G; ricordando che la rotazione può essere vista come la composizione di due riflessioni i cui angoli si incontrano in P e formano un angolo di $\frac{\pi}{n}$ e che le isometrie preservano gli angoli, è chiaro che anche la nuova rotazione ha lo stesso ordine di quella originale. □

Approfittiamo di questo Lemma per ricordare anche che se σ_l appartiene a G e esiste un'isometria che mappa l in m, anche σ_m appartiene a G.

Nella classificazione dei gruppi dei mosaici cercheremo spesso il centro di rotazione più vicino a quello considerato; è quindi utile mostrare che i centri di rotazione non possono essere "troppo vicini":

Proposizione 1.4.1. *Siano $\rho_{A,\frac{2\pi}{n}}$ e $\rho_{P,\frac{2\pi}{n}}$, con $A \neq P$, due rotazioni in G, allora $2AP$ è maggiore o uguale alla lunghezza della traslazione minima in G.*

Dimostrazione. G contiene la traslazione $\tau_{AP} = \rho_{P,\frac{2\pi}{n}}\rho_{A,-\frac{2\pi}{n}}$. Per la struttura di T, $\tau_{AB} = \tau_1^i\tau_2^j$, con i, j interi. Allora $\rho_{P,\frac{2\pi}{n}}(A) = \tau_1^i\tau_2^j\rho_{A,\frac{2\pi}{n}}(A) = A_{i,j}$ e quindi o P è il punto medio di $AA_{i,j}$ se $n = 2$ oppure il triangolo $PAA_{i,j}$ è isoscele. In ogni caso $2AP = AP + A_{i,j}P \geq AA_{i,j}$ per la disuguaglianza triangolare. □

Il lemma implica che due n-centri, o un 2−centro e un 4−centro, o un 2−centro e un 6−centro o un 3−centro e un 6−centro non possono essere "troppo vicini".

Prima di iniziare con la classificazione, introduciamo anche in questo caso la notazione cristallografica; da notare che quella relativa ai fregi è in realtà una restrizione di quella che presenteremo ora. Consideriamo una cella unitaria generata

da due vettori di lunghezza minima v e w con i vertici in corrispondenza dei centri di rotazione di ordine massimo, o un punto qualsiasi in caso non ci siano rotazioni, e si scelga un *asse x* nella direzione di v. Nei casi in cui ci sia una sola direzione per gli assi di (glisso)riflessione e il parallelogramma che compone la cella unitaria non risulta simmetrico rispetto a tale asse, oppure ci sono due direzioni per gli assi di (glisso)riflessione e il parallelogramma non è simmetrico rispetto ad essi, si sceglie la cella unitaria di modo che sia simmetrica a tali assi e si sceglie un *asse x* ortogonale a una direzione di riflessione. Sotto queste premesse, la notazione è così composta:

- il primo simbolo è una **p** (*primitive*) se l'*asse x* è scelto in direzione di v, o una **c** (*centered*) nel secondo caso;
- il secondo simbolo è un numero **n** che indica l'ordine massimo di rotazione, posto pari a **1** nel caso in cui non ci siano rotazioni;
- il terzo simbolo può essere una **m** (*mirror*), una **g** (*glide*) o un **1**, a indicare la presenza di una riflessione, di una glissoriflessione o l'assenza di entrambe lungo la direzione ortogonale all'*asse x*;
- il quarto simbolo può essere una **m**, una **g** o un **1**, con lo stesso significato di prima ma nella direzione che forma un angolo α con l'*asse x*, dove

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } n = 1 \text{ o } n = 2 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } n = 4 \\ \frac{\pi}{3} & \text{se } n = 3 \text{ o } n = 6 \end{cases}$$

Come vedremo, nel seguito sarà spesso possibile abbreviare questa notazione senza ambiguità, in quanto alcune isometrie forzano l'esistenza di altre e quindi alcuni simboli risultano superflui.

Teorema 1.4.1. *Esistono, a meno di equivalenza, 17 gruppi dei mosaici.*

Dimostrazione. Iniziamo finalmente a classificare i gruppi dei fregi a partire da qual è il massimo ordine di rotazione presente in G.

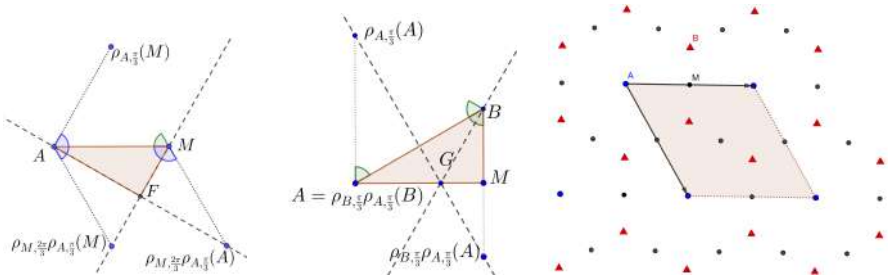
L'ordine massimo di rotazione è 6.

Mostriamo quali sono le simmetrie richieste in presenza di un 6-centro:

Proposizione 1.4.2. *Sia A un 6-centro per il gruppo G. Allora:*

- *non ci sono 4-centri;*
- *il centro di rotazione più vicino è un 2-centro M;*
- *A è il centro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri e i punti medi dei lati sono 2-centri;*
- *tutti i centri di rotazioni sono determinati da A e B*

Dimostrazione. G non può contenere sia un 4-centro che un 6-centro, perché se così fosse $\rho_{B,\frac{\pi}{2}}\rho_{A,-\frac{\pi}{3}} = \rho_{C,\frac{\pi}{6}}$ ma non possono esistere rotazioni di ordine 12 in G.
Sia M l'n-centro più vicino a A: se fosse un 3- o un 6-centro, allora $\rho_{M,\frac{2\pi}{3}}\rho_{A,\frac{\pi}{3}} = \rho_{F,\pi}$ appartiene a G; mostriamo che F è più vicino ad A di M ed è un 2-centro.
In generale, il centro di una rotazione appartiene all'asse del segmento che congiunge un punto con la sua immagine, quindi per trovarlo basta considerare due punti, le relative immagini e tracciare gli assi delle opportune coppie. Applicando questa procedura, l'immagine (a) mostra chiaramente che $\|AF\| < \|AM\|$.
F non può essere un 4-centro, né un 3-centro, ma potrebbe essere un 6-centro: se così fosse possiamo ripetere la costruzione e trovare un 2-centro dopo un numero finito di passi, altrimenti avremmo una successione di centri di rotazione arbitrariamente vicini ad A, ma questo è impossibile visto che G è un gruppo discreto.
Quindi M, il centro di rotazione più vicino ad A, è un 2-centro. Definiamo B tramite l'equazione $\rho_{B,\frac{2\pi}{3}} = \rho_{M,\pi}\rho_{A,\frac{\pi}{3}}$, quindi B è un 3- o un 6-centro. Notiamo che non può essere un 6-centro perché verrebbe a crearsi un nuovo centro J tra A e M definito dall'equazione $\rho_{J,\frac{2\pi}{3}} = \rho_{B,\frac{2\pi}{6}}\rho_{A,\frac{2\pi}{6}}$, come mostrato nella figura (b). Allora B è un 3-centro e le immagini di B tramite le rotazioni di centro A formano l'esagono cercato, mentre le immagini di M tramite le stesse rotazioni sono i punti medi dei lati dell'esagono e sono 2-centri. Se ora consideriamo $\rho_{M,\pi}(A)$ otteniamo un nuovo 6-centro e da cui possiamo costruire di nuovo tutti gli altri centri di rotazione; perciò A e M determinano completamente i centri di rotazione, che sono quindi disposti come in figura (c), dove i 6-centri sono punti blu, i 3-centri sono triangoli rossi e i 2-centri sono punti neri. □

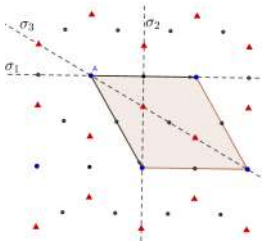


(a) (b) (c) **p6**

Poiché un 6-centro deve essere mandato in un 6-centro da ogni isometria di G, le due traslazioni indicate in figura sono le traslazioni minime di T ed essendo linearmente indipendenti lo generano. Quindi la cella unitaria nel caso in cui G contenga rotazioni di ordine 6 è un rombo di angoli $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

Se G non contiene isometrie dispari, abbiamo trovato il primo gruppo dei mosaici **p611=p6** che si presenta come $\langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{2\pi}{6}} \rangle = \langle \rho_{A,\frac{2\pi}{6}}, \rho_{M,\pi} \rangle$, dove abbiamo omesso le ovvie relazioni sulle rotazioni e nella seconda presentazione abbiamo omesso le traslazioni, mentre il suo gruppo puntuale è C_6. Il gruppo, oltre alle traslazioni, contiene infinite rotazioni di ordine 2,3 e 6.

Se invece G contiene isometrie dispari, poiché il reticolo di traslazione generato da A coincide con il reticolo formato dai 6-centri, ogni isometria deve fissare il reticolo di traslazione e quindi, per il Lemma 1.4.2, G necessariamente contiene delle riflessioni. Fissata una cella, le riflessioni che fissano il reticolo sono 6: le due con asse le diagonali del rombo e le 4 il cui asse è la perpendicolare a un lato e passante per un vertice che non appartiene a tale lato; inserita una di queste, automaticamente sono presenti anche tutte quelle di asse parallelo e traslato di un vettore appartenente a T. Ma, vista la ricchezza di rotazioni in G, inserita una riflessione anche tutte le altre devono appartenere a G. Abbiamo quindi il secondo gruppo dei mosaici **p6mm=p6m** che si presenta come $G = \langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{2\pi}{6}}, \sigma_1 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$, con le notazioni che fanno riferimento alla figura sottostante, dove abbiamo indicato in linea tratteggiata gli assi di riflessione. Il gruppo contiene infinite traslazioni, infinite rotazioni di ordine 2, 3 e 6, infinite riflessioni e glissoriflessioni lungo 6 assi in direzioni diverse che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ tra loro e il suo gruppo puntuale è D_6.



p6m

Tornando ai ragionamenti della dimostrazione sui fregi, in entrambi i casi la successione spacca e i gruppi in tal caso si dicono **simmorfi**. Se consideriamo un gruppo dei mosaici contenente rotazioni di ordine 6, per distinguere i due casi è sufficiente controllare se esiste o meno un asse di simmetria.

L'ordine massimo di rotazione è 3

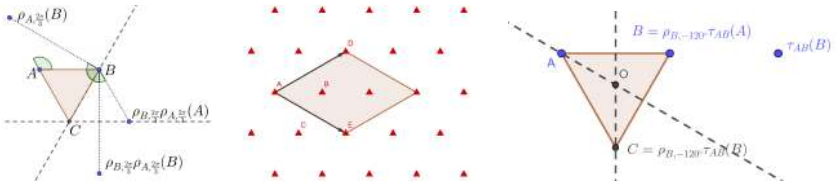
Anche in questo caso abbiamo una Proposizione che determina la struttura degli n-centri:

Proposizione 1.4.3. *Supponiamo che G contenga un 3-centro A ma non un 6-centro. Allora:*

- *ogni centro di rotazione è un 3-centro;*
- *A è il centro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri;*
- *ogni centro di rotazione è determinato da A e dal 3-centro a lui più vicino.*

Dimostrazione. Se esistesse un 2-centro M, l'isometria $\rho_{A,\frac{2\pi}{3}}\rho_{B,\pi}$ sarebbe una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ ma non esistono 6-centri in G. Ovviamente non esistono 4-centri.
Sia B il 3-centro più vicino ad A, consideriamo il 3-centro C definito da $\rho_{B,\frac{2\pi}{3}}\rho_{A,\frac{2\pi}{3}} = \rho_{C,\frac{4\pi}{3}}$ e notiamo, come è evidente dall'immagine (a), che il triangolo ABC è equilatero; quindi le immagini di B e C sotto le potenze di $\rho_{A,\frac{2\pi}{3}}$ sono i vertici di un esagono regolare di centro A; ripetendo il ragionamento per tali vertici notiamo che tutti i 3-centri sono centri di esagoni regolari, come mostrato in figura (b).
Consideriamo ora $\rho_{B,-\frac{2\pi}{3}}\tau_{A,B}$ e $\rho_{C,\frac{2\pi}{3}}\tau_{A,C}$. Entrambe sono ancora rotazioni e notiamo che sono entrambe uguali a $\rho_{O,\frac{2\pi}{3}}$, dove O è il centro di ABC, poiché, ad esempio, la prima manda A in B e B in C, come si vede dalla figura (c). Poiché O non può essere un 3-centro, altrimenti B non sarebbe il 3-centro più vicino ad A,

nessuna delle due traslazioni appartiene a G. Quindi se τ_{AD} è una traslazione minima in G, D è un 3-centro, perché ogni isometria di G manda 3-centri in 3-centri, ma non è uno dei 3-centri più vicini ad A. Definiamo le traslazioni $\tau_{AD} = \rho_{B,\frac{2\pi}{3}}\rho_{A,-\frac{2\pi}{3}}$ e $\tau_{AE} = \rho_{C,\frac{2\pi}{3}}\rho_{A,-\frac{2\pi}{3}}$, queste sono minime e generano il gruppo delle traslazioni. Anche in questo caso la cella unitaria è un rombo di angoli $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$.



(a) (b) **p3** (c)

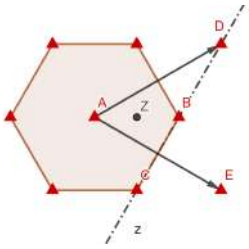
□

Se non ci sono isometrie dispari abbiamo un altro gruppo dei mosaici: **p311=p3**. Il gruppo è simmorfo, $G = \langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{2\pi}{3}} \rangle = \langle \rho_{A,\frac{2\pi}{3}}, \rho_{B,\frac{2\pi}{3}} \rangle$ e il suo gruppo puntuale è C_3. G contiene infinite traslazioni e infinite rotazioni di ordine 3.

Vogliamo ora considerare il caso in cui sono presenti anche isometrie dispari: supponiamo che G contenga glissoriflessioni e non riflessioni, allora, per il Lemma 1.4.2, una glissoriflessione γ deve mandare il 3-centro A in un 3-centro che non appartiene al reticolo di traslazione generato a partire da A. A meno di comporre γ con una traslazione e una rotazione di centro A che appartengono a G, possiamo supporre che γ^2 sia una traslazione minima e, senza perdere di generalità, possiamo quindi supporre che $\gamma(A) = B$. Sappiamo che possiamo sempre vedere una glissoriflessione come la composizione di un mezzogiro con una riflessione il cui asse non contiene il mezzogiro, quindi supponiamo che $\gamma = \sigma_z\rho_{Z,\pi}$, dove z è una retta per B e Z è il punto medio di AB. $\rho_{Z,\pi}$ e γ fissano l'insieme dei 3-centri, quindi anche σ_z deve fissarlo e perciò z deve essere una delle rette che congiungono B con i 3-centri che lo circondano. In particolare, a meno di comporre σ_z con una rotazione di centro B, possiamo supporre che z sia perpendicolare a CE o che passi per B e C: nel primo caso arriviamo a un assurdo perché allora BC è l'asse di glissoriflessione e $\tau_{EA}\gamma^2$ sarebbe una traslazione di lunghezza $\|AB\|$ e questo non è possibile.

Nel secondo caso, $\rho_{B,\frac{2\pi}{3}}\gamma = \sigma_{AB}\sigma_z\sigma_z\rho_{Z,\pi} = \sigma_{AB}\rho_{Z,\pi}$ è una isometria dispari che fissa

C e Z, quindi è la riflessione di asse CZ. Quindi abbiamo dimostrato che non è possibile estendere **p3** senza inserire una riflessione.

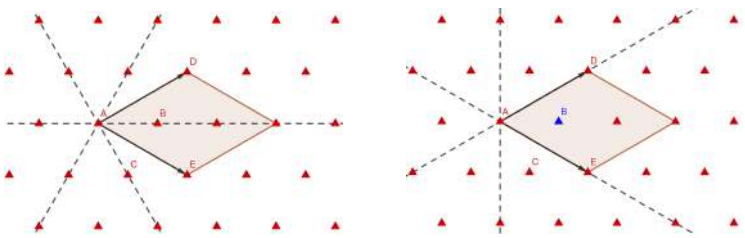


Supponiamo che G contenga la riflessione σ_r; questa deve fissare l'insieme dei 3-centri. Notiamo che un qualsiasi asse di simmetria della disposizione dei 3 centri passa per almeno vertice, supponiamo quindi che passi per A; allora r può essere o la retta AB o la retta AD. Notiamo che l'aggiunta di una delle due non implica l'aggiunta dell'altra, perché se aggiungiamo entrambe la loro composizione è una rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$, cioè un 6-centro e questo non è possibile.

Se $r = AB$ otteniamo il gruppo **p3m1**= $\langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{2\pi}{3}}, \sigma_{AB} \rangle = \langle \sigma_{AB}, \sigma_{AC}, \sigma_{BC} \rangle$ e contiene, oltre agli elementi di **p6**, infinite riflessioni e infinite glissoriflessioni lungo 3 assi diversi. Il gruppo è simmorfo e il suo gruppo puntuale è D_3.

Oppure $r = AD$ e otteniamo il gruppo **p31m**=$\langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{2\pi}{3}}, \sigma_{AD} \rangle$, questo contiene oltre agli elementi di **p6**, infinite riflessioni e infinite glissoriflessioni lungo 3 assi diversi. Il gruppo è simmorfo e il suo gruppo puntuale è D_3.

Resta quindi da capire come distinguere i tre gruppi nei quali l'ordine massimo di rotazione è 3: nel caso non ci siano assi di riflessione, il gruppo è **p3**; se invece sono presenti degli assi di riflessione, dobbiamo cercare se ci sono 3-centri che non appartengono agli assi di riflessione: in caso affermativo si tratta di **p31m**, altrimenti si tratta di **p3m1**. Ad esempio nell'immagine sottostante relativa e **p3m1**, il punto B colorato di blu non appartiene a nessun asse di riflessione.



p3m1 **p31m**

L'ordine massimo di rotazione è 4

In modo simile al caso dei 6-centri, possiamo stabile la struttura degli n-centri.

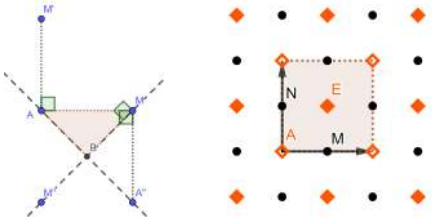
Proposizione 1.4.4. *Sia A un 4-centro per G, allora:*

- *non ci sono né 3-centri né 6-centri;*
- *il centro di simmetria più vicino ad A è un 2-centro M;*
- *A è il centro di un quadrato i cui vertici sono 4-centri; i punti medi dei lati sono 2-centri;*
- *tutti i centri di rotazione sono determinati da A e M.*

Dimostrazione. Nella Proposizione 1.4.2 abbiamo mostrato che non esiste un gruppo dei mosaici che contiene sia 4-centri che 3- e/o 6-centri, quindi G può contenere solo 2- e 4-centri. Sia M il centro di rotazione più vicino ad A: se M fosse un 4-centro, con lo stesso ragionamento del caso dei 6-centri, il punto N definito da $\rho_{N,\pi} = \rho_{M,\frac{\pi}{2}}\rho_{A,\frac{\pi}{2}}$ è un 2-centro più vicino ad A di M, come in figura (a). Quindi M è un 2-centro.

Consideriamo il 4-centro E definito da $\rho_{E,\frac{\pi}{2}} = \rho_{M,\pi}\rho_{A,-\frac{\pi}{2}}$; le immagini di E e M tramite le rotazioni di centro A si dispongono, rispettivamente, come i vertici di un quadrato e i punti medi dei lati dello stesso, come mostrato in (b).

Consideriamo la traslazione τ_{AE}: se appartenesse a G potremmo definire $\rho_{Z,\pi} = \tau_{A,E}(\rho_{A,\frac{\pi}{2}})^2$, dove Z è il punto medio AE, in quanto tale isometria è una rotazione di π che scambia A con E, e avremmo un 2-centro più vicino a A di M; quindi τ_{AE} non appartiene a G. Allora, considerati M e $N = \rho_{A,\frac{\pi}{2}}(M)$, le traslazioni minime in G sono $\tau_1 = \rho_{M,\pi}\rho_{A,\pi}$ e $\tau_2 = \rho_{N,\pi}\rho_{A,\pi}$, in quanto ogni traslazione deve mandare 4-centri in 4-centri e queste sono le traslazioni più corte in G con questa proprietà. Evidentemente quando G contiene 4-centri, la cella unitaria è quadrata. □



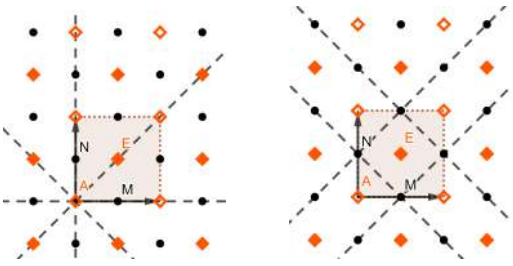
(a) (b) **p4**

Se G non contiene isometrie dispari il gruppo è **p411=p4**. Il gruppo è simmorfo, il suo gruppo puntuale è C_4 e contiene infinite rotazioni di ordine 2 e 4. $G = \langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{\pi}{2}} \rangle = \langle \rho_{A,\frac{\pi}{2}}, \rho_{E,\frac{\pi}{2}} \rangle$ e la seconda presentazione non ha bisogno di traslazioni.

Supponiamo ora che G contenga una glissoriflessione, ma nessuna riflessione. Per il Lemma 1.4.2, γ manda un 4-centro in un 4-centro che non appartiene al suo reticolo di traslazione; a meno di comporre γ con una traslazione, possiamo supporre che $\gamma(A) = E$. Sia Z il punto medio di AE, e sia $\gamma = \sigma_z \rho_{Z,\pi}$, con z una retta passante per E. Esattamente come nel caso dei 3-centri, σ_z fissa l'insieme dei 4-centri e quindi z è ME, BE o NE, dove $B = \rho_{M,\pi}(A)$ e $N = \rho_{A,\frac{\pi}{2}}(M)$. Per ciascuno di questi casi, con facili conti, si può mostrare che componendo γ con una opportuna rotazione attorno a E si ottiene una riflessione; questo implica che per estendere **p4** è necessario aggiungere delle riflessioni. Supponiamo $\sigma_r \in G$, allora r è una linea di simmetria per l'insieme dei 4-centri; vista l'abbondanza di rotazioni in G, esistono solo due casi: r passa o non passa per un 4-centro. Con le notazioni di prima, $r = AE$ o $r = NM$. Notiamo che se aggiungiamo entrambe le riflessioni otterremmo un centro di rotazione più vicino a A di M e questo è impossibile.

- Se aggiungiamo una riflessione di asse passante per un 4-centro, otteniamo il gruppo **p4mm=p4m** che contiene, oltre agli elementi di **p4**, infinite riflessioni lungo quattro direzioni diverse che formano angoli di $\frac{\pi}{2}$ e infinite glissoriflessioni lungo due assi ortogonali. È simmorfo e il suo gruppo puntuale è D_4. $G = \langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{\pi}{2}}, \sigma_{AE} \rangle = \langle \sigma_{AE}, \sigma_{EM}, \sigma_{AM} \rangle$.

- se aggiungiamo una riflessione il cui asse *non* passa per i 4-centri, allora otteniamo **p4gm=p4g** che contiene infinite riflessioni lungo due direzioni ortogonali e infinite glissoriflessioni lungo quattro assi che formano angoli di $\frac{\pi}{2}$ tra loro. $G = \langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\frac{\pi}{2}}, \sigma_{MN} \rangle$, non è simmorfo e ll gruppo puntuale è D_4.



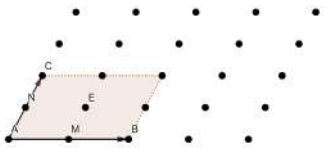
p4m **p4g**

I 3 casi si distinguono nel seguente modo: cerchiamo degli assi di simmetria, se non ci sono il gruppo è **p4**; altrimenti cerchiamo se esistono 4-centri che non appartengono agli assi di simmetria: in caso affermativo il gruppo è **p4g**, altrimenti è **p4m**. Un altro modo per distinguere i due gruppi, spesso più comodo di cercare i centri di rotazione, è quello di individuare gli assi di simmetria nelle diverse direzioni: se esistono soltanto due direzioni possibili il gruppo è **p4g**, altrimenti è **p4m**.

L'ordine massimo di rotazione è 2

Supponiamo che tutti i centri di rotazione in G siano 2-centri e sia A uno di questi. Sia $\langle \tau_{AB}, \tau_{AC} \rangle$ il sottogruppo delle traslazioni di G e consideriamo $\rho_{M,\pi} = \tau_{AB}\rho_{A,\pi}$, $\rho_{N,\pi} = \tau_{AC}\rho_{A,\pi}$ e $\rho_{E,\pi} = \rho_{N,\pi}\rho_{A,\pi}\rho_{M,\pi}$. Si nota facilmente che M e N sono i punti medi dei lati del parallelogramma generato da AB e AC, che è una cella unitaria, mentre E è l'intersezione delle diagonali di tale parallelogramma; tutti e tre sono 2-centri. Applicando le isometrie appena introdotte ai punti che abbiamo nominato otteniamo tutti i 2-centri di G.

Se non ci sono isometrie dispari, questi 2-centri corrispondono agli elementi di **p211=p2**, che è simmorfo, il suo gruppo puntuale è C_2 e contiene infinite rotazioni di ordine due disposte sui vertici, sui punti medi e sull'intersezione delle diagonali di un parallelogramma qualsiasi, che fa da cella unitaria. Si può presentare come $\langle \tau_{AB}, \tau_{BC}, \rho_{A,\pi} \rangle = \langle \rho_{A,\pi}, \rho_{M,\pi}, \rho_{N,\pi} \rangle$.



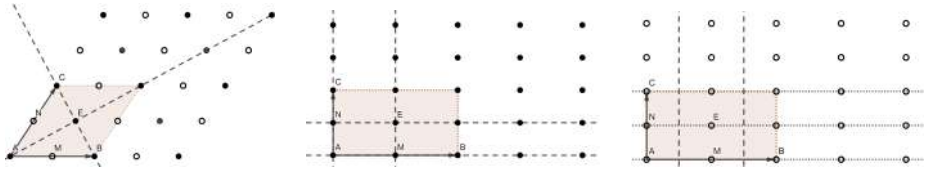
p2

Supponiamo ora che G contenga una riflessione σ_r, allora per il Lemma 1.4.1 la cella unitaria è rombica o rettangolare. Supponiamo che la cella unitaria sia rombica non rettangolare, allora r è parallelo a una delle diagonali del rombo e σ_r deve fissare l'insieme dei 2-centri, quindi è necessario che r passi per almeno un 2-centro. Possiamo supporre, senza perdere di generalità che r passi per A ed E; notiamo inoltre che inserire σ_{AE} implica che anche la riflessione σ_{BE} appartenga a G. Non essendoci altre riflessioni che possiamo aggiungere, abbiamo ottenuto il gruppo **c2mm=cmm** che è simmorfo, la sua cella unitaria è un qualsiasi rombo, il suo gruppo puntuale

è D_2 e si presenta come $\langle \tau_{AB}, \tau_{BC}, \sigma_{AE}, \sigma_{BE} \rangle = \langle \rho_{M,\pi}, \sigma_{AE}, \sigma_{BE} \rangle$. Il gruppo contiene, oltre agli elementi di **p2**, infinite riflessioni e infinite glissoriflessioni lungo assi ortogonali. Nella figura sottostante relativa a questo gruppo abbiamo indicato con un pallino vuoto i 2-centri che non appartengono a un asse di riflessione.

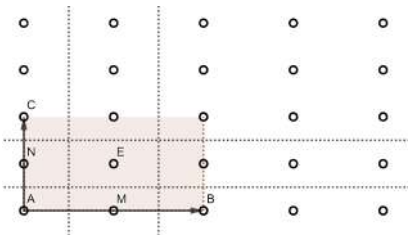
Supponiamo ora che la cella unitaria sia rettangolare. Allora l è parallela a un lato della cella unitaria e, poiché deve fissare l'insieme dei 2-centri, abbiamo due possibilità: l passa attraverso un 2-centro o l è equidistante da due file di 2-centri. Analizziamo il primo caso: senza perdere di generalità, supponiamo che l passi per A e M, ma la struttura dei 2-centri impone l'introduzione di tutte le riflessioni passanti per due vertici adiacenti del parlallelogramma $NAME$. Non possiamo introdurre il secondo tipo di riflessioni altrimenti avremmo un 2-centro più vicino ad A di M. Abbiamo quindi trovato il gruppo **p2mm=pmm**. Il gruppo è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_2 e la sua cella unitaria è un qualsiasi rettangolo. $G = \langle \tau_{AB}, \tau_{AC}, \sigma_{AB}, \sigma_{AC} \rangle = \langle \sigma_{AM}, \sigma_{ME}, \sigma_{EN}, \sigma_{NA} \rangle$ e contiene, oltre agli elementi di **p2**, infinite riflessioni lungo due assi ortogonali e nessuna glissoriflessione.

Nel secondo caso, senza perdere di generalità, sia r sia l'asse del segmento AM; mostriamo che non possiamo inserire altre famiglie di riflessione: non possiamo introdurre le riflessione lungo l'asse di AN altrimenti avremmo un 2-centro più vicino ad A di M, né le riflessioni del primo tipo per quanto detto prima. In questo modo abbiamo ottenuto il gruppo **p2mg=pmg**, che non è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_2 e la sua cella unitaria è rettangolare. La sua presentazione è $\langle \tau_{AB}, \tau_{AC}, \rho_{A,\pi}, \sigma_p \rangle = \langle \rho_{A,\pi}, \rho_{N,\pi}, \sigma_p \rangle$ dove p è l'asse di AM, e contiene, oltre agli elementi di **p2**, infinite riflessioni lungo una sola direzione e infinite glissoriflessioni lungo la direzione perpendicolare all'asse di riflessione. I 2-centri appartengono agli assi di glissoriflessione ma non a quelli di riflessione; nella figura relativa gli assi di riflessioni sono in linea tratteggiata, quelli di glissoriflessione sono in linea puntinata.



cmm **pmm** **pmg**

Non ci altri casi perché se introducessimo una riflessione parallela a un lato del parallelogramma e una parallela a una diagonale, la cella unitaria sarebbe un quadrato per il Lemma 1.4.1 e avremmo una rotazione di $\frac{\pi}{2}$, ma questo non è possibile.Tutti gli altri casi possibili sono stati esaminati discutendo i gruppi precedenti.
Resta quindi da analizzare il caso in cui G contiene una glissoriflessione ma nessuna riflessione: l'asse di glissoriflessione può contenere o meno un 2-centro.
Se l'asse di glissoriflessione contiene un 2-centro, supponiamo che tale asse sia AM e che γ^2 sia una traslazione minima, per esempio τ_{AB}. Allora se consideriamo $\rho_{M,\pi}\gamma$, $\rho_{M,\pi}\gamma(A) = \rho_{M,\pi}(B) = A$ e quindi, essendo un isometria dispari che fissa un punto, è necessariamente una riflessione; per questo è da escludersi il primo caso.
Sia r l'asse di γ, poiché questo non passa per un 2-centro e γ deve fissare l'insieme dei 2-centri, è necessario che la cella unitaria sia rettangolare e che r sia parallela a uno dei lati della cella unitaria. Mostriamo che l'introduzione di una tale γ forza l'introduzione di tutte le altre glissoriflessioni possibili: siano p l'asse di AM e q l'asse di AN. Se γ è la glissoriflessione di asse p e traslazione AC, componendola con τ_{AC}^{-1} otterremmo la riflessione σ_p e questo non è accettabile. Siano quindi $\gamma = \tau_{AN}\sigma_p$ e $\delta = \tau_{AM}\sigma_q$; notiamo che $\gamma\rho_{A,\pi} = \delta$ e quindi abbiamo introdotto tutte le glissoriflessioni possibili senza forzare nessuna riflessione. Abbiamo quindi ottenuto il gruppo **p2gg=pgg** che non è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_2 e la sua cella unitaria è un qualsiasi rettangolo. Si presenta come $\langle \tau_1, \tau_2, \rho_{A,\pi}, \gamma \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle$ e contiene, oltre agli elementi di **p2**, infinite glissoriflessioni lungo due assi perpendicolari tra loro.



pgg

Resta da capire come distinguere tra loro i gruppi che hanno come ordine massimo di rotazione 2. Utilizziamo un albero decisionale:

Esistono solo isometrie pari?

sì — no

p2 Ci sono assi di riflessione?

no — sì

pgg Esistono due direzioni distinte di riflessione?

no — sì

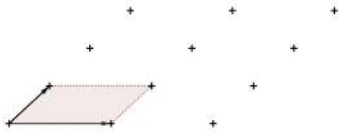
pmg Esistono 2-centri non appartenenti agli assi di riflessione

no — sì

pmm **cmm**

Non ci sono rotazioni

Il primo caso è quello in cui G contiene soltanto due traslazioni linearmente indipendenti e nessun'altra isometria: questo è il gruppo **p111=p1**, è simmorfo, il suo gruppo puntuale è C_1, la cella unitaria è un qualsiasi parallelogramma e il gruppo è generato dalle due traslazioni.



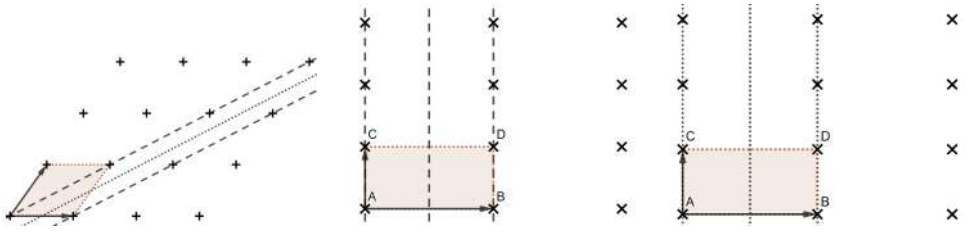
p1

Supponiamo ora che G contenga una riflessione σ_r, allora per il Lemma 1.4.1 la cella unitaria è necessariamente rombica o rettangolare. Se la cella è formata da un rombo $ABDC$, A appartiene a l e l è la diagonale di un rombo che ha A come vertice. Notiamo che non possiamo inserire le riflessioni lungo entrambe le diagonali altrimenti G conterrebbe delle rotazioni. Inoltre non possiamo neanche introdurre glissoriflessioni diverse da quella che si ottiene componendo σ_l con τ_{AD}, altrimenti troverei comunque una rotazione. Abbiamo quindi un nuovo gruppo dei mosaici: **c1m1=cm**, è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_1 e la sua cella unitaria è un rombo qualsiasi. Si presenta come $\langle \tau_{AB}, \tau_{AC}, \sigma_{AD} \rangle = \langle \tau_{AC}, \gamma \rangle = \langle \sigma_{AD}, \gamma \rangle$, dove γ è la glissoriflessione di asse parallelo a AD che porta M in L, che sono rispettivamente il

punto medio di AB e BD. Contiene infinite traslazioni, infinite riflessioni e infinite glissoriflessioni, entrambe lungo la stessa direzione.

Se invece la cella unitaria è un rettangolo $ABDC$, r è parallela a uno dei lati: in particolare o contiene un lato o passa per i punti medi di una coppia di lati opposti. Notiamo che componendo una delle due riflessioni con la traslazione perpendicolare all'asse si ottiene la seconda. Inoltre non è possibile inserire le due riflessioni di assi paralleli alle dimensioni del rettangolo perché altrimenti si ottiene una rotazione. L'unica altra possibilità sarebbe una cella quadrata in cui introduciamo le riflessioni i cui assi sono paralleli a un lato e a una diagonale ma in tal caso otterremmo una rotazione. Quindi abbiamo trovato un unico altro gruppo dei mosaici: **p1m1=pm** che è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_1 e la sua cella unitaria è un qualsiasi rettangolo. Si presenta come $\langle \tau_{AB}, \tau_{AC}, \sigma_{AC} \rangle$ e contiene, oltre alle traslazioni, infinite riflessioni lungo un'unica direzione.

Supponiamo infine di voler introdurre glissoriflessioni senza introdurre riflessioni: notiamo innanzitutto che può esserci un'unica direzione di glissoriflessione, altrimenti avremmo delle rotazioni. A meno di comporre γ con una traslazione, γ^2 è una delle traslazioni che generano T e questo esclude il caso in cui la cella unitaria sia rombica. Inoltre γ deve fissare il reticolo di traslazione, formato da rettangoli, quindi il suo asse contiene o uno dei due lati o l'asse di un lato; in entrambi i casi, componendo con la traslazione perpendicolare otteniamo l'altra glissoriflessione. Abbiamo quindi trovato l'ultimo gruppo dei mosaici **p1g1=pg**, che non è simmorfo, il suo gruppo puntuale è D_1 e la sua cella unitaria è un rettangolo. Il gruppo si presenta come $\langle \tau_{AB}, \tau_{AC}, \gamma \rangle$, dove γ è una delle glissoriflessioni di cui sopra; inoltre una delle due traslazioni è pleonastica. Nell'immagine seguente, in linea tratteggiata sono indicati gli assi di riflessione, in linea puntinata quelli di glissoriflessione.



cm **pm** **pg**

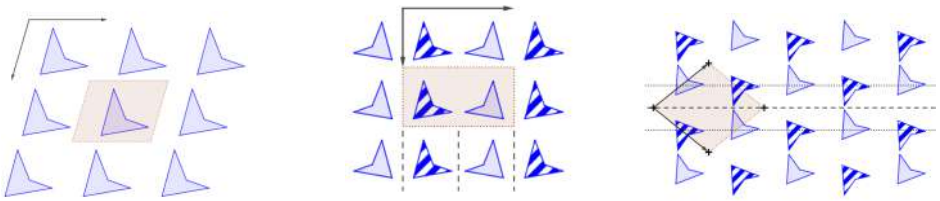
Resta da chiarire come distinguere i 4 casi: se non ci sono isometrie dispari è **p1**,

se ci sono, oltre alle traslazioni, solo glissoriflessioni è **pg**, se ci sono solo riflessioni è **pm**, se ci sono sia riflessioni che glissoriflessioni è **cm**.
Abbiamo quindi classificato e descitto tutti e 17 i gruppi di simmetria dei mosaici.
□

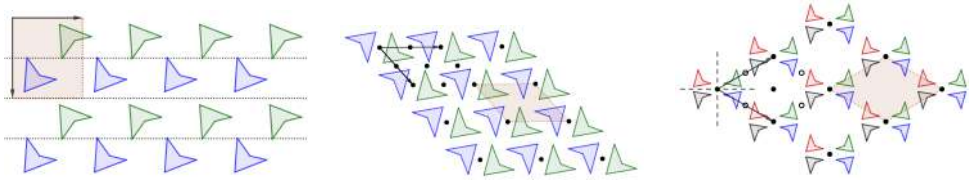
A chiusura della discussione sui mosaici presentiamo alcuni disegni, preparati con il software GeoGebra, per mostrare come agiscono i vari gruppi dei mosaici. All'interno dei disegni abbiamo utilizzato alcune convenzioni:

- le figura dello stesso colore differiscono per una traslazione e il numero di colori utilizzati rappresenta la cardinalità del gruppo puntuale P;
- gli assi di riflessione sono rappresentati da linee tratteggiate, quelli di glissoriflessione da linee puntinate;
- i 6-centri sono rappresentati da punti blu;
- i 4-centri da quadratini arancioni, vuoti se il centro non appartiene a un asse di riflessione;
- i 3-centri da triangoli rossi, con la punta rivolta verso il basso se non appartengono a assi di riflessione;
- i 2-centri da punti neri, vuoti se non appartengono agli assi di riflessione.

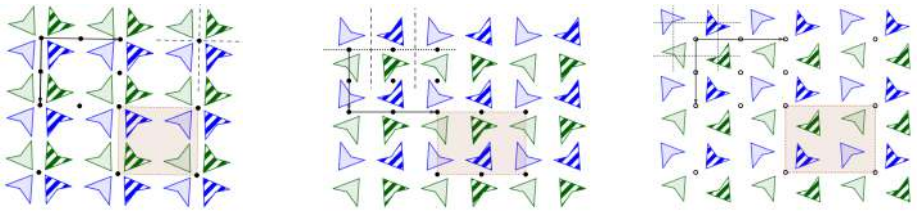
Costruiamo anche una tabella riassuntiva per riconoscere i gruppi dei mosaici che si basa sul massimo ordine di riflessione; tranne per la prima riga, se la frase in una casella è vera per il mosaico considerato, il gruppo scritto nella casella è quello cercato, altrimenti si procede alla casella sottostante.



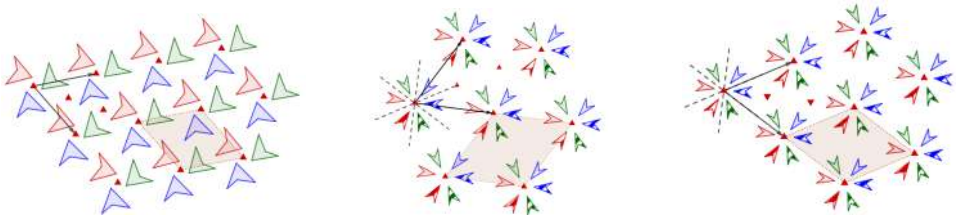
p1 **pm** **cm**



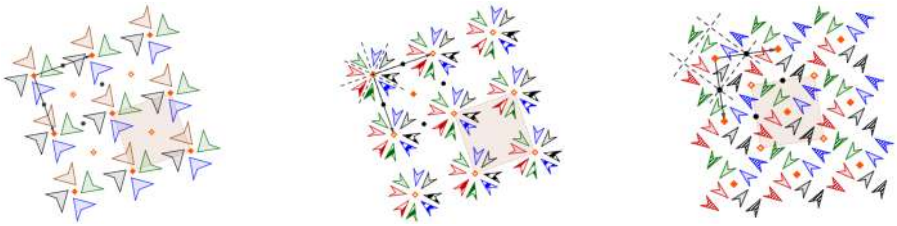
pg **p2** **cmm**



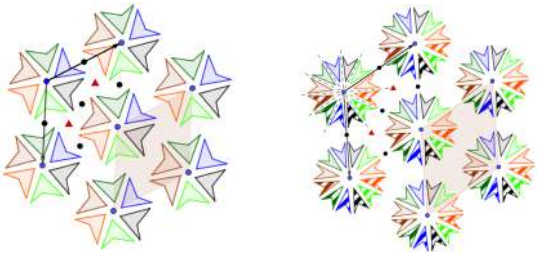
pmm **pmg** **pgg**



p3 **p3m1** **p31m**



p4 **p4m** **p4g**



p6 **p6m**

Esempi dei 17 gruppi di simmetria dei mosaici

L'ordine massimo di rotazione è

1	2	3	4	6
Non ci sono isometrie dispari **p1**	Non ci sono isometrie dispari **p2**	Non ci sono riflessioni **p3**	Non ci sono riflessioni **p4**	Non ci sono riflessioni **p6**
Alcuni assi di glissoriflessione non sono assi di riflessione **cm**	Alcuni 2-centri non appartengono ad assi di riflessione **cmm**	Tutti i 3-centri appartengono ad assi di riflessione **p3m1**	Tutti i 4-centri appartengono ad assi di riflessione **p4m**	Esiste un asse di riflessione **p6m**
Tutti gli assi di glissoriflessione sono assi di riflessione **pm**	Tutti i centri di rotazione appartengono ad assi di riflessione **pmm**	Alcuni 3-centri non appartengono ad assi di riflessione **p31m**	Alcuni 4-centri non appartengono ad assi di riflessione **p4g**	
Tutte le isometrie dispari sono glissoriflessioni **pg**	Tutti gli assi di simmetria sono paralleli **pmg**			
	Tutte le isometrie dispari sono glissoriflessioni **pgg**			

Capitolo 2

Tassellazioni del piano

In questo Capitolo trattiamo il tema delle tassellazioni del piano. Non ci prefissiamo l'obiettivo di una trattazione completa in ogni aspetto, cosa che si può trovare nel testo [GS87], ad esempio, ma, seguendo l'idea di simmetria che guida altri testi come [Ded99] e [Mar82], indagheremo principalmente quelle famiglie di tassellazioni che hanno una qualche forma di regolarità, nelle accezioni che specificheremo nella trattazione. Ad ogni modo, i tre libri sopracitati, oltre a vari articoli che citeremo nel seguito, sono i riferimenti principali per questo capitolo.

Iniziamo quindi dando la definizione più generale di tassellazione: una **tassellazione** del piano è una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi del piano $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, ...\}$, detti **tasselli** o **facce**, (**tiles** in inglese), tali che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i = \mathbb{R}^2$ e gli interni dei T_i siano a due a due disgiunti.

Notiamo che questa definizione è veramente troppo generica, si chiede solo di coprire il piano con dei tasselli che "non si accavallano" e senza lasciare "buchi".

La restrizione più naturale da fare è chiedere che ogni tassello sia topologicamente un disco chiuso. Con questo intendiamo che ogni tassello sia omeomorfo a un disco chiuso, che in parole povere significa che è possibile deformarlo con continuità, cioè senza strapparlo, in un disco di cui comprendiamo anche il bordo. In questo modo ogni tassello è limitato, connesso e semplicemente connesso. Di seguito elenchiamo alcuni esempi di tasselli che escludiamo dalla nostra trattazione:

(a) tasselli formati da più pezzi disconnessi;

(b) tasselli che contengono dei buchi;

(c) tasselli illimitati, cioè che non sono contenuti in nessun cerchio di raggio finito;

(d) tasselli che si disconnettono togliendo un punto;

(e) tasselli fatti, almeno in parte, di segmenti, archi di curve o altre figure di area nulla.

(a) (b) (c) (d) (e)

Sfruttando la definizione di tassellazione, notiamo che l'intersezione di due tasselli ha necessariamente misura nulla e quindi può essere vuota, un punto (che chiameremo *vertice* della tassellazione) o un arco di curva (che chiameremo *spigolo*). Con l'ipotesi che i tasselli siano topologicamente dei dischi chiusi, le curve semplici chiuse che compongono il bordo dei tasselli sono divise negli spigoli dai vertici. Per quanto riguarda la nostra trattazione useremo una definizione più restrittiva, tratta da [Ded99]:

Definizione 2.0.1. *Una* ***tassellazione*** *del piano è una famiglia* $\mathcal{T} = \{P_i\}_{i\in I}$ *di poligoni, con* I *numerabile, tale che:*

(a) $\bigcup_{i\in I} P_i = \mathbb{R}^2$*;*

(b) se l'intersezione di due facce P_i *e* P_j *è non vuota, allora è un vertice o uno spigolo comune a entrambe;*

(c) se v *è un vertice di* $\mathcal{F}$ *allora* v *è il vertice di un numero finito di facce; il numero di spigoli (o di facce) che concorrono in un vertice* v *è detto la* ***valenza*** *di* v*.*

Facciamo alcune considerazioni sulla definizione appena data. La condizione che i tasselli siano poligoni non è così restrittiva come sembra. Infatti una volta costruita una tassellazione con i poligoni, è possibile modificare opportunamente gli spigoli con archi di curva, mantenendo addirittura alcune delle proprietà della tassellazione iniziale, come la simmetria ad esempio. In particolare questo è uno stratagemma

usato molto spesso dall'artista olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972).
La condizione (b) è assicura che la tassellazione sia *edge-to-edge*, cioè che non ci siano tasselli che si intersechino in un sottoinsieme di uno spigolo. Nelle ultime sezioni di questo capitolo considereremo anche svariati esempi di tassellazioni che non soddisfano questa proprietà.
Mentre queste due condizioni servono principalmente a ridurre il campo vastissimo delle tassellazioni e introdurre sin dal principio una qualche regolarità, la condizione (c) è essenziale per prevenire l'insorgere di situazioni patologiche, rischio intrinseco quando si ha a che fare con il concetto di infinito come in questo caso. Inoltre tale condizione assicura che l'insieme dei vertici sia un sottoinsieme discreto del piano, cioè tale che preso un qualsiasi vertice della tassellazione esista un suo intorno che non contiene nessun altro vertice. Per dimostrare questa affermazione, consideriamo un vertice v, siano $f_1, .., f_n$ le facce adiacenti ad esso e sia $\{w_i\}_{i=1,...,m}$ l'insieme dei loro vertici diversi da v. Da (c), tale insieme è ovviamente finito, quindi basta considerare $r < \min_{i=1,...,m} d(v, w_i)$ che è necessariamente positivo e di conseguenza il disco aperto $B_r(v)$ di centro v e raggio r contiene solo v tra i vertici della tassellazione.

Diamo ora alcune definizioni riguardanti le tassellazioni:

Definizione 2.0.2. *Una* ***bandiera*** *di una tassellazione $\mathcal{T}$ è una terna ordinata (v, s, f) dove v è un vertice di $\mathcal{T}$, s è uno spigolo di $\mathcal{T}$ uscente da v e f è una faccia di $\mathcal{T}$ adiacente a s.*

Definizione 2.0.3. *Un insieme di tasselli $T = \{T_1, T_2, ...\}$ è detto* ***protoinsieme*** *di una tassellazione $\mathcal{T}$ se tale insieme contiene una copia, nel senso della congruenza, di ogni tassello della tassellazione $\mathcal{T}$. Diremo anche che il protoinsieme T* ***ammette*** *la tassellazione $\mathcal{T}$ e chiameremo gli elementi di T* ***prototasselli****.*

Definizione 2.0.4. *Sia $\mathcal{T}$ una tassellazione e v un suo vertice. La* ***figura al vertice*** *di $\mathcal{T}$ in v è il poligono i cui vertici sono ordinatamente i punti medi degli spigoli uscenti da v.*

Definizione 2.0.5. *Sia $\mathcal{T}$ una tassellazione. Costruiamo una* ***tassellazione duale*** *$\mathcal{T}^*$ di $\mathcal{T}$ nel seguente modo:*

- *$\mathcal{T}^*$ ha uno e un solo vertice nell'interno di ogni faccia di $\mathcal{T}$;*
- *due vertici di $\mathcal{T}^*$ sono collegati da uno spigolo s^* se e solo se le corrispondenti facce in $\mathcal{T}$ sono adiacenti lungo uno spigolo s.*
- *i vertici di $\mathcal{T}^*$ devono essere scelti di modo che l'unico spigolo di $\mathcal{T}$ che interseca s^* sia s;*
- *ogni faccia di $\mathcal{T}^*$ corrisponde a un vertice v di $\mathcal{T}$ e ha come vertici i vertici di $\mathcal{T}^*$ corrispondenti alle facce di $\mathcal{T}$ uscenti da v.*

Chiaramente, la definizione appena data non definisce in maniera univoca la tassellazione duale, visto che c'è libertà di scelta sui vertici di tale tassellazione, ma la struttura combinatoria della tassellazione è univocamente definita. In alcuni casi ci saranno delle scelte privilegiate, ad esempio i centri delle facce quando queste sono tutti poligoni regolari.

Definizione 2.0.6. *Il **gruppo di simmetria di una tassellazione** $\mathcal{T}$ è il gruppo* $\Gamma(\mathcal{T}) = \{\varphi \in Iso(\mathbb{R}^2) \mid \varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}\}$.

Con questa definizione intendiamo che l'immagine di ogni faccia, spigolo e vertice della tassellazione è ancora una faccia, uno spigolo o un vertice della stessa.

Proposizione 2.0.1. *Sia $\mathcal{T}$ una tassellazione, allora $\Gamma(\mathcal{T})$ è un gruppo discreto.*

Dimostrazione. Sia P un punto e $\varphi \in \Gamma(\mathcal{T})$. Se P è interno a una faccia f della tassellazione, è possibile scegliere un intorno U di P interamente contenuto in f. Se $\varphi(P) \in U$, $\varphi(f) = f$ poiché $\varphi \in \Gamma(\mathcal{T})$, ma sappiamo dal Teorema 0.2.1 che le isometrie che fissano un poligono sono un numero finito; quindi possiamo supporre, eventualmente restringendo U, che U non contenga le immagini di P tramite queste isometrie. Otteniamo quindi un intorno di P con la proprietà che per ogni $\varphi \in \Gamma(\mathcal{T})$, $\varphi(P) = P$ o $\varphi(P) \notin U$.
Se P appartiene all'interno di uno spigolo s, siano f_i e f_j le due facce adiacenti allo spigolo. Supponiamo che U sia contenuto in $f_i \cup f_j$ e che, se P non è il punto medio di s, U non contenga P', il simmetrico di P rispetto al punto medio. Se $\varphi(P) \in U$, allora $\varphi(s) = s$ e quindi $\varphi(P)$ è o P o P'. Per l'assunzione fatta $\varphi(P) = P$.

Se P è un vertice dalla tasselazione, basta considerare un intorno U che non contenga altri vertici e abbiamo già visto che ciò è possibile. Ora $\varphi(P)$ è un vertice della tassellazione, quindi o è P stesso o non appariene a U. □

Chiudiamo la sezione con un paio di definizioni:

Definizione 2.0.7. *Sia G un sottogruppo discreto di $Iso(\mathbb{R}^2)$. Un **dominio fondamentale** D per l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme chiuso del piano tale che:*

(a) per ogni $P \in \mathbb{R}^2$, esiste $\varphi \in G$ tale che $\varphi(P) \in D$

(b) per ogni $P, Q \in D$, non esiste $\varphi \in G$ tale che $\varphi(P) = Q$.

Definizione 2.0.8. *Diremo che una tassellazione è **periodica** se il suo gruppo di simmetria contiene due traslazioni lungo vettori linearmente indipendenti.*
*Chiameremo **regione fondamentale** l'unione del numero minimo di tasselli che tassella il piano per traslazione e che è topologicamente un disco chiuso. La regione fondamentale non è unica.*

Il Teorema di Estensione

Prima di cominciare ad analizzare le varie famiglie di tassellazioni che presenteremo in questa tesi, ci chiediamo come sia possibile mostrare che un insieme di poligoni formi effettivamente una tassellazione del piano. Nel corso del testo, quando sarà possibile, utilizzeremo ragionamenti sintetici e a volte intuitivi, alla base dei quali c'è in ogni caso il seguente Teorema.

Teorema 2.0.1 (Teorema di Estensione)**.** *Sia T un insieme finito di tasselli. Se i tasselli di T ricoprono un disco D arbitrariamente grande, allora T ammette una tassellazione del piano, nel senso della Definizione 2.0.3.*

Dimostrazione. Prima di iniziare abbiamo bisogno di definire la distanza tra due tasselli:

$$\delta(T_1, T_2) = \max\{ \sup_{x_2 \in T_2} \inf_{x_1 \in T_1} \|x_1 - x_2\|, \sup_{x_1 \in T_1} \inf_{x_2 \in T_2} \|x_1 - x_2\| \}$$

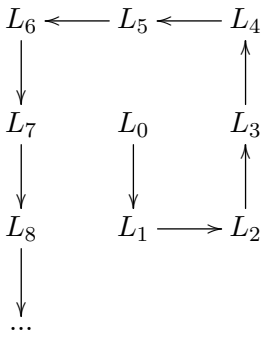
A parole, la distanza tra due tasselli è il minimo δ tale che ogni punto di T_1 è distante al più δ da un punto di T_2 e viceversa. Ancora, è la più grande tra le distanze

tra un punto di un insieme e il punto più vicino del secondo insieme. La distanza tra due tasselli è la nota *distanza di Hausdorff*.

Diremo che una successione infinita di tasselli $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un tassello limite T^* se $\delta(T_i, T^*) \to 0$. Un caso speciale del *Teorema di Selezione*[1] dice che data una successione di tasselli tutti congruenti a un tassello T_0 e tale che esiste un punto P_0 comune a tutti i tasselli, allora è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Cominciamo ora con la dimostrazione del teorema.

Poiché i tasselli sono finiti, definiamo U e u il raggio rispettivamente di una circonferenza esterna ad ogni tassello e di un circonferenza interna ad ogni tassello. Consideriamo il reticolo Λ del piano cartesiano formato dai punti del tipo (nu, mu), con $n, m \in \mathbb{Z}$. Tale reticolo ha la proprietà che ogni tassello congruente a uno dei prototasselli di T contiene almeno un punto di Λ. È possibile ordinare i punti di Λ, ad esempio ponendo $L_0 = (0, 0)$ e poi continuare la numerazione a spirale attorno a tale punto.



Per ogni $r \in \mathbb{R}^+$, sia $D(L_0, r)$ il disco chiuso di raggio r e centro L_0 e $\mathcal{A}(r)$ una tassellazione di $D(L_0, r)$ ammessa da T. Per r sufficientemente grande, sia $T_{r,s}$ il tassello di $\mathcal{A}(r)$ che contiene L_s. Nel caso in cui L_s appartiene alla frontiera di un tassello, possiamo scegliere un qualsiasi tassello che contiene L_s.

Poiché T ha cardinalità finita, la successione $S = \{T_{i,0}\}$ ammette una sottosuccessione S_0' composta di tasselli congruenti a un dato tassello T_0. Inoltre, poiché ogni tassello contiene L_0 esiste una sottosuccessione convergente S_0 di S_0' il cui limite T_0' contiene L_0. Consideriamo ora la successione dei tasselli $T_{r,1}$ che contengono L_1,

[1] **Teorema di Selezione:** Se una famiglia infinita $\mathcal{F}$ di insiemi chiusi non vuoti è tutta contenuta in un insieme limitato, allora è possibile estrarre da $\mathcal{F}$ una successione di insiemi che convergono a un insieme limite.

restringendoci a valori di r che corrispondono a tasselli in S_0. Di nuovo, possiamo estrarre una sottosuccessione S_1 convergente a T_1', che contiene L_1 ed è congruente a T_1. Procedendo in questo modo otteniamo l'insieme di tasselli $T' = \{T_0', T_1', T_2', ...\}$. Vogliamo mostrare che tale insieme forma una tassellazione ammessa da T. Consideriamo P un punto del piano, dobbiamo mostrare che esso appartiene a un tassello T_i' e che non appartiene all'interno di due distinti tasselli di T'. Consideriamo $D(P,U)$ e sia L_m il punto di Λ appartenente in $D(P,U)$ con il pedice maggiore. Consideriamo $\mathcal{A}(r)$, con r che varia con valori corrispondenti alla sottosequenza S_m. L'insieme di tasselli $T^m(r) = \{T_{r,0}, T_{r,1}, ..., T_{r,m}\}$ converge, per r che tende a infinito lungo i valori appena descritti, a $T^m = \{T_1', ..., T_m'\}$. Poiché i tasselli in ogni $T^m(r)$ hanno interni disgiunti e la loro unione contiene P, perché sono parte delle toppe $\mathcal{A}(r)$, al variare di r, lo stesso vale per i tasselli nel loro limite T^m. Perciò P appartiene ad almeno un tassello di T^m e non appartiene all'interno di due di essi. Da qui deduciamo che T' è una tassellazione, come volevasi dimostrare. □

2.1 Tassellazioni regolari

In questa e nelle prossime sezioni cercheremo di classificare le tassellazioni del piano con determinate proprietà, la classificazione da intendersi a meno di similitudini.

Definizione 2.1.1. *Una tassellazione si dice* ***regolare*** *se:*

(a) tutte le facce sono poligoni regolari;

(b) tutte le facce sono fra loro congruenti.

Proposizione 2.1.1 (Proprietà delle tasselazioni regolari)**.** *Se $\mathcal{T}$ è una tassellazione regolare, allora:*

(c) tutte le figure al vertice sono poligoni regolari;

(d) tutte le figure al vertice sono congruenti tra loro;

(e) ogni vertice ha la stessa valenza.

Dimostrazione. (c) Consideriamo un vertice v. Costruiamo i triangoli che hanno un vertice in v e gli altri due nei punti medi degli spigoli uscenti da v che

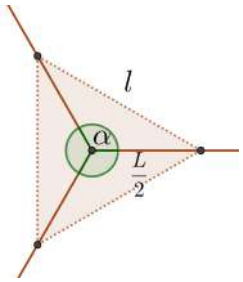
appartengono a una stessa faccia f. Per (a), tali triangoli sono isosceli: i lati uscenti da v sono congruenti a metà del lato di un poligono regolare. In particolare l'angolo al vertice è l'angolo del poligono regolare. Da (b), tali triangoli sono tutti congruenti, in quanto hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso. Se uniamo tutti i triangoli che hanno come vertice v otteniamo un poligono i cui lati sono tutti uguali e i cui angoli sono il doppio degli angoli alla base dei triangoli, quindi tutti uguali tra loro. In altre parole, le figure al vertice sono poligoni regolari.

(e) Consideriamo due vertici v e w, di valenza rispettivamente n e m e supponiamo che i tasselli siano p-agoni. Allora in v (risp. w) concorrono n (risp. m) poligoni regolari. Allora:

$$n\frac{(p-2)\pi}{p} = 2\pi = m\frac{(p-2)\pi}{p} \Longrightarrow \frac{2}{n} = \frac{(p-2)}{p} = \frac{2}{m} \Longrightarrow m = n$$

(d) Sappiamo già da (c) che le figure al vertice sono poligoni regolari, quindi per dimostrare che sono tutte uguali fra loro è sufficiente mostrare che hanno lo stesso numero di lati e che i lati hanno la stessa misura.
Da (e), poiché abbiamo un vertice per ogni spigolo uscente da v e ogni vertice ha la stessa valenza n, ogni figura al vertice è un n-agono regolare.
Inoltre, il lato di tale poligono è univocamente determinato dal teorema di Carnot: $l^2 = 2\frac{L^2}{4} - 2\frac{L^2}{4}\cos(\alpha)$, dove l è il lato della figura al vertice, L è il lato del poligono regolare che compone la tassellazione e α è l'angolo interno di tale poligono. Perciò ogni figura al vertice è un n-agono regolare di lato l.

□



Proposizione 2.1.2. *La coppia di condizioni* $(a)+(c)$ *è equivalente alla regolarità.*

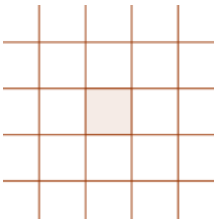
Dimostrazione. Notiamo che è sufficiente mostrare che $(a) + (c) \Rightarrow (b)$, visto che abbiamo già mostrato che $(a) + (b) \Rightarrow (c)$. Per assurdo supponiamo, di avere una tassellazione formata da poligoni regolari che però non sono tutti uguali tra loro; vogliamo quindi mostrare che le figure al vertice non sono poligoni regolari. Ovviamente i vari poligoni regolari che compongono la tassellazione devono avere i lati congruenti, ma i loro angoli interni sono diversi. Consideriamo un vertice v in cui concorrono poligoni diversi e utilizzando il teorema di Carnot calcoliamo la lunghezza degli spigoli della figura al vertice. Poiché gli angoli sono diversi, anche le lunghezze dei lati della figura al vertice saranno diverse e quindi la figura al vertice non può essere un poligono regolare. □

Ad ogni tassellazione regolare possiamo associare una coppia di interi (p, q), maggiori o uguali a 3, dove p è il numero di lati per ogni faccia e q è il numero di spigoli uscenti da ogni vertice, cioè la valenza dei vertici.

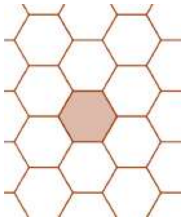
Teorema 2.1.1 (Classificazione delle tassellazioni regolari)**.** *Esistono soltanto 3 tassellazioni regolari del piano:*

- *la tassellazione in triangoli equilateri* ***(3,6)****;*
- *la tassellazione in quadrati* ***(4,4)****;*
- *la tassellazione in esagoni regolari* ***(6,3)****.*

(3,6)



(4,4)



(6,3)

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema necessita di due parti: bisogna dimostrare che le uniche tassellazioni regolari realizzabili sono le tre sopracitate e che effettivamente queste siano tassellazioni. In questo caso la seconda parte risulta abbastanza semplice, ma in generale non basta un disegno per dimostrare l'esistenza di una tassellazione, perché potrebbe non estendersi a tutto il piano.
Iniziamo con il dimostrare la prima affermazione: sia $\mathcal{T}$ una tasselazione regolare

(p, q). Ricordiamo che l'angolo di un p-agono regolare è $\frac{(p-2)\pi}{p}$ e in ogni vertice concorrono q facce, deve valere

$$q\frac{(p-2)\pi}{p} = 2\pi \implies \frac{p-2}{2p} = \frac{1}{q} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

Ricordando che $p, q \geq 3$, le uniche possibilità sono **(3,6)**, **(6,3)** e **(4,4)**. Infatti:

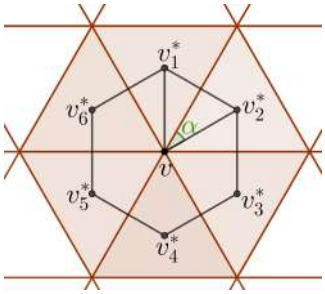
- per $p = 3$ si trova la tassellazione **(3,6)**; simmetricamente (p e q sono intercambiabili) per $p = 6$ si trova **(6,3)**; per $p = 4$ si trova **(4,4)**,
- se $p = 5$,
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$
e $q = \frac{10}{3}$ non è un intero.
- se $p \geq 7$,
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$
quindi $q \leq \frac{5}{14} < 3$ e non è una soluzione accettabile poiché $p, q \geq 3$.

Dobbiamo ora mostrare che le tre tassellazioni individuate sono effettivamente delle tassellazioni: la tassellazione **(4,4)** è realizzabile considerando un sistema di riferimento cartesiano e tracciando le rette $x = k$ e $y = k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. In questo modo ovviamente ogni poligono individuato è un quadrato.
Per costruire la tassellazione **(3,6)** si consideri un triangolo equilatero di altezza unitaria e le tre rette che contengono i lati; tracciando le rette parallele a queste e a distanza unitaria si ottiene la tassellazione.
La tassellazione **(6,3)** si ottiene dalla precedente raggruppando opportunamente i triangoli: si consideri un qualsiasi vertice v e uniamo i 6 triangoli che lo circondano, formando quindi un esagono regolare. A questo punto si considerino i vertici liberi, cioè che non appartengono ancora a nessun esagono, di distanza minima da v e si ripeta il procedimento. In particolare, in questo modo l'esagono iniziale viene circondato da altri 6 esagoni ad esso congruenti. Procedendo allo stesso modo con i centri dei nuovi esagoni, che sono già in parte circondati da tasselli esagonali, si ottiene la tassellazione **(6,3)**. □

Proposizione 2.1.3. *La tassellazione duale di una tassellazione regolare è ancora regolare. In particolare, se $\mathcal{T} = (p, q)$ allora $\mathcal{T}^* = (q, p)$.*

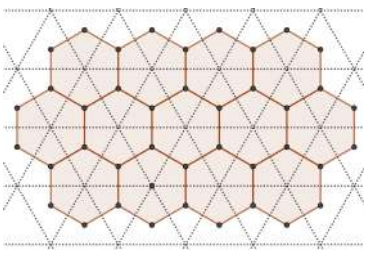
Dimostrazione. Ogni vertice di $\mathcal{T}^*$ è in corrispondenza con una faccia f di $\mathcal{T}$ e ha una valenza pari al numero di lati di f. Viceversa, ogni faccia di $\mathcal{T}^*$ è in corrispondenza con un vertice v di $\mathcal{T}$ e ha un numero di vertici pari alla valenza di v. Ci basta quindi dimostrare che tutte le facce di $\mathcal{T}^*$ sono q-agoni regolari congruenti tra loro.

Con riferimento alla figura seguente, consideriamo un vertice v di $\mathcal{T}$ e i vertici v_i^*, $i = 1, ..., q$, della faccia di $\mathcal{T}^*$ relativa a v. Ricordiamo che il centro di un poligono regolare è equidistante da ogni vertice ed è il punto di intersezione delle bisettrici interne. Consideriamo quindi i triangoli che hanno come vertici v, v_i^* e v_{i+1}^* (i pedici da intendersi modulo q): tali triangoli sono tutti isosceli perché i segmenti vv_i^* sono le distanze di v dai centri dei p-agoni congruenti che lo circondano. Inoltre, tali triangoli sono tutti congruenti tra loro perché, oltre ai lati obliqui tutti congruenti tra loro, l'angolo in v è congruente a (due volte la metà del)l'angolo dei p-agoni, poiché i segmenti vv_i^* appartengono alle bisettrici interne. Unendo questi triangoli si ottiene quindi un q-agono equilatero ed equiangolo, in quanto gli angoli del q-agono sono il doppio degli angoli alla base dei triangoli che abbiamo considerato sopra.

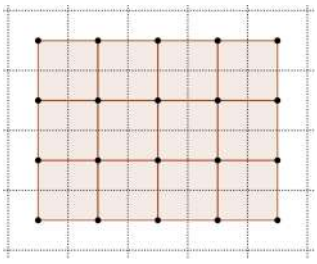


□

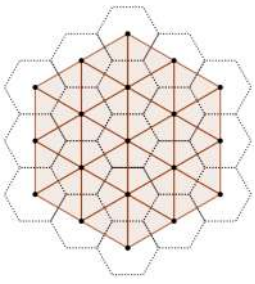
Nelle figure sottostanti le linee tratteggiate sono la tassellazione di partenza, mentre il disegno colorato è la tassellazione duale.



(3,6)*=(6,3)



(4,4)*=(4,4)



(6,3)*=(3,6)

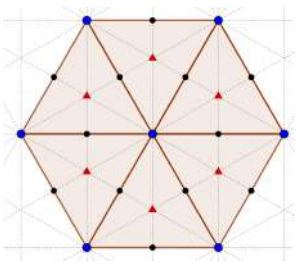
Sul gruppo di simmetria della tassellazioni regolari

Per la Proposizione 2.0.1, il gruppo di simmetria delle tassellazioni regolari è un gruppo discreto, inoltre tali tassellazioni sono periodiche in quanto basta considerare due vettori linearmente indipendenti che sovrappongono una faccia ad altre due ad essa adiacenti, quindi $\Gamma(\mathcal{T})$ è un gruppo dei mosaici e possiamo determinarlo utilizzando la tabella mostrata alla fine del Capitolo 1.

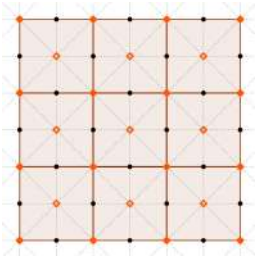
Consideriamo la tassellazione **(3,6)**: i vertice sono 6-centri, indicati in blu in figura, e tutte le rette che contengono uno spigolo sono assi di riflessione, indicati da linee tratteggiate; quindi Γ**(3,6)=p6m**. Descriviamo completamente il gruppo di simmetria: ogni vertice è un 6-centro, i 3-centri, indicati da triangoli rossi, coincidono con i centri delle facce e i 2-centri, indicati da punti neri, sono i punti medi degli spigoli; sono assi di riflessione tutti i lati e tutte le rette che contengono l'altezza di un triangolo, per un totale di sei direzioni distinte.

Per quanto riguarda la tassellazione **(4,4)**, i 4-centri sono i vertici e i centri dei quadrati, mentre gli assi di simmetria contengono un lato, una diagonale o l'asse di un lato di uno qualsiasi dei quadrati che compongono la tassellazione. Notiamo che abbiamo trovato 4 direzioni di riflessione e quindi Γ**(4,4)=p4m**. Ogni punto medio di un lato è un 2-centro.

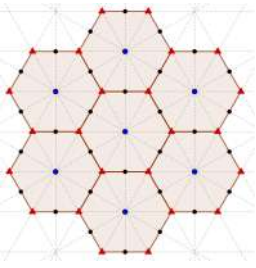
Infine, considerando la tassellazione **(6,3)**, i centri degli esagoni sono tutti e soli i 6-centri, mentre tutti i lati, tutte le diagonali maggiori e ogni asse di un lato sono assi di simmetria; quindi Γ**(6,3)=p6m**. Per descrivere completamente il gruppo di simmetria basta notare che ogni vertice è un 3-centro e tutti i punti medi dei lati sono 2-centri.



Γ(**3,6**)=p6m



Γ(**4,4**)=p4m



Γ(**6,3**)=p6m

Notiamo che i gruppi di simmetria delle tassellazioni regolari sono transitivi sui vertici, sugli spigoli, sulle facce e sulle bandiere. In particolare:

Proposizione 2.1.4. *La condizione che il gruppo di simmetria di una tassellazione sia transitivo sulle bandiere è equivalente alla regolarità.*

Dimostrazione. Mostriamo solo che la transitività sulle bandiere implica che i tasselli sono poligoni regolari tutti uguali fra loro, visto che abbiamo appena notato il viceversa. Poiché la transitività sulle bandiere implica la transitività su facce, spigoli e vertici (ma non è vero il viceversa), dalla transitività su facce e spigoli si deduce che le facce sono tutte uguali tra loro e sono equilatere. Consideriamo ora una faccia f, uno spigolo s di f e i suoi due estremi v e v'. Per la transitività sulle bandiere, esiste $\varphi \in \Gamma(\mathcal{T})$ tale che $\varphi((f,s,v)) = (f,s,v')$. Quindi gli angoli di f in v e v' sono necessariamente congruenti e le facce sono equiangole. □

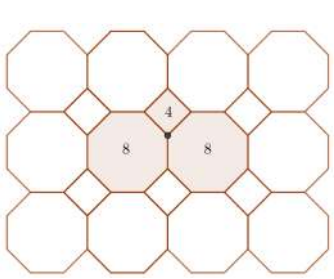
2.2 Tassellazioni uniformi

Definizione 2.2.1. *Una tassellazione si dice* ***uniforme*** *se tutti tasselli sono poligoni regolari (non necessariamente uguali tra loro) e il gruppo di simmetria agisce transitivamente sui vertici della tassellazione.*

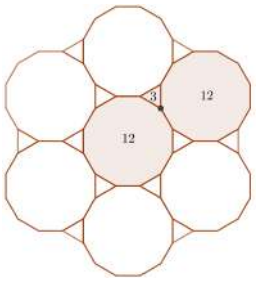
Facciamo alcuni commenti sulla definizione:

- si nota immediatamente che, con questa definizione, le tassellazioni regolari sono anche tassellazioni uniformi;
- nel caso in cui ci siano poligoni regolari diversi tra loro, la lunghezza dei loro spigoli deve essere la stessa;
- dalla transitività del gruppo di simmetria sui vertici discende immediatamente che tutti i vertici hanno la stessa valenza; ma non solo, in ogni vertice concorrono, in ordine ciclico, la stessa sequenza di poligoni regolari. Quindi ad ogni tassellazione uniforme è possibile associare una q-upla $(p_1, ..., p_q)$ di interi ≥ 3 ordinata ciclicamente, intendendo che in ogni vertice della tassellazione arrivano, in ordine ciclico, un p_1-agono, un p_2-agono,..., un p_n-agono.
  In particolare, da questo discende che le figure al vertice sono tutti poligoni uguali fra loro, ma non necessariamente regolari, come si nota facilmente dalle immagini sottostanti.

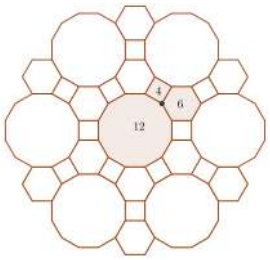
Teorema 2.2.1 (Teorema di classificazione delle tassellazioni uniformi)**.** *Sia $\mathcal{T}$ una tassellazione uniforme non regolare. Allora $\mathcal{F}$ è una delle 8 tassellazioni seguenti* [2]*:*



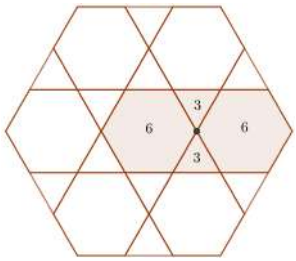
(4,8,8)



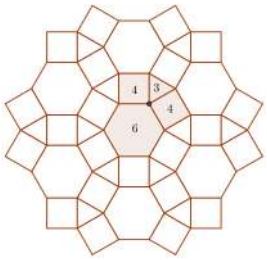
(3,12,12)



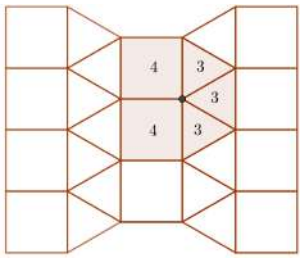
(4,6,12)



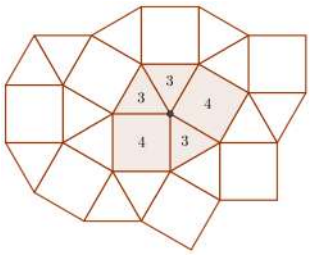
(3,6,3,6)



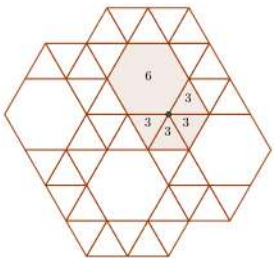
(3,4,6,4)

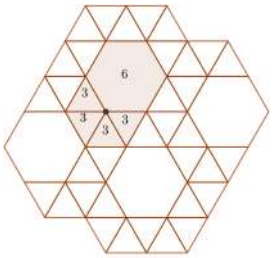


(3,3,3,4,4)



(3,3,4,3,4)





(3,3,3,3,6)

Dimostrazione. Iniziamo ad approcciare il problema come abbiamo fatto per le tassellazioni regolari, cioè indagando la struttura locale attorno ad ogni vertice. Supponiamo che la tassellazione sia del tipo $(p_1, ..., p_q)$, allora:

$$\frac{(p_1-2)\pi}{p_1} + ... + \frac{(p_q-2)\pi}{p_q} = 2\pi$$

$$(1-\frac{2}{p_1}) + ... + (1-\frac{2}{p_q}) = 2$$

$$\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_q} = \frac{q-2}{2} \tag{2.1}$$

[2]Gli ultimi due disegni rappresentano la stessa tassellazione, che si presenta in due forme *enantiomorfe* o *chirali*, cioè sono una l'immagine speculare dell'altra, ma non sono sovrapponibili.

Notiamo che necessariamente $q \leq 6$: se $q > 6$ ci sono più di 6 poligoni regolari che concorrono in un solo spigolo, quindi almeno uno di questi deve avere gli angoli interni strettamente minori di $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, ma questo è l'angolo del triangolo equilatero e non c'è nessun poligono regolare i cui angoli interni siano minori di quelli del triangolo equilatero. Con conti lunghi, tediosi ma fattibili, che ci risparmiamo in questa tesi, si ottengono 21 possibili soluzioni dell'equazione (2.1), a meno di ordinamento ciclico.

(q=6) (3,3,3,3,3,3)*

(q=5) (3,3,3,3,6) (3,3,3,4,4) (3,3,4,3,4)

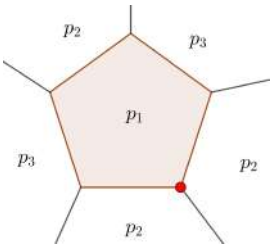
(q=4) (4,4,4,4)* (3,4,4,6) (3,4,6,4) (3,3,4,12) (3,4,3,12) (3,3,6,6) (3,6,3,6)

(q=3) (6,6,6)* (5,5,10) (4,8,8) (4,6,12) (4,5,20) (3,12,12) (3,10,15) (3,9,18) (3,8,24) (3,7,42)

Le q-uple contrassegnate dall'asterisco sono le tre tassellazioni regolari che, come da ipotesi, non consideriamo. Finora abbiamo solo indagato una questione locale, ora ci chiediamo se le 18 q-uple realizzano effettivamente una tassellazione. Consideriamo i seguenti lemmi:

Lemma 2.2.1. *Sia $\mathcal{T}$ una tessellazione uniforme con $q = 3$, i.e. $\mathcal{T} = (p_1, p_2, p_3)$, e supponiamo che p_1 sia dispari; allora $p_2 = p_3$.*

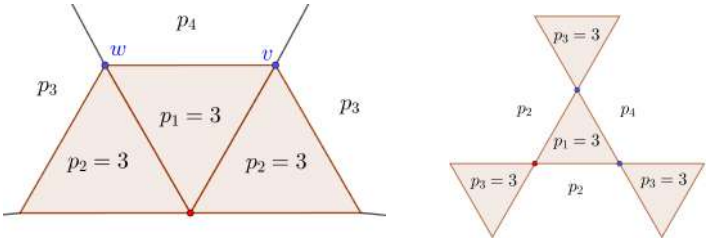
Dimostrazione. Notiamo che, essendo $q = 3$, enunciare il lemma su p_1 non è restrittivo, in quanto, dati i tre p_i, qualsiasi ordinamento è equivalente. Sia f un p_1-agono della tassellazione e percorriamo il suo bordo. Ogni spigolo di f è alternativamente adiacente a un p_2- o a un p_3-agono, ma essendo p_1 dispari troviamo un assurdo, a meno che non sia $p_2 = p_3$.



□

Lemma 2.2.2. *Sia $\mathcal{T}$ una tassellazione uniforme con $q = 4$, i.e. $\mathcal{T} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, e supponiamo che due termini siano uguali a 3, allora gli altri due sono uguali tra loro e l'unico ordinamento possibile è (3, n, 3, n).*

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdere di generalità, $p_1 = 3$. Abbiamo solo due situazioni possibili: se $p_2 = 3$ (o equivalentemente $p_4 = 3$), abbiamo due triangoli adiacenti e completiamo il vertice v con un p_3- e un p_4-agono. Se ora consideriamo il vertice w, seguendo l'ordine ciclico, siamo costretti a inserire un altro triangolo equilatero adiacente al primo nel lato non occupato dal p_4-agono. Questo ci porta a un assurdo, perché nel terzo vertice del triangolo iniziale dovremmo aver a disposizione un poligono regolare con angoli di π. Altrimenti supponiamo che $p_3 = 3$; questo significa che i triangoli si intersecano solo nei vertici e che se consideriamo una faccia triangolare, i suoi spigoli sono alternativamente adiacenti a un p_2-agono o a un p_3-agono. Come in 2.2.1, questo è assurdo, a meno che non sia $p_2 = p_4$. □



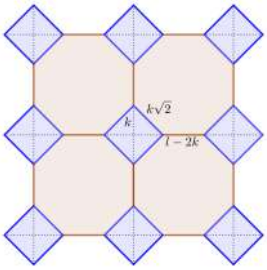
Escludendo le q-uple che non soddisfano i Lemmi, non ci resta che verificare se le restanti realizzano delle tassellazioni del piano.

(q=3) Gli unici casi da considerare sono (4,8,8), (4,6,12) e (3,12,12).

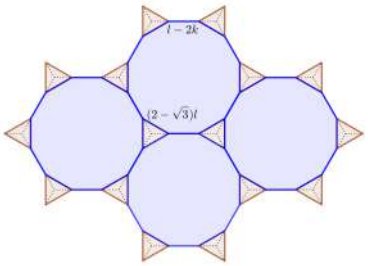
(4,8,8) Per costruire questa tassellazione consideriamo la tassellazione regolare in quadrati. Per ogni vertice v consideriamo un punto su ogni spigolo uscente da v equidistante da esso. Se la distanza scelta è minore di metà del lato l della tassellazione iniziale, otteniamo una tassellazioni in quadrati e ottagoni equiangoli non necessariamente equilateri. La distanza k, come si vede in figura, per costruire la tassellazione uniforme deve soddisfare l'equazione $k\sqrt{2} = l - 2k$ e quindi $k = l(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(3,12,12) Utilizziamo la stessa idea sulla tassellazione regolare in esagoni. In questo modo, otteniamo una tassellazione in triangoli equilateri, perché stiamo ri-

muovendo in ogni vertice tre triangoli isosceli con angolo al vertice di $\frac{2\pi}{3}$ che se uniti danno un triangolo equilatero, e dodecagoni equiangoli ma non necessariamente equilateri. La distanza k che rende i dodecagoni regolari si ottiene risolvendo l'equazione $2k^2 - 2k^2 cos(\frac{2\pi}{3}) = (l-2k)^2$, ricavata sfruttando il teorema del coseno, la cui unica soluzione accettabile è $k = (2-\sqrt{3})l$, in quanto il coefficiente è positivo e $\leq \frac{1}{2}$.

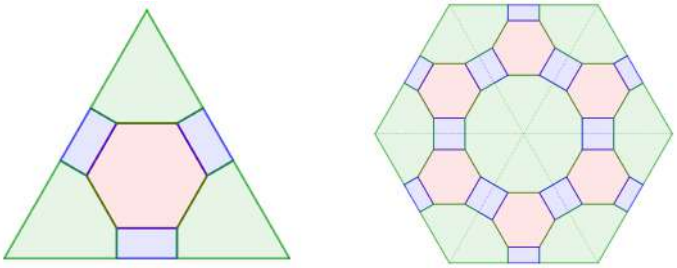


(4,8,8)



(3,12,12)

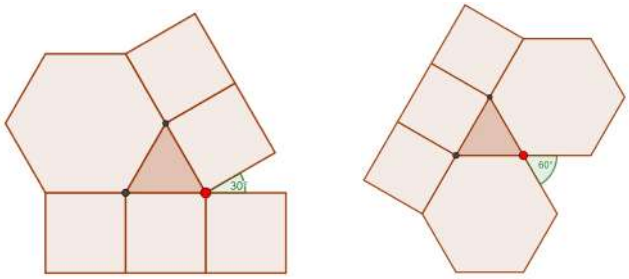
(4,6,12) Su tre lati alternati di un esagono regolare costruiamo un rettangolo alto la metà del lato dell'esagono considerato. Chiudiamo la figura a formare un triangolo prolungando i lati più esterni dei rettangoli. Tale triangolo è equilatero, perché i suoi lati sono paralleli a lati alternati dell'esagono, e quindi possiamo costruire la tassellazione regolare **(3,6)**. In particolare, se uniamo i rettangoli adiacenti, per costruzione questi formano un quadrato, mentre se uniamo le punte dei sei triangoli che concorrono in uno stesso vertice formiamo un dodecaedro regolare, perché, per come è costruita la mattonella, si forma un poligono di 12 lati congruenti i cui angoli interni hanno ampiezza $2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$, che è esattamente l'angolo interno di un dodecaedro regolare.



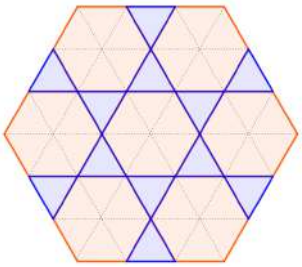
(4,6,12)

(q=4) I casi che soddisfano i due Lemmi sono (3,4,4,6), (3,6,3,6) e (3,4,6,4).

(3,4,4,6) Questa è l'unica q-upla che, nonostante soddisfi le condizioni imposte dai Lemmi precedenti, non dà luogo a una tassellazione. Consideriamo lo spigolo di un triangolo equilatero, ci sono due casi: la faccia adiacente allo spigolo è un quadrato o un esagono; questi casi sono esaustivi perché almeno uno spigolo del triangolo deve essere adiacente a un quadrato e almeno uno a un esagono. In entrambi i casi, come si vede nelle figure dove lo spigolo considerato inizialmente è quello a destra, troviamo un assurdo.



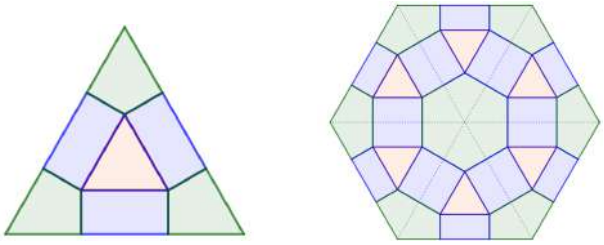
(3,6,3,6) Questa tassellazione si ottiene dalla tassellazione regolare in triangoli raggruppando opportunamente i tasselli: consideriamo un qualsiasi vertice v della tassellazione in triangoli, raggruppando i sei triangoli che contengono v otteniamo un esagono. Consideriamo come tasselli i triangoli adiacenti alle facce dell'esagono. A questo punto consideriamo i sei vertici di distanza minima dal centro dell'esagono che non sono vertici né dell'esagono né dei triangoli appena citati e raggruppiamo di nuovo i sei triangoli concorrenti a formare un esagono, ottenendo la mattonella della figura seguente. Ripetendo il processo otteniamo la tassellazione desiderata.



(3,6,3,6)

(3,4,6,4) Per questa tassellazione utilizziamo una tecnica simile a quella vista per **(4,6,12)**. In questo caso consideriamo un triangolo equilatero, su ogni lato costruiamo un rettangolo alto la metà del lato del triangolo e chiudiamo

la figura prolungando i lati esterni del rettangolo affinché formino un triangolo. Tale triangolo è equilatero perché i suoi lati sono paralleli a quelli del triangolo di partenza e quindi tassella il piano. La decorazione che si forma è la tassellazione desiderata in quanto i rettangoli si uniscono a formare dei quadrati e le punte dei triangolo si incontrano in ogni vertice a gruppi di 6 a formare un esagono equilatero, che è anche equiangolo in quanto l'angolo che si forma all'interno della mattonella ha ampiezza $2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

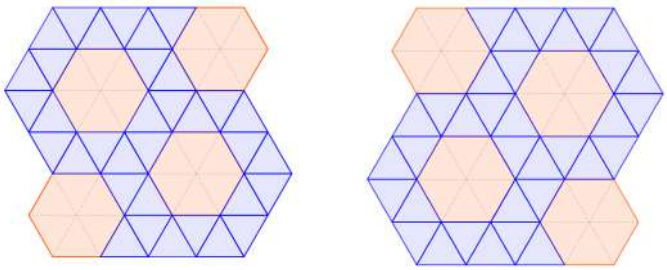


(3,4,6,4)

(q=5) I casi sono (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) e (3,3,4,3,4).

(3,3,3,3,6) Possiamo partire dalla tassellazione regolare **(3,6)** e raggruppare opportunamente i triangoli. Consideriamo un vertice e raggruppiamo i sei triangoli che lo circondano a formare un esagono. Consideriamo come tasselli tutti i triangoli che hanno o un vertice o uno spigolo in comune con l'esagono, come a formare una corona. A questo punto, consideriamo uno spigolo della corona e costruiamo un esagono che lo contenga. Ripetendo la costruzione della corona e reiterando il processo otteniamo la tassellazione richiesta.

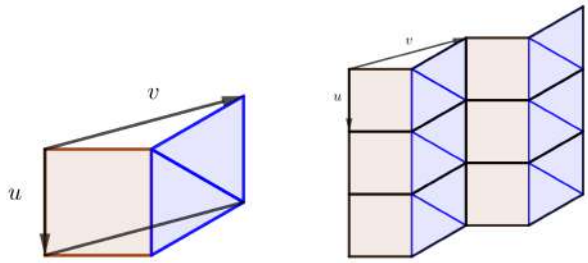
Notiamo che abbiamo più scelte su dove costruire il secondo esagono; ricordiamo che la tassellazione **(3,3,3,3,6)** si presenta in due forme enantiomorfe, quindi questa ambiguità è giustificata. In realtà, una volta scelto il centro del secondo esagono l'ambiguità scompare e la scelta sarà sempre obbligata.



(3,3,3,3,6)

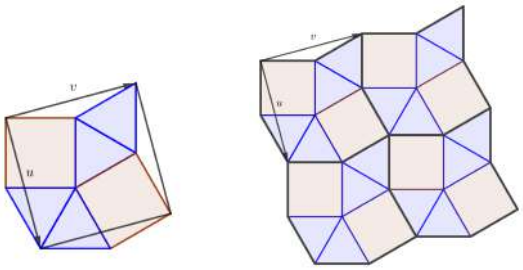
(3,3,3,4,4) In questa e nella prossima tassellazione utilizzeremo una nuova tecnica che si basa sulla costruzione di un tassello fondamentale che viene poi traslato.

Costruiamo un tassello esagonale formato da un quadrato e due triangoli equilateri come in figura. Ora possiamo giustificare l'esistenza della tassellazione in due modi distinti. Il primo si basa sulla classificazione degli esagoni che tassellano il piano che vedremo nella prossima sezione. Il secondo, più elementare e intuitivo, segue dall'osservare che il tassello si può ottenere da un parallelogramma a cui tagliamo un triangolo da un lato e lo incolliamo sul lato opposto. A questo punto è facile notare che traslando il parallelogramma lungo le sue dimensioni si tassella il piano e lo stesso avviene se si trasla il tassello lungo gli stessi vettori.



(3,3,3,4,4)

(3,3,4,3,4) Consideriamo un tassello ottagonale formato da due quadrati e quattro triangoli equilateri disposti come in figura. Notiamo subito che il tassello si può ottenere seguendo lo stesso procedimento esposto prima applicato a un quadrato e ripetuto su entrambe le coppie di lati opposti. Come prima, sapendo che un quadrato tassella il piano semplicemente traslandolo lungo i sui lati, possiamo applicare le stesse traslazioni al tassello ottagonale.

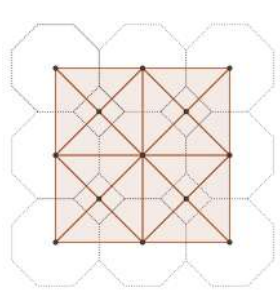


(3,3,4,3,4)

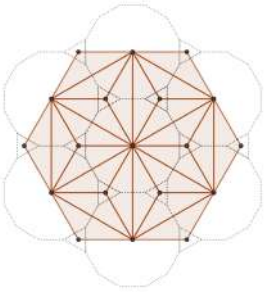
□

Sulle tassellazioni duali

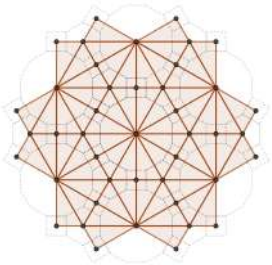
È interessante indagare anche le tassellazioni duali delle otto tassellazioni uniformi non regolari; infatti, alcune di queste sono esempi di tassellazioni monoedriche piuttosto particolari, come vedremo nella Sezione 2.3, e questi esempi, elementari da costruire, possono fungere da punto di partenza per l'analisi delle tassellazioni monoedriche più complesse. Mostriamo innanzitutto le 8 tassellazioni duali, dove le linee tratteggiate rappresentano la tassellazione originale.



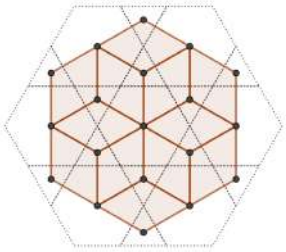
(4,8,8)*



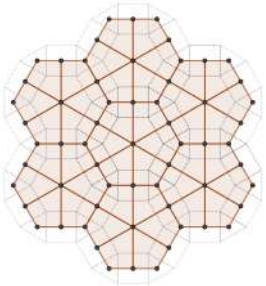
(3,12,12)*



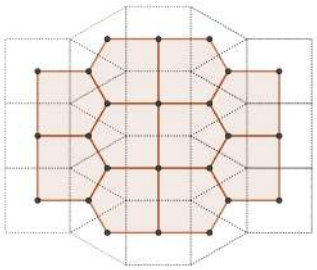
(4,6,12)*



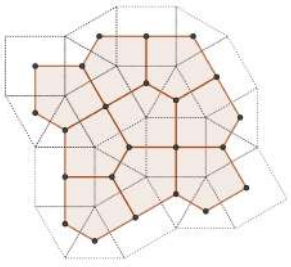
(3,6,3,6)*



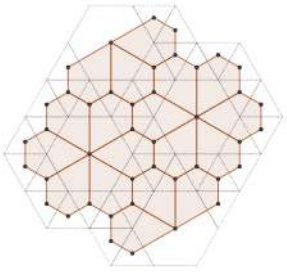
(3,4,6,4)*



(3,3,3,4,4)*



(3,3,4,3,4)*



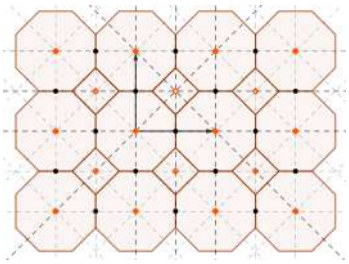
(3,3,3,6,6)*

Vediamo alcune osservazioni che si ricavano facilmente dalla definizione, supponendo di scegliere come vertici di $\mathcal{T}^*$ i centri delle facce di $\mathcal{T}$: se $\mathcal{T} = (p_1, ...p_q)$, allora $\mathcal{T}^*$ è una tassellazioni in q-agoni non regolari tutti congruenti tra loro. Poiché ogni vertice di $\mathcal{T}^*$ è interno a una faccia di $\mathcal{T}$ e gli spigoli di $\mathcal{T}^*$ intersecano esattamente

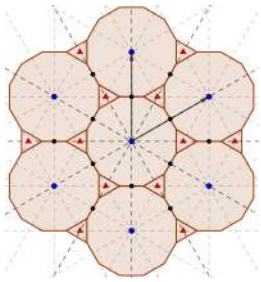
una volta il corrispondente spigolo di $\mathcal{T}$, la q-upla $(p_1, ...p_q)$ indica, ciclicamente, il numero di spigoli uscenti da ogni vertice del q-agono. In particolare avremo 3 tassellazioni in triangoli, 2 in quadrilateri e 3 in pentagoni.
Riprendendo il discorso sulla dualità tra vertici e facce, insito nella definizione 2.0.5 di tassellazione duale, il gruppo di simmetria di queste tassellazioni è transitivo sulle facce. In particolare, le tassellazioni duali delle uniformi sono esempi di tassellazioni *tile – transitive*, o *isoedrali*, a cui accenneremo successivamente.

Sui gruppi di simmetria delle tassellazioni uniformi

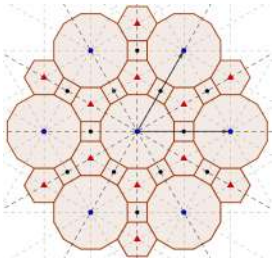
Di seguito abbiamo rappresentato i gruppi di simmetria delle tassellazioni uniformi utilizzando le stesse convenzioni usate nella Sezione 1.4; di fianco al nome della tassellazione abbiamo indicato il gruppo di simmetria.



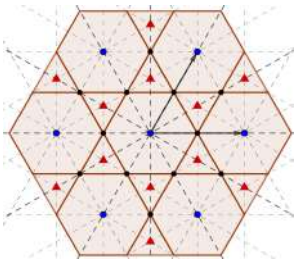
(4,8,8) p4m



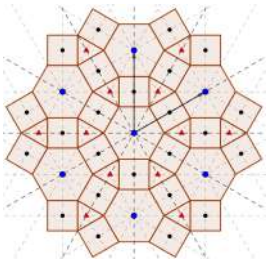
(3,12,12) p6m



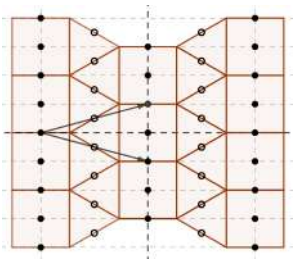
(4,6,12) p6m



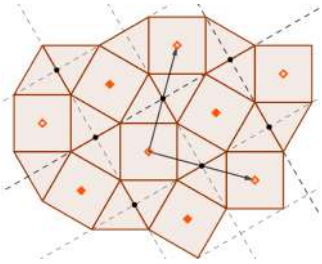
(3,6,3,6) p6m



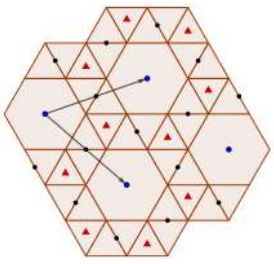
(3,4,6,4) p6m



(3,3,3,4,4) cmm



(3,3,4,3,4) p4g



(3,3,3,3,6) p6

Come per il caso delle tassellazioni regolari, è evidente che anche le tassellazioni uniformi sono periodiche e quindi il loro gruppo di simmetria è necessariamente un gruppo dei mosaici.

(4,8,8) I centri degli ottagoni e dei quadrati sono evidentemente tutti e soli i 4-centri di Γ**(4,8,8)**. Le diagonali e gli assi dei quadrati sono assi di riflessione in quattro direzioni distinte, allora Γ**(4,8,8)=p4m**.

(3,12,12) I centri dei dodecagoni sono 6-centri, mentre le loro diagonali maggiori e i loro assi sono assi di riflessione. Allora Γ**(3,12,12)=p6m**.

(4,6,12) Vale lo stesso discorso della tassellazione (3,12,12), allora Γ**(4,6,12)=p6m**.

(3,6,3,6) I centri degli esagoni sono 6-centri, mentre le diagonali maggiori e gli assi degli esagoni sono assi di riflessione, quindi Γ**(3,6,3,6)=p6m**.

(3,4,6,4) Vale lo stesso discorso che abbiamo appena fatto, quindi Γ**(3,4,6,4)=p6m**.

(3,3,3,4,4) I centri dei quadrati e i punti medi degli spigoli che sono adiacenti a poligoni dello stesso tipo sono 2-centri, mentre i lati e gli assi dei quadrati sono gli unici assi di riflessione. In particolare i 2-centri sui lati dei triangoli non appartengono a assi di simmetria, allora Γ**(3,3,3,4,4)=cmm**.

(3,3,4,3,4) I centri dei quadrati sono 4-centri e i punti medi degli spigoli adiacenti a due triangoli sono 2-centri; le rette che contengono tali spigoli sono gli unici assi di simmetria e quindi i 4-centri non appartengono agli assi di riflessione, allora Γ**(3,3,3,4,4)=p4g**.

(3,3,3,3,6) I centri degli esagoni sono 6-centri e non possiamo avere assi di riflessione perché, come abbiamo già osservato, questa tassellazione si presenta in due forme enantiomorfe. Quindi Γ**(3,3,3,3,6)=p6**.

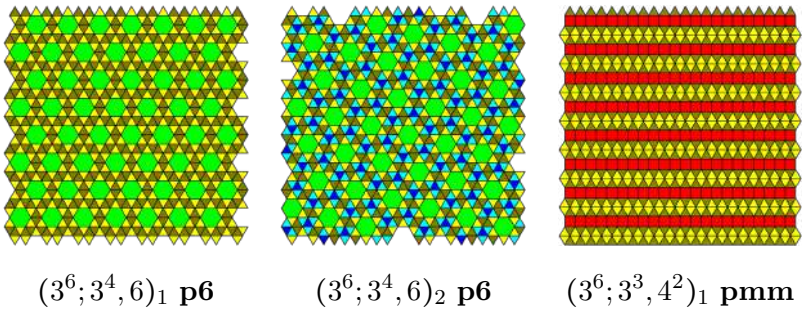
Per determinare le traslazioni minime consideriamo uno dei poligoni F con il più alto numero di lati e individuiamo F_1, il poligono congruente più vicino, in generale non unico. Il vettore congiungente i centri di F e F_1 è uno dei generatori del gruppo delle traslazioni. Cerchiamo come prima il poligono F_2, diverso da F_1 e tale che il suo centro non appartenga alla retta per i centri di F e F_1. Il vettore che congiunge i centri di F e F_2 è il secondo generatore del gruppo delle traslazioni.

Sulle tassellazioni 2-uniformi

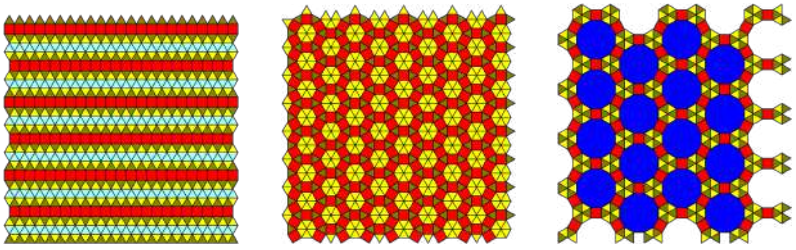
È possibile indebolire la nozione di tassellazioni uniformi richiedendo non più che il gruppo di simmetria sia transitivo sui vertici ma richiedendo che i vertici formino k classi di transitività sotto l'azione del gruppo di simmetria della tassellazione. Tali tassellazioni si dicono *k-uniformi*. Per quanto riguarda la notazione, una tassellazione k-uniforme si indica con $(a_1, b_1, c_1, ...; ...; a_k, b_k, c_k, ...)$, dove il punto e virgola divide i tipi di vertice, mentre ogni tipo di vertice è descritto come nelle tassellazioni uniformi. In particolare, ovviamente, i tipi di vertice sono esattamente gli stessi delle tassellazioni uniformi. Utilizziamo per comodità la convenzione che se all'interno di un tipo un numero si ripete n volte lo indicheremo con la potenza: ad esmpio, $(3, 3, 3, 3, 6) = (3^5, 6)$. Concentriamoci ora sul caso più "semplice", cioè $k = 2$.

Teorema 2.2.2. *Esistono 20 tipi di tassellazioni 2-uniformi.*

Nel seguito forniamo un'immagine per ogni tassellazione. A fianco della classificazione indichiamo anche il gruppo di simmetria in notazione cristallografica. Per motivi di tempo e visto che non è un argomento di cui tratteremo approfonditamente, le immagini sono tratte dalla pagina Wikipedia sulle tassellazioni k-uniformi[3].

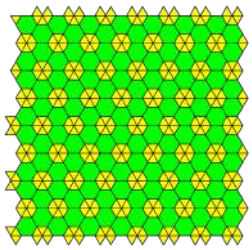


$(3^6; 3^4, 6)_1$ **p6** $(3^6; 3^4, 6)_2$ **p6** $(3^6; 3^3, 4^2)_1$ **pmm**

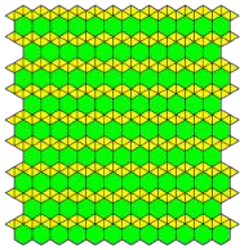


$(3^6; 3^3, 4^2)_2$ **cmm** $(3^6; 3^2, 4, 3, 4)$ **p6m** $(3^6; 3^2, 4, 12)$ **p6m**

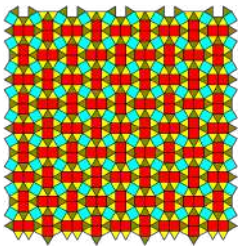
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_k-uniform_tilings



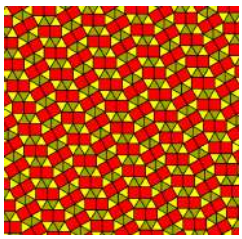
$(3^6; 3^2, 6^2)$ **p6m**



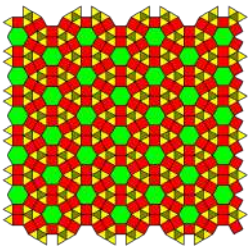
$(3^4, 6; 3^2, 6^2)$ **cmm**



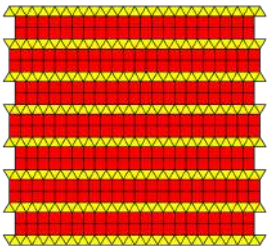
$(3^3, 4^2; 3^2, 4, 3, 4)_1$ **p4g**



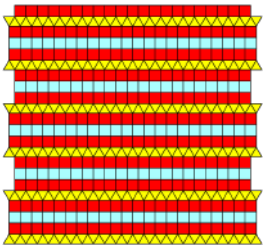
$(3^3, 4^2; 3^2, 4, 3, 4)_2$ **pgg**



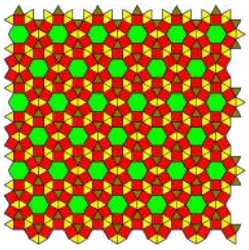
$(3^3.4^2; 3, 4, 6, 4)$ **p6m**



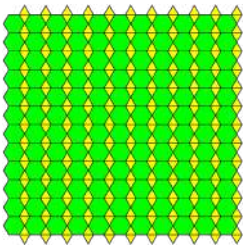
$(3^3, 4^2; 4^4)_1$ **cmm**



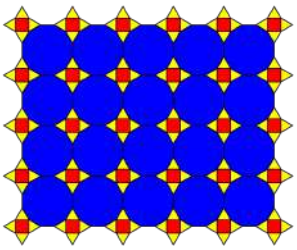
$(3^3.4^2; 4^4)_2$ **cmm**



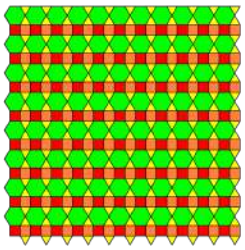
$(3^2, 4, 3, 4; 3, 4, 6, 4)$ **p6m**



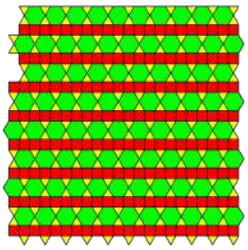
$(3^2, 6^2; 3, 6, 3, 6)$ **pmm**



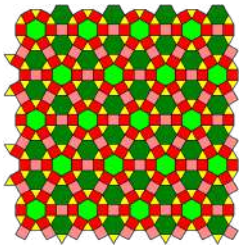
$(3, 12^2; 3, 4, 3, 12)$ **p4m**



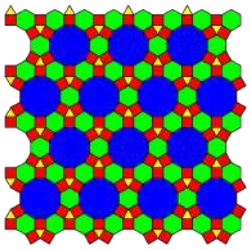
$(3, 6, 3, 6; 3, 4^2, 6)_1$ **pmm**



$(3, 6, 3, 6; 3, 4^2, 6)_2$ **cmm**



$(3, 4^2, 6; 3, 4, 6, 4)$ **p6m**



$(3, 4, 6, 4; 4, 6, 12)$ **p6m**

Notiamo che la notazione introdotta non è univoca, cioè ci sono tassellazioni diverse in cui i vertici rappresentativi sono dello stesso tipo. Non ci soffermiamo nella dimostrazione di questo teorema che ricalca quella del Teorema 2.2.1, con ovviamente

un maggior numero di dettagli e considerazioni complesse. Una dimostrazione si può trovare in [Krö69].

Altre variazioni sulla definizione di tassellazione uniforme sono, ad esempio, le tassellazioni *tile-transitive*, o *isoedrali*, in cui il gruppo di simmetria deve essere transitivo sull'insieme delle facce; oppure le tassellazioni *edge-transitive*, o *isotoxal*, in cui il gruppo di simmetria è transitivo sull'insieme degli spigoli. Ovviamente, anche in questi casi si possono considerare le tassellazioni in cui il gruppo di simmetria forma k classi di transitività sull'insieme considerato. Queste famiglie si possono poi mischiare tra loro, ad esempio chiedersi se esistono tassellazioni k-uniformi h-isoedrali o per quali k, h questo è possibile. Molti problemi di questo tipo sono tuttora aperti.

2.3 Tassellazioni monoedriche

I riferimenti principali in questa sezione sono [Bol63], [Gar75], [GS77] [Ker69], [Niv78], [Sch78b] e [Zon20].

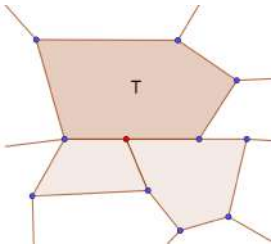
Definizione 2.3.1. *Una tassellazione di dice* ***monoedrica*** *se tutti i suoi tasselli sono congruenti a un poligono fissato P.*

Lo scopo di questa sezione è di classificare quali poligoni ammettono una tassellazione monoedrica. Abbiamo già incontrato tassellazioni di questo tipo: le tassellazioni regolari sono le uniche tassellazioni monoedriche con tasselli regolari; come abbiamo già detto, le duali delle tassellazioni uniformi sono tassellazioni monoedriche. In generale, tranne nel caso dei quadrilateri, limitiamo la nostra ricerca ai poligoni convessi; infatti, se ammettessimo poligoni concavi non avremmo nessun limite sul numero massimo di lati, in quanto data una tassellazione monoedrica in poligoni concavi, è sufficiente sostituire opportunamente uno o più lati di tale poligono con una linea a zig-zag per generare una tassellazione monoedrica i cui tasselli hanno un numero arbitrariamente grande di lati. Se accettassimo questa eventualità, evidentemente la nostra classificazione perderebbe quasi completamente di senso. Nel caso dei poligoni convessi, possiamo restringere il campo di indagine ai soli poligoni con non più di 6 lati grazie al seguente Teorema.

Teorema 2.3.1. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Non esiste una tassellazione che verifichi contemporaneamente queste quattro proprietà:*

1. *ogni faccia è un poligono convesso;*
2. *ogni faccia ha almeno 7 lati;*
3. *ogni faccia ha area $> \alpha$;*
4. *ogni faccia ha perimetro $< \beta$.*

Dimostrazione. La prima cosa da osservare è che questo teorema non si applica solo alle tassellazioni *edge-to-edge*. Per questo abbiamo bisogno di chiarire la terminologia che useremo in questa dimostrazione e fare qualche osservazione preliminare. Ci riferiremo ai tasselli sia come poligoni, come abbiamo sempre fatto, ma anche come **rete poligonale**, *network polygon* in inglese. Nel secondo senso, se dei vertici della tassellazione appartengono allo spigolo del poligono, ma non sono suoi vertici nel senso usuale, vengono comunque conteggiati come suoi vertici e il relativo angolo è di π. Quindi, può succedere che un tassello visto come rete poligonale abbia più lati e più vertici di quanti ne avrebbe visto come poligono, ma in ogni caso sempre in egual numero; per questo è sempre valida la formula $(s-2)\pi$ per la somma degli angoli interni, dove s è il numero di lati. Nella figura sottostante, il tassello T visto come poligono è un pentagono, visto come rete poligonale è un esagono degenere, in cui l'angolo nel vertice rosso è ampio π.



Iniziamo ora la dimostrazione vera e propria. Supponiamo di avere una tassellazione del piano che soddisfi tutte e 4 le proprietà. Imponiamo un sistema di coordinate cartesiane nel piano e indichiamo con $S(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c } |x| \leq r,\ |y| \leq r\}$ il quadrato chiuso centrato nell'origine di lato $2r$. Sia N un insieme di tasselli che copre $S(r)$, con r qualsiasi per ora. Con questo intendiamo che N contiene tutti i tasselli

che hanno almeno un punto in comune con $S(r)$ in modo tale che non ci siano buchi, cioè anche se un tassello non ha punti in comune con N, ma è circondato da tasselli di N, anch'esso deve essere incluso in N. Equivalentemente, possiamo chiedere che l'unione dei tasselli in N sia topologicamente un disco. Indichiamo con v il numero di vertici, con s il numero di spigoli e con f il numero di facce in N.
L'ipotesi che l'area dei tasselli sia inferiormente limitata ci garantisce che la cardinalità di N è finita. D'altra parte, il fatto che ogni tassello abbia perimetro minore di β implica che ogni tassello in N è interamente contenuto in $S(r+\beta)$; infatti, intuitivamente, il caso peggiore è quello in cui un tassello di perimetro molto vicino a β è circondato da tasselli dello stesso perimetro che hanno un solo punto sul bordo di $S(r)$. Anche supponendo che i poligoni siano tutti molto "allungati" è chiaro che non possono uscire da $S(r+\beta)$ e nemmeno toccarne il bordo.
Sia ora N_1 l'insieme di tasselli che ricopre $S(r+\beta)$ e siano v_1, s_1 e f_1, rispettivamente, il numero di vertici, di spigoli e di facce di N_1. Per la relazione Eulero abbiamo, sia per N che per N_1,

$$v - s + f = 1 \qquad\qquad v_1 - s_1 + f_1 = 1 \tag{2.2}$$

Consideriamo i tasselli di N come rete poligonale e consideriamo gli angoli interni di ogni tassello: poiché abbiamo f facce e ognuna ha più di 7 lati, la somma degli angoli interni in N è almeno $f \cdot (7-2)\pi = 5f\pi$. D'altra parte, ci sono v vertici e in ognuno la somma degli angoli è al più 2π; in particolare, la somma è esattamente 2π nei vertici interni ed è minore nei vertici sul bordo. Abbiamo quindi la stima:

$$v \cdot 2\pi \geq 5f\pi \qquad\qquad 2v \geq 5f \tag{2.3}$$

Consideriamo ora i tasselli di N_1, sempre come rete poligonale. Notiamo che $2s_1 > v_1$: infatti, ogni vertice è adiacente ad almeno 2 spigoli e quindi contando 2 volte tutti gli spigoli sicuramente contiamo tutti i vertici almeno una volta; in particolare ogni vertice interno è legato ad almeno 3 spigoli, quindi $2s$ conta almeno 3 volte i vertici interni. Sfruttando questa osservazione possiamo raffinare la nostra stima: tutti i vertici di N sono vertici interni di N_1, quindi vengono contati almeno tre volte, mentre i restanti $v_1 - v$ almeno 2; in formule, abbiamo

$$2s_1 \geq 3v + 2(v_1 - v) = 2v_1 + v \tag{2.4}$$

Sfruttando (2.2), $2v_1 + 2f_1 = 2s_1 + 2 > 2s_1$ e quindi (2.4) implica

$$2v_1 + 2f_1 > 2s_1 \geq 2v_1 + v \qquad 2f_1 > v \tag{2.5}$$

che, ricordando (2.3) e moltiplicando per 2, ci dà

$$4f_1 > 2v > 5f \tag{2.6}$$

Sia $f_2 = f_1 - f$ il numero di facce di N_1 che non appartengono a N; si ha

$$4f_1 = 4f_2 + 4f > 5f \quad \Longrightarrow \quad 4f_2 > f \tag{2.7}$$

Apriamo ora una piccola parentesi geometrica: consideriamo un poligono di perimetro minore di β, allora non ha punti comuni con la circonferenza di raggio $\frac{\beta}{2}$ e centro in uno dei suoi vertici. Intuitivamente, possiamo pensare di allungare il poligono mentendo fisso il perimetro e uno dei suoi vertici che fa da centro della circonferenza. Siccome dobbiamo tornare al punto iniziale e dobbiamo tenere conto che abbiamo almeno 3 lati, possiamo allontanarci sicuramente meno di $\frac{\beta}{2}$. In particolare questa affermazione ci assicura che tali poligoni abbiano area minore di $\frac{\beta^2\pi}{4} < \beta^2$. Con questa osservazione possiamo dire che l'area totale di N è minore di $\beta^2 f$, ma N copre completamente $S(r)$ che ha area $4r^2$, quindi

$$\beta^2 f > 4r^2 \tag{2.8}$$

Consideriamo ora gli f_2 poligoni che appartengono a N_1 ma non a N. Ognuno di questi ha area maggiore di α e, per quanto detto sopra, sono tutti contenuti in $S(r+2\beta)$. Inoltre, per come sono definiti, sono sicuramente al di fuori della regione $S(r)$. In altre parole, tali tasselli sono contenuti nella regione $S(r+\beta) \setminus S(r)$ che ha area $4(r+2\beta)^2 - 4r^2 = 16\beta(r+\beta)$. Abbiamo quindi la stima

$$16(r+\beta) > \alpha f_2 \tag{2.9}$$

Dimostriamo che, per r sufficientemente grande, le equazioni (2.7),(2.8) e (2.9) sono in contraddizione. Moltiplicando (2.9) per $4\beta^2$ e sfruttando le altre si ha

$$64\beta^3(r+\beta) > 4\beta^2\alpha f_2 \overset{(2.7)}{>} \beta^2\alpha f \overset{(2.8)}{>} 4\alpha + r^2 \quad \Longrightarrow \quad r < 16\frac{\beta^3}{\alpha}(1+\frac{\beta}{r}) \tag{2.10}$$

Risolvendo la disequazione in r, ci accorgiamo che non è sempre vera; in particolare, questa fallisce per ogni $r \geq \frac{4(2\beta^3+\beta^2\sqrt{4\beta^2-\alpha})}{\alpha} = \bar{r}$. Questo fornisce l'assurdo e possiamo concludere che le 4 condizioni del teorema sono incompatibili. □

Grazie all'ultima parte della dimostrazione possiamo enunciare i seguenti corollari:

Corollario 2.3.1. *È impossibile tassellare un quadrato chiuso di lato maggiore o uguale a*

$$2\frac{4(2\beta^3+\beta^2\sqrt{4\beta^2-\alpha})}{\alpha}+2\beta$$

o maggiore, con poligoni che soddisfano alle condizioni del Teorema 2.3.1.

Dimostrazione. L'assurdo alla fine della dimostrazione del Teorema 2.3.1 deriva dall'aver supposto di poter tassellare il quadrato $S(r+\beta)$ con poligoni che rispettano le condizioni del teorema. In automatico quindi abbiamo la nostra tesi. □

Corollario 2.3.2. *Data una qualsiasi tassellazioni del piano in poligoni convessi con area inferiormente limitata e perimetro superiormente limitato, questa è composta da infiniti poligoni con meno di 6 lati.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere una tassellazione con le caratteristiche richieste ma con solo un numero finito di tasselli con meno di 6 lati. Sarebbe quindi possibile trovare una regione arbitrariamente grande tassellata solo da tasselli con più di 7 lati, contravvenendo al Corollario 2.3.1. □

Corollario 2.3.3. *Non esiste una tassellazione monoedrica i cui tasselli sono poligoni con più di 7 lati.*

Dimostrazione. Se i tasselli sono tutti uguali possiamo scegliere α e β di modo che le condizioni (3) e (4) siano automaticamente verificate; di conseguenza, se i tasselli sono poligoni convessi, non possono avere più di 6 lati. □

Per una dimostrazione meno generale, ma più semplice e diretta di questo fatto, rimandiamo all'articolo [Ker69]. Per completezza enunciamo anche la seconda parte del Teorema 2.3.1, che non dimostreremo visto che non la utilizzeremo in nessun modo. La dimostrazione originale si può trovare in [Niv78].

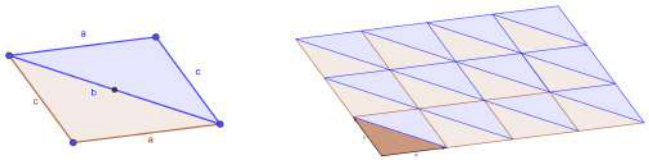
Teorema 2.3.2. *Esistono tassellazioni che rispettano esattamente 3 delle condizioni enunciate nel Teorema 2.3.1.*

Passiamo ora al cuore di questa sezione: quali poligoni tassellano il piano?

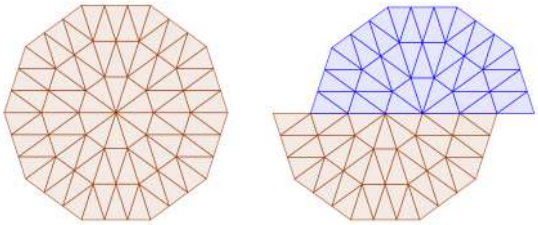
Triangoli

Teorema 2.3.3. *Qualsiasi triangolo tassella il piano.*

Dimostrazione. Preso un qualsiasi triangolo, ruotiamolo di π attorno al punto medio di un lato. Si forma un parallelogramma, perché i lati opposti sono congruenti. È chiaro che traslando il parallelogramma lungo le sue dimensioni questo tassella il piano e di conseguenza anche il triangolo originale. □



Ovviamente questo non è l'unico modo per creare una tassellazione monoedrica in triangoli, ma è un metodo standard che si può applicare sempre, qualsiasi sia il triangolo. Mostriamo di seguito altri due esempi di tassellazioni triangolari.
Partendo da una tassellazione in rettangoli, ottenuta traslando un rettangolo di partenza lungo le sue dimensioni, tagliando ogni rettangolo lungo una delle due diagonali, non necessariamente sempre la stessa, otteniamo una tassellazione in triangoli tutti uguali tra loro che può addirittura essere non periodica.
Considerando un triangolo isoscele il cui angolo al vertice sia $\frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, possiamo costruire una tassellazione radiale non periodica, come mostrato in figura (a); basta seguire la struttura gerarchica della tassellazione costruendo un anello per volta, partendo dal disporre i triangoli attorno all'angolo al vertice a formare un n-agono. Osserviamo che tale tassellazione si può tagliare a metà lungo uno degli spigoli che concorrono nel "centro' della tassellazione, cioè il vertice attorno a cui disponiamo i primi triangoli, e traslare un semipiano lungo il bordo dell'altro di un multiplo intero del lato obliquo del triangolo isoscele per ottenere una nuova tassellazione non periodica, come mostrato in (b).



(a) (b)

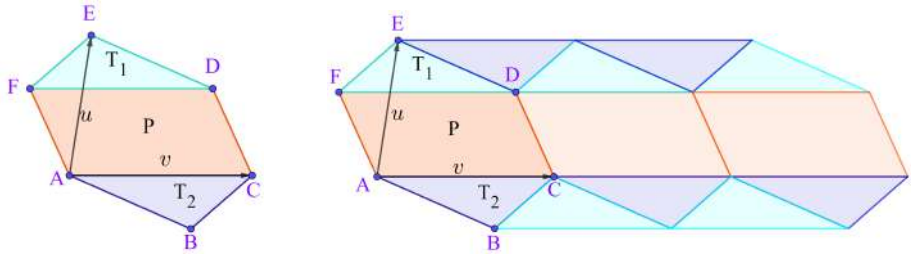
Quadrilateri

Teorema 2.3.4. *Un esagono, anche concavo, i cui lati opposti sono paralleli e congruenti tassella il piano.*

Dimostrazione. Consideriamo un esagono con le proprietà richieste, come nella figura (a), che contiene la nomenclatura che utilizzeremo. Consideriamo un vertice, ad esempio A, e i vettori che lo congiungono ai due vertici che non sono né adiacenti né opposti ad esso. Vogliamo mostrare che tramite le traslazioni lungo questi vettori l'esagono tassella il piano.

Dividiamo l'esagono nel parallelogramma che ha come dimensioni uno dei due vettori sopracitati e uno dei due lati uscenti da A, scelti di modo che i vertici del parallelogramma siano vertici anche dell'esagono, e nei due triangoli che restano individuati una volta definito il parallelogramma. In particolare i due triangoli sono congruenti in quanto hanno tutti i lati congruenti.

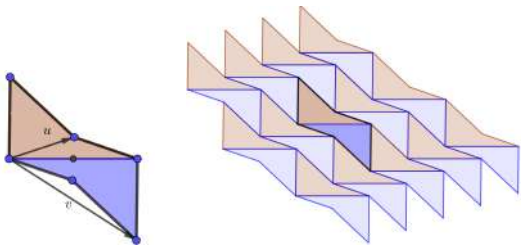
Notiamo immediatamente che traslando il parallelogramma lungo il vettore v stiamo tassellando la regione di piano compresa tra i due lati del parallelogramma paralleli a v. Se a T_2 applichiamo τ_u, si viene a formare un nuovo parallelogramma, in quanto, i lati AB e DE si sovrappongono perché sono paralleli e distano esattamente $\|u\|$, mentre EF e l'immagine di BC sono segmenti paralleli e congruenti. A questo punto, come prima, se trasliamo questo nuovo parallelogramma lungo v stiamo tassellando un'altra regione di piano compresa tra due rette parallele, in quanto la distanza tra le due rette è l'altezza dei due triangoli congruenti T_1 e T_2. In particolare, le due strisce individuate sono parallele. Ora è chiaro che se trasliamo l'unione di queste strisce lungo u tasselliamo il piano. Equivalentemente, ricomponendo gli esagoni, abbiamo dimostrato che un esagono con i lati opposti paralleli e congruenti tassella il piano. □



(a) (b)

Teorema 2.3.5. *Qualsiasi quadrilatero non intrecciato tassella il piano.*

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi quadrilatero e ruotiamolo di π attorno al punto medio di un suo lato, in questo modo otteniamo un esagono i cui lati opposti sono paralleli e congruenti. Per il Teorema precedente l'esagono tassella il piano.
L'unica accortezza necessaria è nella scelta del vertice da cui far uscire i vettori di traslazione: si deve scegliere uno dei due vertici in cui i due quadrilateri sono adiacenti e basta congiungere tale vertice con i sui opposti rispetto ai quadrilateri per ottenere i vettori. □



Pentagoni

Ad oggi, conosciamo 15 tipi di pentagoni che tassellano il piano. La dimostrazione che tali 15 tipi esauriscono tutti i casi possibili, elaborata nel 2017 dal matematico francese Michëal Rao, è tuttora in fase di *peer-reviewing* ([Rao17]). La dimostrazione proposta si basa sulla teoria dei grafi e dipende da un algoritmo che, dopo una riduzione a un totale di 371 casi basati sulla classificazione dei vertici, verifica quali casi danno luogo a tassellazioni monoedrali. In questa sezione adotteremo questa classificazione, seguendo più il percorso storico che quello matematico, in quanto le dimostrazioni, non sempre pubbliche, sono estremamente complesse e spesso sono state elaborate con l'utilizzo del calcolatore.
Notiamo che lo stesso tipo di tassello può generare tassellazioni diverse, sia per come vengono accostati i tasselli che per i loro gruppi di simmetria. In particolare, solo alcuni tipi ammettono tassellazioni *edge-to-edge*, a volte sotto ipotesi aggiuntive.
In questa sezione utilizzeremo la seguente notazione: nel pentagono $ABCDE$, A è il vertice compreso tra il lato a e il lato b e così via.

Teorema 2.3.6. *Un pentagono convesso tassella il piano se e solo se appartiene ad almeno uno dei seguenti 15 tipi:*

(Re1) $\hat{D} + \hat{E} = \pi$, *cioè ha una coppia di lati paralleli;*

(Re2) $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $a = d$;

(Re3) $\hat{A} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{2\pi}{3}$, $a = b$, $d = c + e$;

(Re4) $\hat{A} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $a = b$, $c = d$;

(Re5) $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{C} = \frac{2\pi}{3}$, $a = b$, $c = d$;

(K1) $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $\hat{A} = 2\hat{C}$, $a = b = e$, $c = d$;

(K2) $2\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{D} + \hat{A} = 2\pi$, $a = b = c = d$;

(K3) $2\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi$, $a = b = c = d$;

(J) $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{A} + \hat{D} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{A} = 2\hat{C} + \hat{D} = 2\pi$, $a = e = b + d$;

(Ri1) $2\hat{E} + \hat{B} = 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi$, $a = b = c = d$;

(Ri2) $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$, $d = e = 2a + c$;

(Ri3) $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$, $2a = d = e + c$;

(Ri4) $\hat{A} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{B} = \hat{E} = \pi - \frac{\hat{D}}{2}$, $c = d$, $2c = e$;

(S) $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $2a = 2c = d = e$;

(M) $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{C} = \frac{3\pi}{4}$, $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$, $a = c = e$, $b = 2a$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}a$.

Nelle prossime pagine ci limiteremo a spiegare come costruire il tassello, come comporre la regione fondamentale e come traslarla per ottenere la traslazione. In particolare, per non ripeterci, notiamo fin da ora che le traslazioni che permettono alla regione fondamentale di tassellare il piano sono giustificate dalle condizione imposte sui tasselli e da come sono assemblati nella regione fondamentale.

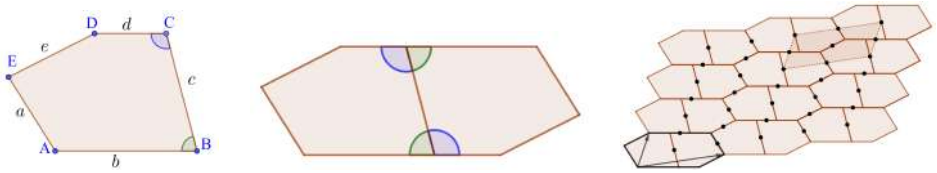
Tassellazioni di Reinhardt (1918)

Nel 1918, il matematico tedesco Karl Reinhardt (1895–1941) nella sua tesi di dottorato all'Università di Francoforte ([Rei18]), oltre a dimostrare che esistono soltanto tre famiglie di esagoni che tassellano il piano, mostrò che esistono almeno cinque

tipi di pentagoni che tassellano il piano. Reinhardt, così come molti suoi colleghi, pensava che questi cinque tipi esaurissero completamente la casistica. Infatti nella sua tesi non dimostrò che questi erano tutti e soli i casi, ma affermò che sarebbe sì stato possibile proseguire la ricerca, ma questo, oltre ad essere estremamente tedioso, non avrebbe portato probabilmente a nessun nuovo tipo. In particolare, Reinhardt dimostrò che tutti e cinque i tipi formano tassellazioni isoedrali, cioè *tile transitive*

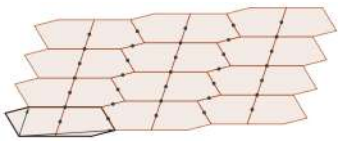
(Re1) L'unica condizione che deve soddisfare il primo tassello è $\hat{D} + \hat{E} = \pi$. Per costruirlo è sufficiente costruire un pentagono con una coppia di lati paralleli. Per ottenere la regione fondamentale è basta applicare una simmetria centrale rispetto al punto medio di uno dei tre lati che non compongono la coppia parallela. In questo modo si forma un esagono i cui lati opposti sono paralleli e congruenti, e, come mostrato nel Teorema 2.3.4, questo tassella il piano per traslazione. In particolare, una traslazione sovrappone il lato dell'esagono formato dalla coppia di lati paralleli del pentagono al suo opposto, mentre l'altra sovrappone uno dei due lati dell'esagono che ancora non abbiamo considerato con la sua immagine tramite la simmetria centrale.

In generale questa tassellazione non è *edge-to-edge* e il suo gruppo di simmetria è **p2**. La tassellazione duale della tassellazione uniforme (3,3,3,4,4) appartiene a questo tipo.



Re1

È possibile forzare che la tassellazione sia *edge-to-edge* imponendo che i due lati paralleli siano anche congruenti, come mostrato nella figura seguente.



Re1: caso *edge-to-edge*

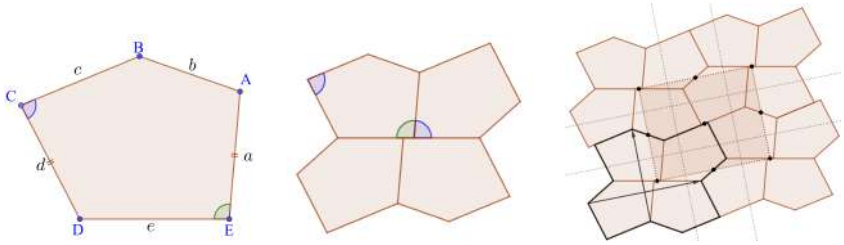
(Re2) In questo caso il pentagono è tale che $\hat{C} + \hat{E} = \pi$ e $a = d$.

Costruiamo, a piacere, i lati e e d, purché $\hat{D}$ sia abbastanza ampio, altrimenti il pentagono risulterà concavo. A questo punto scegliamo A sulla circonferenza di centro E e raggio d e ruotiamo la retta che contiene d attorno a C di $\pi - \hat{E}$. Abbiamo già soddisfatto tutti i requisiti e basta scegliere B lungo la retta ruotata, con l'unica restrizione che la figura risultante sia concava.

In questo caso la regione fondamentale è composta da 4 copie del tassello. Per ottenerla bisogna ruotare e traslare il tassello in modo che l'angolo $\hat{C}$ e l'angolo $\hat{E}$ siano adiacenti, così da formare un angolo piatto. A questo punto, consideriamo l'unione dei due lati adiacenti e riflettiamo i due tasselli rispetto al punto medio di questo segmento.

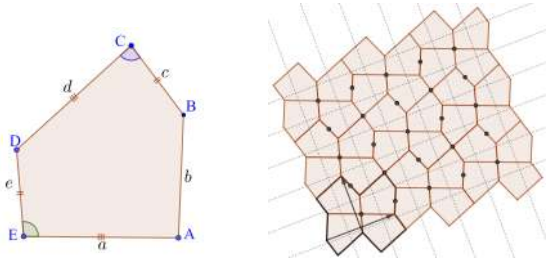
Utilizzando le due traslazioni mostrate in figura, o una loro combinazione lineare, notiamo che possiamo tassellare dischi arbitrariamente grandi, e quindi per il Teorema 2.0.1 abbiamo concluso.

La tassellazione in genere non è *edge-to-edge*. Il gruppo di simmetria è **pgg**.



Re2

Se imponiamo anche che $c = e$, per come abbiamo costruito la regione fondamentale, notiamo che tale tassellazione è *edge-to-edge*.



Re2: caso *edge-to-edge*

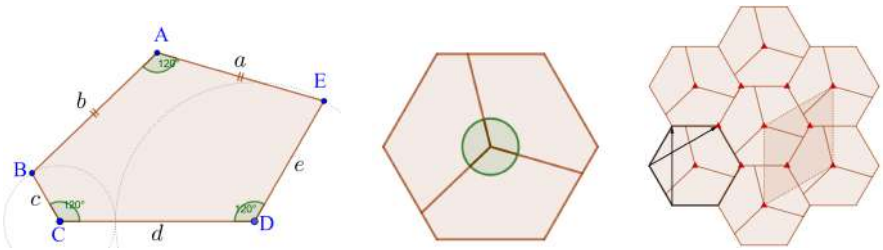
(Re3) Il pentagono che costituisce la tassellazione (Re3) è tale che $\hat{A} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{2\pi}{3}$, $a = b$ e $d = c + e$. Per costruirlo, partiamo dal lato d, dividiamolo in due parti

e ruotiamo i segmenti ottenuti di $\frac{2\pi}{3}$, uno in senso orario e uno in senso antiorario attorno ai vertici di d a loro adiacenti, determinando così B ed E. A questo punto è sufficiente individuare A sull'asse del segmento BE in modo che $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$; per farlo notiamo che il triangolo ABE è isoscele e l'angolo al vertice deve essere $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$, quindi gli angoli alla base sono necessariamente di $\frac{\pi}{6}$. Basta quindi ruotare la retta contenente BE di $\frac{\pi}{6}$ attorno a E e intersecarla con l'asse di BE.

Per costruire la regione fondamentale è sufficiente ruotare due volte il tassello attorno a A di $\frac{2\pi}{3}$. Si forma un esagono regolare perché: le immagini dei lati c ed e formano angoli di π in quanto $\hat{B} + \hat{E} = (5-2)\pi - 3\frac{2\pi}{3} = \pi$; i lati esterni sono immagini di d o unione di e e c che per ipotesi è congruente a d; gli angoli interni sono tutti copie di $\hat{C}$ o $\hat{D}$ che sono esattamente gli angoli interni di un esagono regolare. A questo punto basta ottenere la tassellazione regolare **(6,3)** per traslazione come mostrato in figura.

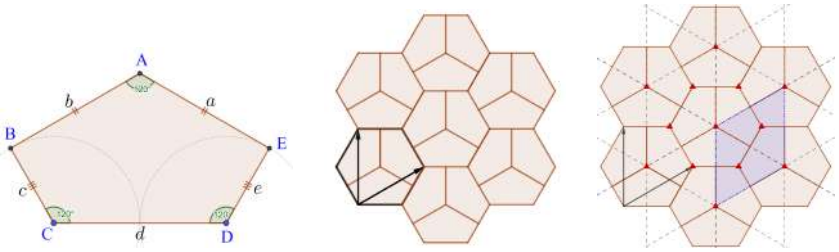
Da ciò abbiamo un altro modo per costruire il pentagono richiesto: consideriamo un esagono regolare, dividiamo tre lati non consecutivi nello stesso modo e uniamo tali punti al centro dell'esagono. Otteniamo tre pentagoni con esattamente le proprietà richieste.

La tassellazione non può essere *edge-to-edge*, in quanto l'unico modo sarebbe dividere i lati alternati degli esagoni a metà, ma se proviamo a farlo partendo dalla tassellazione in esagoni **(6,3)** notiamo facilmente che non è possibile. Il suo gruppo di simmetria è **p3**.



Re3

Dividendo i lati degli esagoni nel loro punto medio è però possibile aumentare la regolarità della tassellazione, il cui gruppo di simmetria diventa **p31m**.



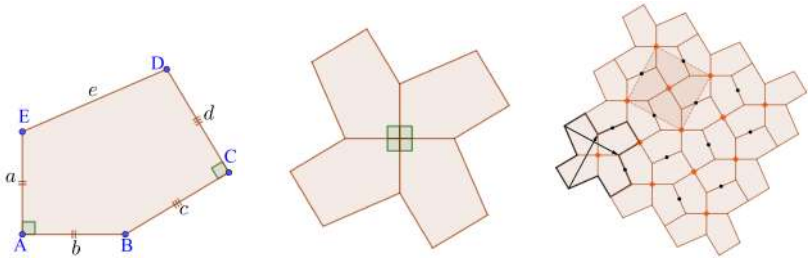
Re3: caso *edge-to-edge*

(Re4) Il tassello è tale che $\hat{A} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $a = b$ e $c = d$.

Consideriamo due segmenti consecutivi b e c, con l'unica accortezza che $\hat{B}$ sia sufficientemente grande altrimenti il tassello risulterà convesso. Costrendo a ruotando b di $\frac{\pi}{2}$ e d ruotando c di $\frac{\pi}{2}$ abbiamo concluso.

Per costruire la regione fondamentale è sufficiente scegliere uno dei due vertici il cui angolo sia retto e ruotare il tassello 4 volte attorno ad esso di $\frac{\pi}{2}$.

Infine traslando come in figura, possiamo tassellare regioni del piano arbitrariamente grandi e quindi abbiamo nuovamente trovato la tassellazione. Essa è *edge-to-edge* e il suo gruppo di simmetria è **p4**. In particolare, la tassellazione duale della tassellazione uniforme (3,3,4,3,4) appartiene a questo tipo.



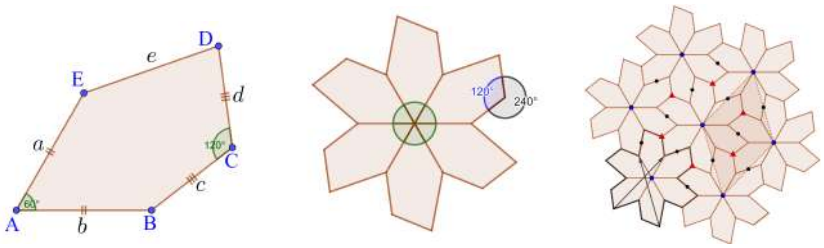
Re4

(Re5) Il tassello è tale che $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{C} = \frac{2\pi}{3}$, $a = b$ e $c = d$. Costruiamo a e b di modo che siano congruenti e formino un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Costruiamo c, con l'unica restrizione che l'angolo in B sia abbastanza ampio, e ruotiamolo di $\frac{2\pi}{3}$ attorno a C; visto che non abbiamo restrizioni su d e $\hat{D}$ abbiamo concluso.

La regione fondamentale si ottiene ruotando 6 volte il pentagono attorno ad A di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, ottenendo la figura a forma di fiore sottostante.

Applicando le traslazioni indicate sotto, tasselliamo tutto il piano. La tassellazione è *edge-to-edge* e il gruppo di simmetria è **p6**. In particolare, la

tassellazione duale della tassellazione uniforme (3,3,3,3,6) appartiene a questo tipo, dove però $c = d = e$.



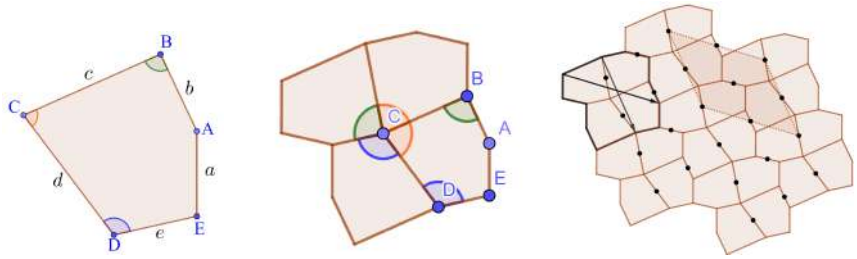
Re5

Tassellazioni di Kershner (1968)

Nel 1968, il matematico americano Richard Brandon Kershner (1913-1982) pubblicò l'articolo *On paving the plane* ([Ker69]) nel quale mostra altri 3 tipi di pentagoni diversi da quelli di Reinhardt. Nell'introduzione di questo articolo, l'autore dichiara di essere stato affascinato dal problema per oltre 35 anni e ogni 5-10 anni cercava una soluzione al quesito. Nell'articolo scrive di aver trovato un metodo di classificazione migliore di quello precedentemente usato da Reinhardt, che sostiene si sia fermato tradito dalla sua forza di volontà o dal suo stesso metodo; sfortunatamente, nell'articolo non c'è traccia di questo metodo. Inoltre, chiude l'articolo sostenendo che questi siano tutti e soli i pentagoni che tassellano il piano ma senza fornire una dimostrazione, che secondo lui avrebbe bisogno di un intero libro e sarebbe stata pubblicata altrove. Tutte le tassellazioni di Keschner sono 2-isoedrali ed *edge-to-edge*.

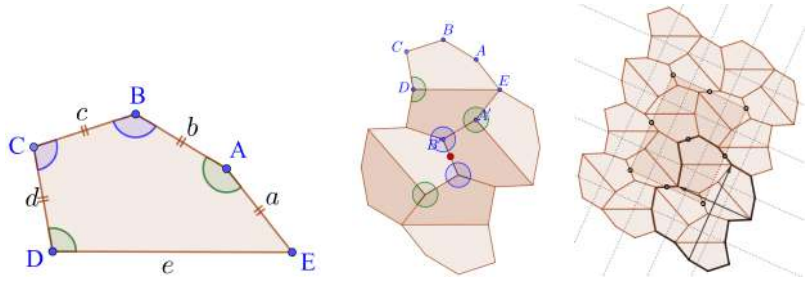
(K1) Il tassello è caratterizzato da $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $\hat{A} = 2\hat{C}$, $a = b = e$ e $c = d$. Costruiamo i lati $a = e$, ruotiamo a attorno ad A di $\hat{A} = 2(\pi - \hat{E})$, individuando B. Tracciamo l'asse di BD e scegliamo C su tale asse di modo che $\hat{C} + \hat{E} = \pi$; per fare questo è sufficiente notare che il triangolo BCD è isoscele con angoli alla base di $\frac{\pi - \hat{C}}{2} = \frac{\hat{E}}{2}$ e quindi basta ruotare BD attorno a B o D di tale angolo. In particolare, se $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, allora $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$ e quindi $2\hat{C} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$. La regione fondamentale è composta da 4 copie del pentagono: partendo dal tassello in basso a destra, ruotiamolo di $\hat{C}$ attorno a C; applichiamo alla nuova copia un mezzogiro attorno al punto medio del lato uscente da C che non è

adiacente al primo tassello; infine ruotando e traslando "chiudiamo" la figura sovrapponendo D a C. Per l'osservazione precedente, attorno a C si forma un angolo giro e quindi la regione fondamentale è topologicamente un disco e traslando come in figura possiamo concludere. Il gruppo di simmetria è **p2**.



K1

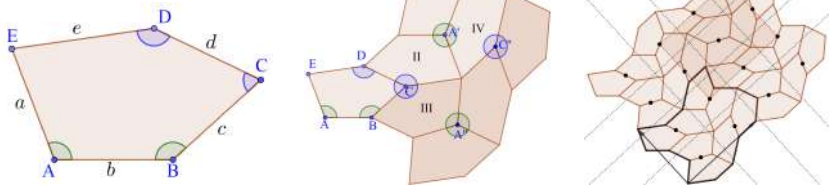
(K2) Le proprietà del pentagono sono $2\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{D} + \hat{A} = 2\pi$ e $a = b = c = d$.
Costruiamo $d = c$ e ruotiamo c attorno a B di $\pi - \frac{\hat{C}}{2}$ per ottenere A. A questo punto non ci resta che determinare E; se utilizziamo un software, come GeoGebra nel nostro caso, fissiamo provvisoriamente E sulla circonferenza di centro A e raggio b, ruotiamo la retta che contiene d attorno a D di $\pi - \frac{\hat{C}}{2}$ e spostiamo E lungo la circonferenza fino a che non appartiene a tale retta; con lo stesso ragionamento possiamo analiticamente risolvere il sistema in cui le incognite sono le coordinate di E.
La regione fondamentale è composta da 8 copie del tassello, di cui 4 hanno subito una riflessione e sono indicate in figura con un riempimento più scuro, convenzione che adotteremo anche nel seguito senza ripeterlo.
Partiamo dal tassello in alto e riflettiamolo lungo e, l'unico lato diverso dagli altri. Ruotiamo e trasliamo questa coppia di tasselli in modo da sovrapporre D con A', l'immagine di A; viene a formarsi un angolo giro, indicato in verde, perché abbiamo accostato due copie dell'angolo $\hat{D}$ e una di $\hat{A}$, che per ipotesi sommano a 2π. Applichiamo all'unione di questi quattro tasselli un mezzogiro rispetto al punto medio del lato del tassello III corrispondente a c, indicato in rosso in figura. Traslando la regione fondamentale come in figura otteniamo la tassellazione, il cui gruppo di simmetria è **pgg**.



K2

(K3) Il tassello è tale che $2\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi$ e $a = b = c = d$. Costruiamo a, b, c di modo che siano congruenti e $2\hat{A} + \hat{B} = 2\pi$ (basta ruotare b attorno a B di $2(\pi - \hat{A})$). Scegliamo provvisoriamente D sulla circonferenza di centro C e raggio c e ruotiamo la retta che contiene d attorno a D di $\pi - \frac{\hat{C}}{2}$; ora muoviamo D sulla circonferenza fino a che E non appartiene alla retta. Come prima, è possibile risolvere il problema anche analiticamente.

La regione fondamentale è composta da 8 copie del tassello, di cui 4 riflessi: seguendo la figura sottostante, partiamo dal tassello a sinistra e facciamone la simmetria centrale attorno al punto medio di d, dopodiché riflettiamo il nuovo tassello lungo l'immagine di e, cioè lungo il lato ancora libero uscente da C. Notiamo che viene a formarsi un angolo giro, indicato in blu, perché abbiamo accostato due copie di $\hat{D}$ e una di $\hat{C}$. Continuando, ruotiamo il tassello III di $\hat{A}$ attorno a A'' e riflettiamo lo stesso tassello III attraverso il punto medio dell'altro lato ancora libero uscente da A''. In questo modo formiamo un altro angolo giro, indicato in verde in basso, sempre giustificato dalle proprietà del pentagono. Similmente agiamo sul tassello II attorno al vertice A'. Per concludere basta riflettere IV lungo l'unico lato libero uscente da C'' a formare di nuovo un angolo giro, di nuovo indicato in blu. Il gruppo di simmetria è **pgg**.



K3

Tassellazione di James (1975)

Nel 1975, nel volume 233 numero 1 di *Scientific American*, il matematico e divulgatore statunitense Martin Gardner (1914-2010) pubblica nella sua celebre rubrica *MATHEMATICAL GAMES* un articolo intitolato *"On tassellating the plane with convex polygon tiles"* ([Gar75]), in cui ripercorre la storia del problema delle tassellazioni monoedrali e cita i risultati prodotti da Reinhardt e Kershner. Tale articolo dà nuova linfa alla ricerca sul problema, tanto da farne interessare anche degli amatori che manderanno a Garden diverse tassellazioni, che risulteranno essere per lo più casi particolari delle otto già presenti. Tra questi, Richard E. James III, un computer scientist, e Marjoice Rice, una casalinga di San Diego e fan della rubrica di Gardner, riuscirono nell'intento di trovare nuovi tipi di pentagoni che tassellano il piano. James scrisse a Gardner appena un mese dopo la pubblicazione dell'articolo e questo si premurò di aggiornare i propri lettori nella sua rubrica di Dicembre 1975.

Il tassello trovato da James è tale che $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{A} + \hat{D} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{A} = 2\hat{C} + \hat{D} = 2\pi$ e $a = e = b + d$. Per costruire il tassello, iniziamo a costruire i segmenti perpendicolari e congruenti a ed e. Fissiamo temporaneamente un punto F su e, costruiamo la circonferenza di centro D e raggio DF e su di essa fissiamo il punto C, coerentemente con la costruzione di un tassello convesso. A questo punto ruotiamo la retta contenente d attorno a C di $\pi - \frac{\hat{D}}{2}$, ruotiamo la retta contenente a attorno ad A di $\pi - \hat{D}$ e costruiamo la circonferenza di centro A e raggio EF. A questo punto regoliamo F in modo che questi tre oggetti siano concorrenti, determinando B.
Resta da verificare che $2\hat{B} + \hat{A} = 2\pi$:

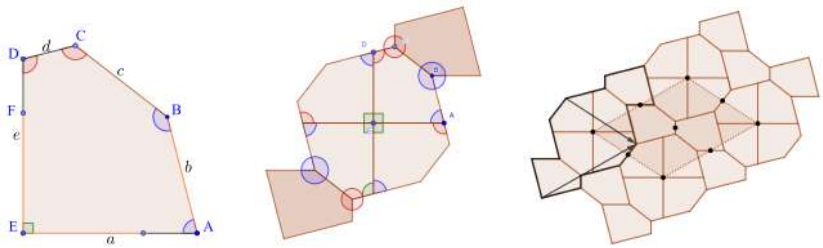
$$2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C} + 2\hat{D} + 2\hat{E} = 6\pi$$

$$\hat{A} + 2\hat{B} + (\hat{A} + \hat{D}) + (2\hat{C} + \hat{D}) + 2\hat{E} = 6\pi$$

$$\hat{A} + 2\hat{B} = 6\pi - \pi - 2\pi - 2\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

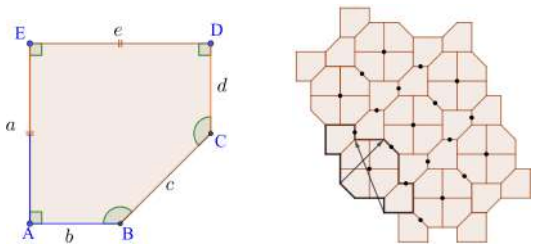
La regione fondamentale è composta da 6 tasselli, di cui due hanno subito una riflessione: è sufficiente ruotare il tassello 4 volte attorno ad E, cioè il vertice retto, per poi scegliere due tasselli opposti rispetto a E e rifletterli lungo il corrispettivo di c, cioè l'unico lato su cui non abbiamo imposto limitazioni.

Notiamo in particolare che nei vertici corrispondenti ad A e D formiamo un angolo piatto in quanto concorrono sempre una copia di $\hat{A}$ e una di $\hat{D}$. Inoltre, nei vertici in cui incolliamo i tasselli riflessi notiamo che ci sono alternativamente due copie di $\hat{B}$ o di $\hat{C}$ a cui poi andrà ad aggiungersi, grazie alla traslazione, una copia di $\hat{A}$ o di $\hat{D}$, rispettivamente. La tassellazione in generale non è *edge-to-edge* e il gruppo di simmetria è **p2**.



Tassellazione di James

Se $b = d$ e $\hat{B} = \hat{C} = \frac{3\pi}{4}$, otteniamo una tassellazione *edge-to-edge*.



Tassellazione di James: caso *edge-to-edge*

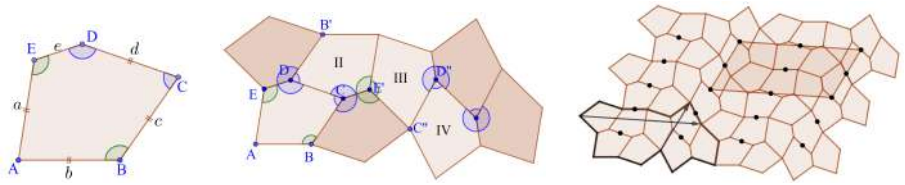
Tassellazioni di Rice (1977)

La storia di Marjorie Rice (1923-2017) è una delle storie più affascinanti della matematica moderna. Madre di cinque figli, appassionata di arte e senza una formazione matematica se non il minimo indispensabile fornito dalla scuola superiore 35 anni prima, come dirà Schattshneider; cominciò a lavorare sul problema nell'estate del 1975 nel tempo libero, disegnando diagrammi sul tavolo della cucina e nascondendo il suo lavoro quando familiari o amici entravano in casa. La sua indagine verteva sulle relazioni di lati e angoli attorno a un vertice e la portò anche a sviluppare una nuova notazione. Entro Febbraio 1976, aveva trovato un nuovo tipo di tassello e scrisse a Garnder per comunicargli la scoperta. Quest'ultimo inoltrò il messaggio alla matematica americana Doris J. Schattschneider (1939-), esperta di tassellazioni del piano, che, nonostante un'iniziale scetticismo che la portò anche a definire la

notazione introdotta da Rice come strana, quasi dei geroglifici, dopo attente analisi dichiarò vera la scoperta. Rice continuò la sua ricerca, a tutti gli effetti sistematica e basata su principi geometrici, su oltre 60 tasselli diversi, che la portò a scoprire un totale di 4 nuovi tipi, di cui solo il primo è *edge-to-edge* ed era sfuggito a matematici molto più esperti di lei come Reinhardt e Kershner. Dopo la sua morte nel 2017, il pavimento di una stanza della *Mathematical Association of America* di Washington è stato decorato con una delle sue tassellazioni pentagonali in suo onore. Purtroppo la maggior parte del lavoro di Rice, e soprattutto i ragionamenti utilizzati, non è mai stato pubblicato. Tutte le tassellazioni di Rice sono 2-isoedrali.

(Ri1) Il primo tassello è tale che $2\hat{E} + \hat{B} = 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi$ e $a = b = c = d$. Per costruirlo, partiamo dai lati congruenti b e c. Fissiamo provvisoriamente i punti E e D sulle circonferenze di raggio b di centro rispettivamente A e C. Ruotiamo la retta che contiene a attorno ad E di $\pi - \frac{\hat{B}}{2}$ e, similmente, la retta che contiene d attorno a D di $\pi - \frac{\hat{C}}{2}$. A questo punto muoviamo E e D lungo le rispettive circonferenze fino a che le due rette ruotate non coincidono.

La regione fondamentale è formata da 8 tasselli, di cui 4 sono riflessi. Come nella figura sottostante, partiamo dal tassello in basso a sinistra, riflettiamolo lungo e, l'unico lato su cui non abbiamo limitazioni; dopo di che applichiamo al tassello originale un mezzogiro attorno al punto medio di d. In questo modo formiamo un angolo giro attorno a D, indicato in blu e giustificato dalle ipotesi sul tassello. Riflettendo il tassello II lungo il corrispettivo di e, ricreando un secondo angolo giro, sempre in blu. Ruotiamo e trasliamo II di modo che il vertice B' vada a coincidere con E', formando l'angolo giro verde presente in figura. A questo punto riflettiamo il tassello III lungo il proprio corrispettivo di e e applichiamo a III un mezzogiro attorno al punto medio del lato corrispondente a d, in modo da sovrapporre C'' a D''. Infine riflettiamo IV lungo il corrispettivo di e. Il gruppo di simmetria è **p2**.

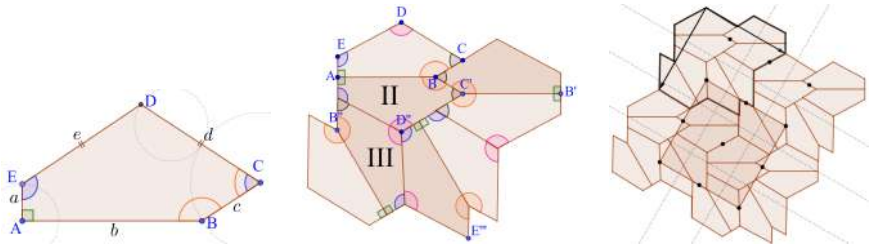


Ri1

(Ri2) Il secondo tassello di Rice è tale che $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ e $d = e = 2a + c$. Per costruirlo partiamo considerando i due segmenti a e b, prendendo b abbastanza grande ed a abbastanza piccolo. Fissiamo provvisoriamente il segmento c. Consideriamo l'asse di CE, la circonferenza di centro c e raggio $2a + c$, ruotiamo la retta contenente c attorno a C di $2\pi - 2\hat{B}$ e la retta contenente a attorno a E di $\pi - \hat{C}$. Variamo C fino a che i quattro oggetti non si intersecano in un solo punto, che è il punto D.

La regione fondamentale è composta da 8 tasselli di cui 4 riflessi. Partendo dal tassello più in alto nella figura centrale, riflettiamolo lungo b, cioè l'unico lato su cui non abbiamo dato limitazioni; applichiamo al nuovo tassello un mezzogiro attorno al punto medio del lato corrispondente a c e riflettiamo quest'ultimo tassello lungo il lato corrispondente a b. Ruotiamo il tassello II attorno al vertice corrispondente a D di $\hat{D}$ in senso antiorario e riflettiamo il nuovo tassello lungo il corrispettivo di b. Infine facciamo una simmetria centrale del tassello III rispetto al punto medio del suo lato corrispondente a e e riflettiamo nuovamente l'ultimo tassello rispetto a b.

Notiamo che, come mostrato in figura, la regione è topologicamente un disco perché i vari tasselli si incastrano l'un l'altro grazie alle condizioni sugli angoli. Il gruppo di simmetria è **pgg**.



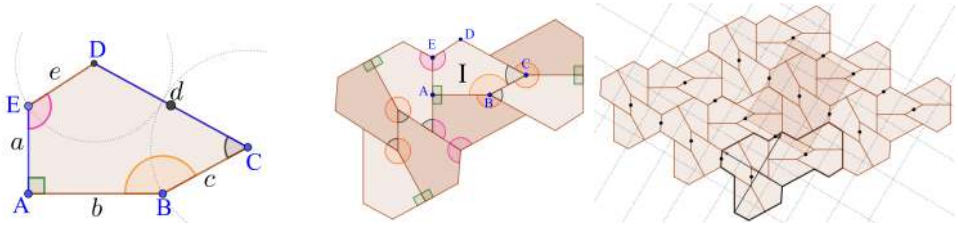
Ri2

(Ri3) Il terzo tassello è tale che $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ e $2a = d = e + c$.

Costruiamo i due segmenti perpendicolari a e b. Fissiamo C sulla circonferenza di centro B e raggio $c < 2a$. A questo punto costruiamo il segmento d lungo $2a$ e che forma un angolo di $2(\pi - \hat{B})$ con il segmento c e, dopo questo, il segmento e lungo $2a - c$ che forma un angolo di $\pi - \hat{E}$ con a. Tali segmenti avranno gli estremi non coincidenti in generale: modifichiamo il raggio c fino

a che tali estremi non coincidono.

La regione fondamentale è composta da 8 tasselli, di cui 4 sono riflessi. Partendo dal tassello I della figura centrale, riflettiamolo lungo b, l'unico spigolo su cui non abbiamo limitazioni; applichiamo a I la riflessione centrale attorno al punto medio di c e infine riflettiamo quest'ultimo tassello lungo il corrispettivo di b. Notiamo che, grazie alle proprietà del tassello si formano due angoli giri, mentre in A e nelle sue copie si formano angoli piatti. Ritornando al tassello I, ruotiamolo in senso orario di $\hat{E}$ attorno a E e applichiamo le stesse operazioni di prima a questo nuovo tassello. Il gruppo di simmetria è **pgg**.



Ri3

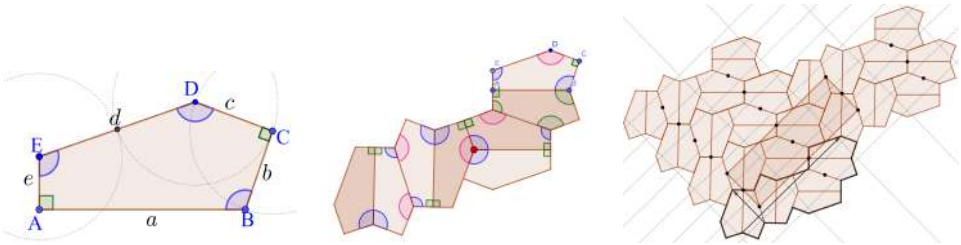
(Ri4) L'ultimo tassello è tale che $\hat{A} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{B} = \hat{E} = \pi - \frac{\hat{D}}{2}$, $c = d$ e $2c = e$.

Consideriamo i lati perpendicolari a e b. Costruiamo c e ruotiamolo di $\frac{\pi}{2}$ attorno a C, ottenendo d. Quindi costruiamo il segmento e, lungo $2c$ e che forma un angolo $\hat{B}$ attorno a E. Muoviamo C ed E fino a che i due estremi liberi degli ultimi due segmenti non coincidono: il punto comune è D. Resta da mostrare che $\hat{D} = 2\pi - 2\hat{B}$, ma questo è evidente perché $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E} = 3\pi$ e sfruttando le proprietà già usate nella costruzione $2\hat{B} + \hat{D} = 2\pi$.

La regione fondamentale è composta da 8 tasselli di cui 4 sono stati riflessi. Partendo dal tassello in alto a destra nella figura centrale, riflettiamolo lungo b. Applichiamo al nuovo tassello la simmetria centrale attraverso il punto medio del lato corrispondente ad e e riflettiamo quest'ultimo tassello lungo il corrispettivo di b. Consideriamo l'unione di questi 4 tasselli e, dopo una riflessione, ruotiamola e trasliamola affinché il vertice D del tassello iniziale si sovrapponga al vertice colorato di rosso in figura.

Notiamo che la regione è ben definita in quanto i tasselli sono composti in modo da formare angoli interni di 2π grazie alle proprietà del tassello e nelle

copie di A si incontrano sempre due angoli retti. Il gruppo di simmetria è **pgg**.



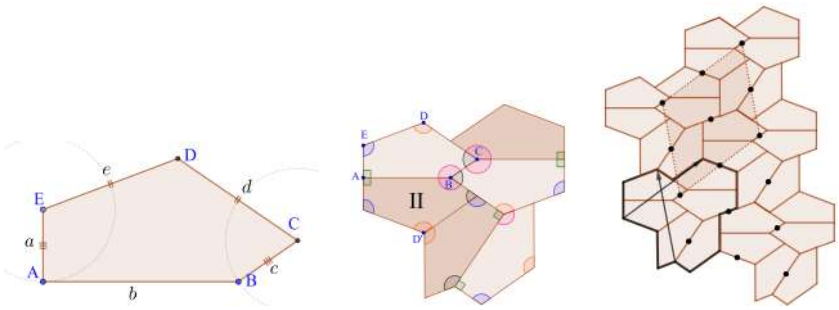
Ri4

Tassellazione di Stein (1985)

Nel 1985, il matematico tedesco Rolf Stein trovò la quattordicesima tassellazione in pentagoni. La particolarità del tassello è che è completamente determinato, senza gradi di libertà. Il tassello è tale che $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi$, $\hat{C} + \hat{E} = \pi$ e $2a = 2c = d = e$. Costruiamolo partendo da i due lati perpendicolari a e b, che devono essere nel rapporto $\frac{b}{a} = \sqrt{11\sqrt{57} - 258} \simeq 2,69$ e costruiamo $c = b$ di modo che $\sin(\hat{B}) = \frac{\sqrt{57}-3}{8} \simeq 0,57$, e quindi $\hat{B} \simeq 145.34°$. A questo punto è sufficiente costruire il lato d congruente a $2a$ di modo che $\hat{C} = 2\pi - 2\hat{E}$.

La regione fondamentale è composta da 6 tasselli, tre dei quali sono riflessi. Partendo dal tassello in alto a sinistra nella figura centrale, riflettiamolo lungo b e facciamone la simmetria centrale attraverso il punto medio del lato c. Riflettiamo quest'ultimo tassello lungo il suo lato corrispondente a b. Riprendiamo dal tassello II e ruotiamolo attorno al suo corrispettivo di D di un angolo pari a $\hat{D}$ e riflettiamo quest'ultimo tassello lungo il suo lato che corrisponde a b.

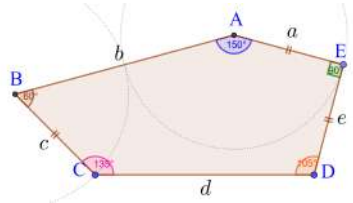
La tassellazione è 3-isoedrale, non è *edge-to-edge* e il suo gruppo di simmetria è **p2**.

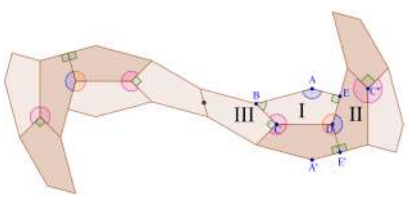


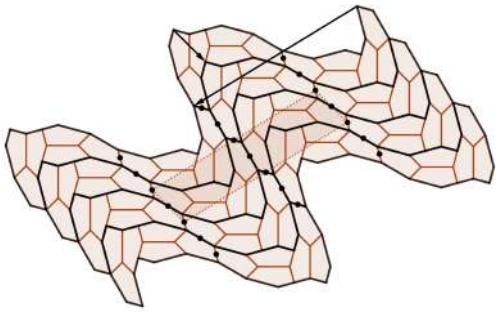
Tassellazione di Stein

Tassellazione di Mann-McLoud-Von Derau (2015)

Data una tassellazione monoedrica $\mathcal{T}$ del piano, diremo che essa è *n-block transitive* se possiede un blocco $\mathcal{B}$ composto dal minimo numero n di tasselli connessi tale che B, visto come tassello, genera $\mathcal{T}$ e la tassellazione sotto questo punto di vista è isoedrale. Le tassellazioni di Reinhardt sono *1-block transitive*, quelle di Kershner, Rice e Stein sono *2-block transitive* e quella di James è *3-block transitive*.
Nel 2015, i matematici statunitensi della *University of Washington Bothell* Casey Mann, Jennifer McLoud-Mann e il loro studente David Von Derau, analizzando il caso $n = 3$ trovarono una nuova tassellazione in pentagoni. Tre anni più tardi pubblicarono un articolo chiamato "*Convex pentagons that admit i-block transitive tilings*" ([MMMVD18]) in cui dimostrano che non esistono altre tassellazioni in pentagoni con $n \leq 4$, supportando la tesi di Rao introdotta all'inizio di questa sezione. Il tassello è tale che $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{C} = \frac{3\pi}{4}$, $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$, $a = c = e$, $b = 2a$ e $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}a$. Anche in questo caso il tassello è univocamente determinato e ci sono alcune restrizioni pleonastiche che si potrebbero ricavare dalle altre. Costruire questo tassello è estremamente facile: consideriamo il segmento a a piacere, costruiamo b tale che $b = 2a$ e $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$; dopodiché costruiamo c tale che $c = a$ e $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ e infine costruiamo e tale che $e = a$ ed $\hat{E}$ è retto. Unendo i due vertici ancora liberi abbiamo concluso.
La regione fondamentale è composta da 12 tasselli, di cui la metà sono stati riflessi. Partendo dal tassello I in figura, applichiamo una traslazione e una rotazione in modo da sovrapporre E a C e riflettiamo I lungo d; dopodiché ruotiamo e trasliamo quest'ultimo tassello di modo che il vertice corrispondente a A si sovrapponga a D a formare un angolo giro, indicato in blu e arancione. Consideriamo ora questo nuovo tassello, indicato con II, e applichiamo la stessa sequenza di operazioni. Se ora consideriamo l'unione di questi sei tasselli e applichiamo la simmetria centrale attraverso il punto medio del lato corrispondente a c del tassello III otteniamo la regione fondamentale. Il gruppo di simmetria è **pgg**.







Tassellazione di Mann-McLoud-Von Derau

Una famiglia particolare di tassellazioni pentagonali

Nel 2016, il matematico Bernhard Klaassen pubblicò l'articolo "*Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons*" in cui cambia il punto di vista sulla ricerca delle tassellazioni in pentagoni: anziché chiedersi quali pentagoni tassellano il piano e conseguentemente studiare il loro gruppo di simmetria, Klaassen si chiese se dato un gruppo discreto di isometrie, ci sia una tassellazione pentagonale che ha tale gruppo come gruppo di simmetria. La risposta è affermativa nel caso dei gruppi ciclici e diedrali, portando l'attenzione per la prima volta su tassellazioni pentagonali non periodiche.

Definizione 2.3.2. *Sia P un pentagono. Utilizzando la notazione usata finora, diremo che P è un* ***pentagono di Klaassen*** *se gode delle seguenti proprietà:*

(K1) *è convesso;*

(K2) $\hat{D} + \hat{E} = \pi$;

(K3) $\hat{C}$ *o* $\hat{B}$ *sono uguali a* $\frac{2\pi}{n}$, *per qualche* $n \in \mathbb{N}$;

(K4) $b = c = a + d$.

Notiamo che questi pentagoni sono un caso particolare del primo tassello trovato da Reinhardt. Inoltre tali pentagoni hanno esattamente 3 gradi di libertà in quanto $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ possono essere scelti indipendenti ognuno entro un certo range di valori.

Teorema 2.3.7. *Per ogni $n \geq 1$, esiste una tassellazione in pentagoni di Klaassen con gruppo di simmetria C_n e una tassellazione con gruppo di simmetria D_n.*

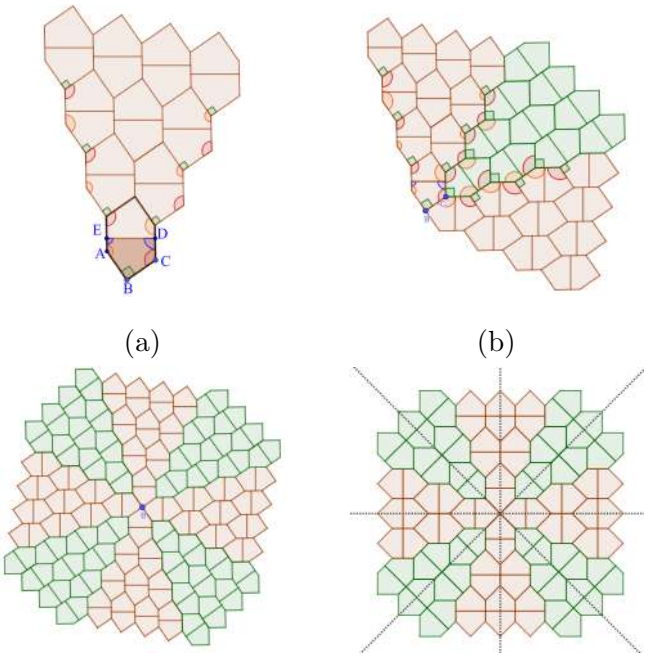
Analizziamo separatamente il caso $n > 2$ e poi i casi $n = 1$ e $n = 2$; supponiamo inoltre, senza perdere di generalità, che sia $\hat{B} = \frac{2\pi}{n}$.

Teorema 2.3.8. *Per ogni naturale $n > 2$, dato un pentagono di Klaassen, tale che $\hat{B} = \frac{2\pi}{n}$, questo tassella il piano e il suo gruppo di simmetria è C_n.*
Se supponiamo anche che $\hat{C} = \pi - \frac{\hat{B}}{2}$ e $\hat{D} = \frac{\pi}{2}$ il gruppo di simmetria è D_n.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che un tale tassello esiste. Consideriamo i lati congruenti b e c, tali che formino un angolo di $\frac{2\pi}{n}$. Costruiamo il segmento d, purché sia più corto di b, e costruiamo a parallelo ad esso e lungo $b-d$. Nel secondo caso la costruzione è simile, ma la scelta di $\hat{C}$ è obbligata e $a = d$. Nell'esempio delle figure sottostanti abbiamo considerato $n = 4$
Iniziamo ora con l'analisi del primo caso. Applichiamo al tassello una riflessione centrale lungo il punto medio di e; unendo i due tasselli otteniamo un esagono, in quanto gli angoli che si incontrano in D ed E sono $\hat{D}$ ed $\hat{E}$ che sommano a π; inoltre è equilatero perché incolliamo una copia di a con una copia di d e $a + d = b = c$. Componiamo copie di tale esagono attraverso riflessioni centrali rispetto ai punti medie dei corrispettivi dei lati b e c, a formare una piramide in cui in ogni fila c'è un tassello in più rispetto alla fila precedente, come nella figura (a). Il bordo del settore è composto da due spezzate completamente determinate dagli angoli interni, in quanto ogni segmento è congruente a b. Sempre con riferimento alla prima figura, nel bordo di destra gli angoli sono alternativamente $\hat{C}$ e $\hat{A} + \hat{B}$, mentre a sinistra sono $\hat{A}$ e $\hat{C} + \hat{B}$. A questo punto ruotiamo la figura attorno a B di $\hat{B}$. Così facendo rimane un vuoto, il cui bordo è una spezzata composta da segmenti congruenti a b; con riferimento alla figura (b), l'angolo in C è $2\pi - \hat{A} - \hat{C} = \hat{B}$[4], gli angoli interni sul bordo sinistro sono alternativamente $2\pi - \hat{A} - \hat{B} = \hat{C}$ e $2\pi - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ e nel bordo destro $2\pi - \hat{C} - \hat{B} = \hat{A}$ e $2\pi - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Questo significa che, dopo averlo riflesso, il settore iniziale copre perfettamente il buco.
Per avere un angolo giro attorno a B occorrono n tali settori e altrettanti n per coprire i vuoti tra un settore e l'altro. Quindi è ovvio dalla costruzione che il gruppo di simmetria è C_n e che tale gruppo non contiene traslazioni.
Passando al secondo caso, la costruzione della tassellazione è la stessa. Inoltre è

[4] $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 3\pi$ e $\hat{D} + \hat{E} = \pi$, allora $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$.

evidente che ogni settore ha un asse di simmetria e che due settori opposti al vertice B condividono lo stesso asse di simmetria. Nel gruppo di simmetria si aggiungono quindi n riflessioni, i cui assi sono rette tratteggiate nella figura (d), ognuno ruotato di $\frac{2\pi}{n}$ rispetto al precedente. In altre parole il gruppo di simmetria è D_n.



(a) (b)

(c) $\Gamma(\mathcal{T}) = C_4$ (d) $\Gamma(\mathcal{T}) = D_4$

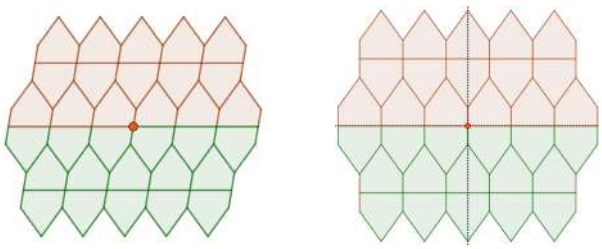
Infine, dobbiamo assicurarci che con questa costruzione tasselliamo il piano.
Come detto all'inizio, possiamo vedere i settori come una sovrapposizione di file di esagoni. Consideriamo, per ogni settore, la fila che contiene m esagoni, che in totale saranno $2m \cdot n$. Questa è topologicamente un anello e si adatta perfettamente alla fila precedente; inoltre ogni nuovo anello è sempre più grande. L'anello per $m = 1$ è l'unione di $2n$ esagoni che è topologicamente un disco chiuso. Quindi applicando il Teorema di Estensione 2.0.1 possiamo concludere. □

Teorema 2.3.9. *Esistono tassellazioni in pentagoni di Klaassen, definiti come nel teorema precedente, il cui gruppo di simmetria è D_n o C_n, con $n = 1, 2$, qualsiasi sia $\hat{B} < \pi$.*

Dimostrazione. Studiamo separatamente il caso $n = 1$ e il caso $n = 2$.

(n=2) Consideriamo un pentagono di Klaassen tale che $a = d$. Applichiamo un mezzogiro attorno al punto medio di e a formare un esagono. A questo punto

applichiamo all'esagono, e alle sue copie, le riflessioni centrali attorno ai punti medi di b e c, o ai loro corrispettivi. Reiterando questa operazione, tasselliamo il piano e tale tassellazione è fissata, oltre che da due traslazioni indipendenti, dalla rotazione di π attorno al punto rosso indicato in figura. Per quanto riguarda il caso $\Gamma(\mathcal{T}) = D_2$, basta ripercorrere la costruzione precedente con l'ipotesi aggiuntiva che $\hat{C} = \pi - \frac{\hat{B}}{2}$ e $\hat{D} = \frac{\pi}{2}$.

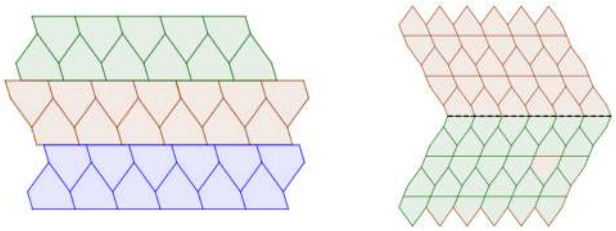


C_2 D_2

(n=1) Se il gruppo di simmetria di una tassellazione è C_1 vuol dire che non ci sono né rotazioni né assi di simmetria e possiamo creare una tassellazione anche senza traslazioni. Partiamo da un tassello di Klaassen con $a = d$, applichiamo ripetutamente al tassello e alle sue copie la riflessione centrale attorno al punto medio dei lati b e c. In questo modo formiamo una striscia che trasliamo di modo che i bordi combacino ma i vertici sul bordo no; in particolare usiamo vettori diversi per ripetere l'operazione. In questo modo abbiamo una tassellazione in pentagoni con gruppo di simmetria C_1.

Per quanto riguarda il caso $\Gamma(\mathcal{T}) = D_1$, applichiamo la stessa costruzione di prima ma trasliamo la striscia solo verso l'alto, ad esempio, e facendo in modo di che i vertici combacino. Infine, applichiamo una riflessione assiale lungo il bordo libero della prima striscia. Tale bordo è l'unico asse di simmetria della tassellazione, che quindi ha gruppo di simmetria D_1.

□



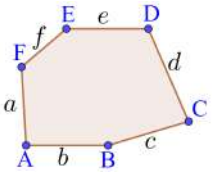
C_1 D_1

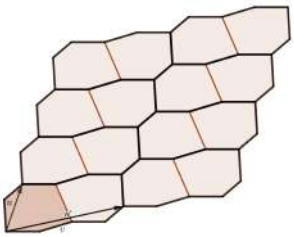
Dalle costruzioni appena viste, è ovvio che, accoppiando opportunamente i pentagoni, gli stessi risultati valgono per gli esagoni. In particolare tali esagoni hanno i lati opposti paralleli e congruenti.

Esagoni

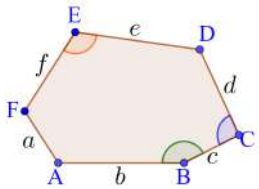
Teorema 2.3.10. *Un esagono convesso tassella il piano se e solo se appartiene ad almeno una di queste 3 classi:*

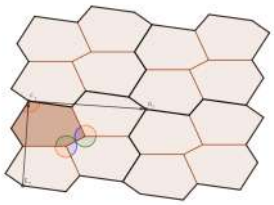
(E1) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 2\pi$, $a = d$; *i.e. l'esagono ha una coppia di lati paralleli e congruenti;*



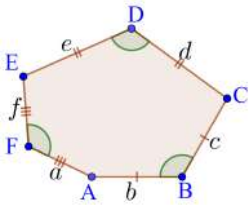


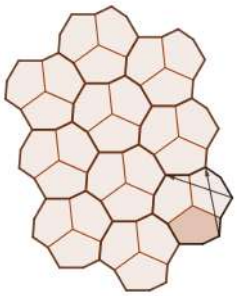
(E2) $\hat{B} + \hat{C} + \hat{E} = 2\pi$, $a = d$, $c = e$;





(E3) $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = \frac{2\pi}{3}$, $a = b$, $c = d$, $e = f$.





Dalle figure appena presentate, sfruttando il Teorema 2.0.1, possiamo concludere che tali esagoni tassellano il piano. La dimostrazione che la casistica è esaustiva è invece estremamente complessa e laboriosa. Rimandiamo a [Rei18] [pg. 72-83], per

una traccia della dimostrazione. In questa tesi ci limiteremo a dimostrare alcune osservazioni sulle necessità delle condizioni imposte nel Teorema.
Grazie al seguente lemma possiamo sempre supporre che che ogni tassellazione in esagoni convessi sia *edge-to-edge* e, soprattutto, che ogni tassellazione esagonale formi un grafo isomorfo a quello della tassellazione regolare **(6,3)**. Prima di enunciarlo, diamo un paio di definizioni per semplificare la trattazione: innanzitutto, avremo bisogno di distinguere quando un punto è inteso come vertice del poligono, e in tal caso lo chiameremo ancora **vertice**, o come vertice della tassellazione e in tal caso lo chiameremo **nodo**; inoltre, diciamo che un nodo è di prima specie se è interno al lato di un poligono, di seconda specie se invece coincide con un vertice.

Lemma 2.3.1. *In una tassellazione in esagoni convessi esiste un quadrato di lato arbitrariamente grande in cui ogni nodo interno è di seconda specie ed è circondato da tre esagoni.*

Dimostrazione. Sia a l'area dell'esagono e sia $\frac{d}{2}$ il diametro di una circonferenza che contiene l'esagono al suo interno. Sia S un quadrato di lato s, con $s \geq 3d$, e consideriamo le rette parallele ai lati del quadrato a distanza $\frac{d}{2}$; tali rette determinano i due quadrati S_1 e S_2, rispettivamente di lato $s-d$ e $s+d$.
Sia n_1 il numero di nodi di prima specie, n_2 il numero di nodi di seconda specie circondati da tre esagoni e n_3 il numero di nodi di seconda specie circondati da almeno quattro esagoni. Sia L il numero di esagoni che hanno punti interni contenuti in S e K il numero di esagoni contenuti nell'interno di S.
Per un ragionamento simile a quello fatto nella dimostrazione del Teorema 2.3.1, S_2 contiene tutti gli esagoni il cui interno interseca S e, d'altra parte, S_1 è tassellato dagli esagoni contenuti nell'interno di S; abbiamo quindi le seguenti stime:

$$aL < (s+d)^2 \qquad aK > (s-d)^2 \tag{2.11}$$

Sia $l = n_1 + n_3$. Se fosse $l < N$ per ogni quadrato, con $N \in \mathbb{N}$, il teorema è banale, infatti sarebbe sempre possibile scegliere un quadrato arbitrariamente grande di modo che i nodi di prima specie e i nodi di seconda specie che sono circondati da almeno quattro esagoni appartengano al suo bordo. Supponiamo perciò $l \geq 5$.
CLAIM: Per dimostrare il teorema è sufficiente mostrare che $\frac{n_2}{n_1+n_3} > N$, per ogni

$N \in \mathbb{N}$ e per s sufficientemente grande.

Infatti, se ciò è vero, S contiene almeno $(n_1 + n_3)N = lN$ nodi di seconda specie circondati da tre esagoni. Poichè $l \geq 5$, esiste un intero positivo f tale che $l < f^2 < 2l$; se ora dividiamo S in f^2 quadrati congruenti, poiché $f^2 > l$, almeno uno di questi quadrati contiene al suo interno solo nodi di seconda specie circondati da tre esagoni. Dimostriamo quindi che s è arbitrariamente grande, se N lo è. Sappiamo che

$$\frac{s^2}{f^2} \geq \frac{s^2}{2l^2} \tag{2.12}$$

Inoltre, gli n_2 nodi di seconda specie circondati da tre esagoni, visti come vertici degli esagoni, si contano 3 volte e non possono superare il numero totale di vertici degli esagoni il cui interno interseca S, dando la stima $3n_2 \leq 6L$. Di conseguenza:

$$lN < n_2 \leq 2L < 2\frac{(s+d)^2}{a} \tag{2.13}$$

Ricordando che $s \geq 3d$, si ha che $(s+d)^2 \leq (\frac{4}{3}s)^2 < 2s^2$ e quindi

$$s^2 > \frac{(s+d)^2}{2} > \frac{lNa}{4} \Longrightarrow \frac{s^2}{2l} > \frac{Na}{8} \tag{2.14}$$

Quindi, nell'equazione (2.12), possiamo scegliere un quadrato di area $\frac{Na}{8}$ tale che i nodi interni siano tutti di seconda specie e circondati da esagoni, come volevasi dimostrare.

Proviamo ora che per s sufficientemente grande, $\frac{n_2}{n_1+n_3} > N$, per ogni N naturale. Nei nodi di prima specie ci sono almeno due vertici di esagoni, mentre nei nodi di seconda specie circondati da k esagoni ci sono esattamente k vertici, ma il loro totale non può eccedere il numero totale di vertici degli L esagoni. Abbiamo quindi

$$2n_1 + 3n_2 + 4n_3 \leq 6L \overset{(2.11)}{<} 6\frac{(s+d)^2}{a} \tag{2.15}$$

Se invece consideriamo gli angoli interni degli esagoni, nei vertici di prima specie si forma un angolo di π, mentre in quelli di seconda specie un angolo di 2π. Quindi

$$n_1\pi + 2n_2\pi + 2n_3\pi > 4K\pi > 4\frac{(s-d)^2}{a} \tag{2.16}$$

dove 4π è la somma degli angoli interni di un esagono. Semplificando e moltiplicando (2.16) per $-\frac{3}{2}$, otteniamo $-\frac{3}{2}n_1 - 3n_2 - 3n_3 < -6\frac{(s-d)^2}{a}$, che sommata a (2.15) dà

$$\frac{n_1}{2} + n_3 < \frac{24sd}{a} \tag{2.17}$$

Combinando (2.16) e (2.17) otteniamo

$$n_2 > 2\frac{(s-d)^2}{a} - \frac{24sd}{a} = \frac{2s^2 - 28sd + d^2}{a} \tag{2.18}$$

Quindi

$$\frac{n_2}{\frac{n_1}{2} + n_3} = 2\frac{n_2}{n_1 + 2n_3} > \frac{2s^2 - 28sd + d^2}{24sd} = \frac{s}{12d} - \frac{7}{6} - \frac{d}{12s} \tag{2.19}$$

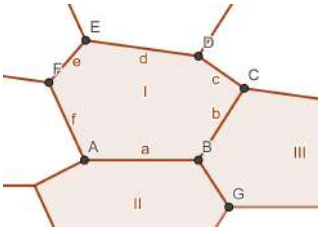
Ovviamente $\frac{n_2}{n_1+n_3} > \frac{n_2}{n_1+2n_3}$ e, dividendo per due, otteniamo quindi

$$\frac{n_2}{n_1 + n_3} > \frac{s}{24d} - \frac{7}{12} - \frac{d}{24s} \tag{2.20}$$

Essendo d un numero fissato, per s sufficientemente grande l'espressione diventa arbitrariamente grande. □

Lemma 2.3.2. *Se un esagono convesso tassella il piano, allora ha almeno una coppia di lati congruenti.*

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.3.1 possiamo supporre che la tassellazione sia *edge-to-edge* e che ogni vertice abbia valenza 3. Con riferimento alla figura seguente, possiamo supporre che gli esagoni II e III siano adiacenti lungo BG, che quindi è un lato per entrambi gli esagoni. Considerando l'esagono II questo significa che BG, essendo consecutivo ad a, è congruente a b o a f, mentre, se consideriamo l'esagono III, BG è congruente ad a o a c. Questo dimostra che almeno una tra le coppie (a, b), (a, f), (b, c) e (c, f) deve essere composta da segmenti congruenti. □



Lemma 2.3.3. *Si consideri un esagono con esattamente una coppia di lati congruenti; l'esagono tassella il piano se e solo se tali lati sono opposti e paralleli.*

Dimostrazione.($\Longrightarrow$) Se un esagono tassella il piano e ha esattamente una coppia di lati congruenti, allora ci sono due lati consecutivi, nessuno dei quali è congruente a un altro lato dell'esagono; supponiamo siano i lati b e c. Ripercorrendo il ragionamento della dimostrazione precedente uno tra a e c deve

essere congruente a uno tra b e d. L'unica possibilità è che $a = d$. In tal caso gli angoli che concorrono in C sono congruenti agli angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e la loro somma è quindi 2π; in altre parole a e d sono lati opposti paralleli e congruenti.

($\Longleftarrow$) Consideriamo un esagono in cui una coppia di lati opposti sono paralleli e congruenti. Esattamente come nell'imagine relativa a $(E1)$ nell'enunciato del teorema, ruotiamo l'esagono di π attorno al punto medio di uno dei lati non congruente a nessun altro, dopodiché trasliamo l'unione di questi due tasselli lungo due vettori, il primo che sovrappone la coppia di lati opposti e congruenti, il secondo che sovrappone uno dei due lati che non abbiamo considerato con la sua copia nel tassello ruotato. Evidentemente, in questo modo riusciamo a tassellare dischi arbitrariamente grandi del piano e quindi per il Teorema 2.0.1 possiamo concludere.

□

Lemma 2.3.4. *Se un esagono convesso tassella il piano, allora ha tre angoli la cui somma è* 2π.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che ci sia un esagono che tassella il piano ma non c'è nessuna tripletta di angoli la cui somma da 2π. Sempre per il Lemma 2.3.1, possiamo supporre che ogni vertice abbia valenza 3 e che la tassellazione sia *edge-to-edge*. Siano $\alpha_1, ..., \alpha_6$ gli angoli interni dell'esagono e supponiamo che $|\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}| \geq |\alpha_i - \frac{2\pi}{3}|$, $\forall i = 2, ..., 6$. Se $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$, tutti gli angoli sarebbero congruenti e, per il Lemma 2.3.2, esiste una coppia di lati congruenti; questo significa ricadere nella situazione descritta da $(E1)$ e quindi possiamo supporre $\alpha_1 \neq \frac{2\pi}{3}$. Per l'ipotesi fatta, non è possibile che in un nodo convergano tre angoli diversi, quindi in un nodo in cui compare α_1 i tre angoli sono $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2$ oppure $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$ [5]. Nel primo caso $2\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, che si può riscrivere come $2(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} - \alpha_2$ e questo implica che

$$\left|\alpha_2 - \frac{2\pi}{3}\right| = 2\left|(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3})\right| > \left|\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right|$$

[5] Ovviamente lo stesso ragionamento vale se sostituiamo α_2 con α_6.

ma questo è assurdo! Quindi abbiamo solo il secondo caso. Visto che non ci sono angoli interni dell'esagono congruenti a α_2, altrimenti α_1, α_2 e tale angolo sommerebbero a 2π, in ogni nodo in cui compare α_1 concorrono due angoli α_2. Questo implica che in ogni regione del piano ci siano almeno il doppio di angoli α_2 rispetto a α_1. Ma questo è assurdo, visto che per regioni del piano sufficientemente grandi, ogni angolo compare all'incirca lo stesso stesso numero di volte degli altri. □

Il resto della dimostrazione continua stilando una lista dei possibili casi che rispettano le condizioni forniti dai Lemmi appena dimostrati ed escludendo tutti gli esagoni che non appartengono a uno dei tre tipi enunciati nel Teorema 2.3.10.

2.4 Tassellazioni aperiodiche

Abbiamo trattato quasi esclusivamente il caso di tassellazioni periodiche, cioè tassellazioni nel cui gruppo di simmetria ci sono due traslazioni linearmente indipendenti. Esistono tasselli che possono tassellare sia periodicamente che in maniera non periodica, come i triangoli o i pentagoni, di cui abbiamo già parlato nella scorsa sezione. L'argomento davvero interessante è quello delle tassellazioni aperiodiche:

Definizione 2.4.1. *Un insieme di tasselli si dice* ***aperiodico*** *se ogni tassellazione che si può comporre con tali tasselli non è periodica. Una tassellazione $\mathcal{T}$ è detta* ***aperiodica*** *se il suo insieme di prototasselli è aperiodico.*

Per molto tempo, la maggior parte del mondo matematico fu convinta che non esistesse alcun insieme di tasselli in grado di tassellare il piano solo aperiodicamente. Nel 1961, il matematico cinese naturalizzato statunitense Hao Wang (1921–1995) cominciò a interessarci di un problema molto simile, cioè tassellare il piano con quadrati unitari i cui lati sono colorati, come fossero tasselli del domino, di modo che due tasselli si incontrino in lati dello stesso colore e utilizzando soltanto traslazioni. Il problema è identico a quello di trovare un insieme di tasselli che si incastrino come pezzi di un puzzle. Nell'articolo del Novembre 1965, *Games, Logic and Computers* ([Wan65]), pubblicato su *Scientific American*, Wang riuscì a dimostrare che una procedura per decidere se un dato insieme di tasselli tassella il piano esiste se e solo se ogni insieme di tasselli che tassella il piano in maniera non periodica lo fa anche

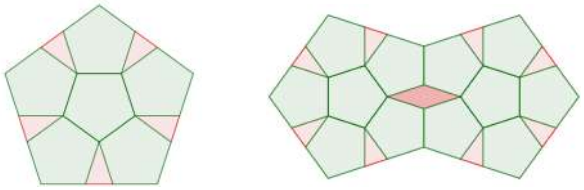
in maniera periodica. Wang congetturò che una tale procedura esiste sempre.
La congettura fu smentita dal suo studente Robert Berger (1938-), un matematico americano, che nella sua tesi di dottorato all'Università di Harvard trovò un insieme di 20.426 tasselli del domino che tassellano aperiodicamente. Successivamente ridusse questo numero a 104 e il matematico statunitense Raphael Mitchel Robinson (1911–1995) riuscì ad abbassare il numero a 24.
La scoperta più sensazionale di Robinson è un insieme di 6 tasselli che tassellano aperiodicamente il piano. Per ulteriori informazioni sulle tassellazioni di Robinson e in generale sul problema delle tassellazioni aperiodiche rimandiamo al Capitolo 10 di [GS87], che useremo anche per trattare il proseguo di questa sezione.
Infine, Roger Penrose (1931-), matematico e fisico, vincitore del Premio Nobel per la Fisica nel 2020, nel 1973 trovò un altro insieme di 6 tasselli in grado di formare una tassellazione aperiodica, ridusse quasi subito il numero a 4 e l'anno successivo riuscì ad abbassare ulteriormente il numero a 2. Ad oggi il risultato migliore di cui siamo a conoscenza è proprio quello di Penrose, ma resta aperta la questione se esista un tassello che da solo tassella il piano esclusivamente in maniera aperiodica.

Le tassellazioni di Penrose (1973-1974)

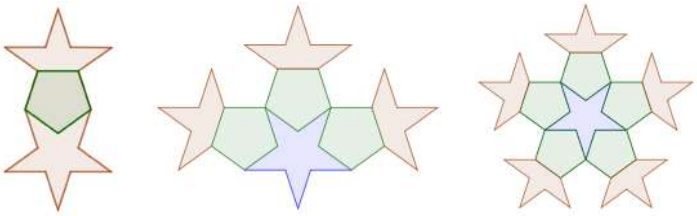
Il punto di partenza di Penrose fu osservare che è possibile suddividere un pentagono regolare in cinque pentagoni regolari lasciando spazio a cinque triangoli isosceli, come si vede nella figura (a); notiamo che la configurazione è familiare perché si ottiene anche nello sviluppo piano del dodecaedro regolare. Ripetiamo la suddivisione, come parzialmente mostrato nella figura (b), e notiamo che viene a formarsi uno spazio a forma di *diamante*[6], composto da due dei triangoli precedenti. Ripetendo l'operazione una terza volta, al *diamante* "crescono delle spine", ma possiamo inserire un pentagono all'interno del *diamante spinato*; quindi le uniche due nuove figure sono un *pentacolo*, o *stella a 5 punte*, e una a forma di *barchetta di carta* o *cappello da muratore*, come mostrato in (c). Se ripetessimo l'operazione una quarta volta, anche alla *barca* e al *pentacolo* "crescono delle spine" e, di nuovo, inserendo

[6] I termini che useremo sono tratti dall'articolo di Penrose *"Pentaplexity a class of non-periodic tilings of the plane"* ([Pen79]).

dei pentagoni, le uniche figure sono pentagoni, *barche* e *pentacoli*, come mostrato nelle figure (d) e (e). Se procedessimo in questo modo, ci accorgeremmo che non appare nessuna nuova forma e, soprattutto, che riusciamo a tassellare l'intero piano.

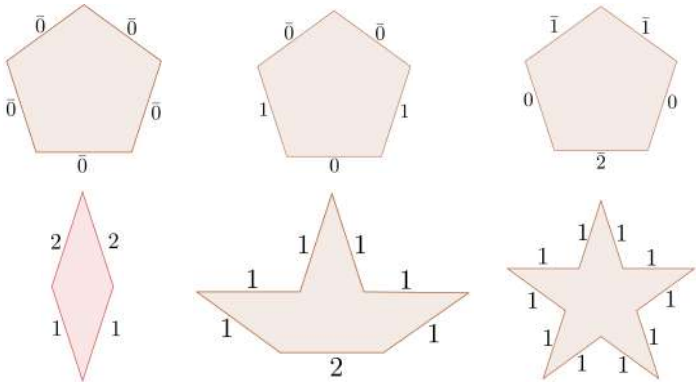


(a) (b)



(c) (d) (e)

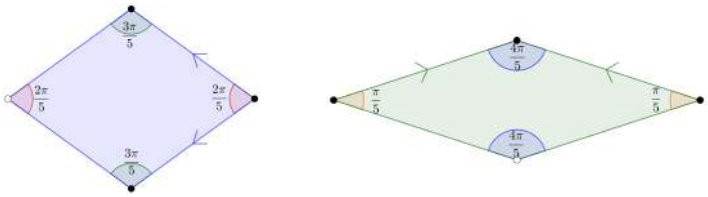
In realtà, non tutte le tassellazioni create con questa procedura sono corrette, in quanto la suddivisione del diamante, della barca e del pentacolo spinati porta ad un'ambiguità in cui una sola delle due scelte è corretta. Per evitare queste ambiguità, possiamo considerare i sei tasselli della figura seguente, in cui i lati sono contrassegnati da n o $\bar{n}$, con $n = 0, 1, 2$; la regola di incastro è che un lato n può combaciare solo con un lato $\bar{n}$. Tale insieme di tasselli viene solitamente chiamato **P1**. Partendo da questi sei tasselli, tagliando e incollando alcuni di questi, Penrose ridusse il numero prima a cinque e poi a quattro.



P1

Come già osservato nell'introduzione, la scoperta più importante di Penrose in questo ambito fu trovare una coppia di tasselli in grado di formare una tassellazione

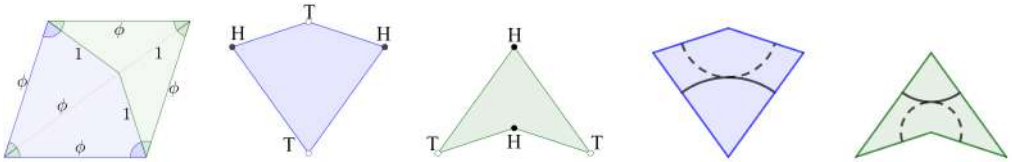
aperiodica. In realtà, ne trovò ben due e entrambe generano tassellazioni *edge-to-edge*; le presenteremo entrambe ma ci concentreremo solo sulla seconda, in quanto ha attratto molta più attenzione e per questo sono disponibili molti più risultati.
La prima coppia, chiamata solitamente **P3**, consiste di due rombi con i lati della stessa misura, il primo con angoli di $\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$, il secondo di $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{4\pi}{5}$. Con riferimento alla figura sottostante, i tasselli si incastrano in modo che vertici delle stesso colore si sovrappongono e, se i vertici di due lati sovrapposti sono entrambi neri, deve essere rispettato il verso dalla freccia.



P3

La seconda coppia di tasselli, denominata **P2**, è composta da un **aquilone** (*kite*) e da un **dardo** (*dart*). I due tasselli si ottengono da un rombo, i cui angoli interni sono $\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$, dividendo la diagonale maggiore secondo la sezione aurea[7] e congiungendo i vertici ottusi con tale punto, come mostrato (a). Ovviamente il rombo tassella periodicamente, quindi dobbiamo imporre delle restrizioni su come possiamo accostare i tasselli di modo che non si ricostruisca il rombo originale; proponiamo due metodi equivalenti ma seguiremo per comodità solo il primo. O coloriamo i vertici dei tasselli di due colori come in figura (b); gli unici accostamenti possibili sono quelli che sovrappongono vertici dello stesso colore. Altrimenti, sui tasselli disegniamo degli archi di cerchio che dividono l'asse di simmetria e i lati secondo la sezione aurea, come nella figura (c); la regola di accostamento è che tasselli adiacenti devono accostare archi dello stesso tipo. Entrambi i metodi sono equivalenti a indentare i tasselli, di modo che si incastrino come pezzi di un puzzle. In questo senso la tassellazione è aperiodica, in quanto i tasselli indentati non tassellano il piano periodicamente.

[7] La *sezione aurea* ϕ è la soluzione positiva dell'equazione $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ e vale $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$



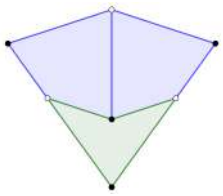
aquilone **dardo**

(a) (b) (c)

P2

Quando diremo tassellazioni di Penrose nel seguito ci riferiremo esclusivamente a quelle ottenute con questi tasselli. È interessante notare che con operazioni di "taglio e cucito", a partire da ogni insieme di tasselli si possono ottenere gli altri. Un altro risultato interessante, che non proveremo, è che utilizzando la seconda regola di accostamento ci sono al più due curve che non si chiudono e tutte quelle che si chiudono hanno gruppo di simmetria D_5.

Cominciamo ad analizzare i risultati più importanti riguardo alle tassellazioni di Penrose; definiamo **Asso** (*Ace*) il seguente modo di accostare tasselli attorno ad un punto, composto da due aquiloni e un dardo:

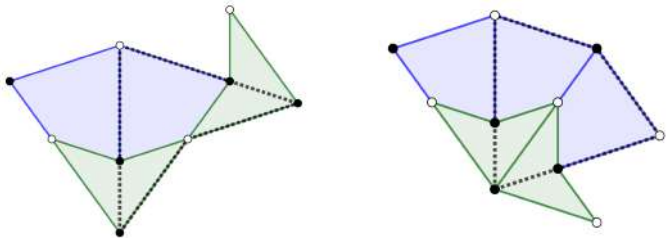


Asso

Proposizione 2.4.1. *Un qualsiasi punto in una qualsiasi tassellazione di Penrose giace su un asso.*

Dimostrazione. Sia P un punto del piano. Supponiamo che P appartenga a un aquilone, notiamo che non possiamo accostare in entrambi i lati corti un aquilone, quindi almeno in uno dei lati corti è accostato un dardo. A questo punto resta un vuoto tra un lato lungo e un lato corto di vertice nero, quindi è possibile accostare soltanto un aquilone. Viceversa, supponiamo che P appartenga a un dardo, è immediato notare che non possiamo accostare altri dardi lungo i lati corti, altrimenti i tasselli si sovrappongono, quindi necessariamente dobbiamo accostare due aquiloni formando così un asso. □

Questa proposizione ci permette di parlare della tecnica fondamentale per la creazione di tassellazioni di questo tipo: l'**inflazione** (*inflation*). Partendo da un asso, consideriamo il lato corto libero di uno dei due aquiloni; abbiamo solo due modi per espandere la tassellazione: aggiungere un dardo o aggiungere un aquilone. Nel primo caso, tagliando i due dardi lungo l'asse di simmetria e ricomponendo un aquilone con due mezzi dardi otteniamo un dardo più grande (il rapporto è 1:ϕ), come in figura (a). Nel secondo caso, aggiungiamo anche un dardo al lato corto libero dell'ultimo aquilone aggiunto; di nuovo, tagliando a metà i dardi e componendo due aquiloni con due metà dardi otteniamo un aquilone più grande, sempre nello stesso rapporto, come in figura (b).



(a) (b)

Questo principio è alla base dell'inflazione che consiste nel partire da una tassellazione e ripetere queste operazioni di "taglio e cucito"; poiché almeno una delle due situazioni è presente in ogni tassello, si ottiene una nuova tassellazione con tasselli più grandi, che eventualmente si possono ridurre alle dimensioni originali tramite una similitudine. Come si nota immediatamente dalla figura, l'inflazione scambia i colori dei vertici tra loro.
Grazie all'inflazione, ripetendola all'infinito, è facile giustificare il fatto che i due tasselli effettivamente tassellino il piano; inoltre, possiamo dimostrare la non periodicità delle tassellazioni di Penrose.

Teorema 2.4.1. *Le tassellazioni di Penrose sono aperiodiche.*

Dimostrazione. Supponiamo che ci sia una regione fondamentale che tassella il piano per traslazione. Anche la tassellazione che si ottiene per inflazione deve avere la stessa regione perché si ottiene da quella originale semplicemente tagliando e incollando. Ripetendo l'inflazione un numero sufficientemente alto di volte, i tasselli diventano più grandi della regione fondamentale, ma questo è assurdo. □

Dimostriamo ora che esistono infinite tassellazioni di Penrose diverse tra loro. Per farlo, introduciamo le sequenze di indici che permettono di trasformare proprietà geometriche e combinatorie in forma numerica, così da poter utilizzare tecniche algebriche e della teoria dei numeri.

Teorema 2.4.2. *Esiste un'infinità non numerabile di tassellazioni di Penrose distinte.*

Dimostrazione. Data una tassellazione di Penrose $\mathcal{T}$, dividiamo ogni tassello lungo il suo asse di simmetria; in questo modo abbiamo una tassellazioni che utilizza soltanto due triangoli, in particolare sono uno più grande dell'altro. Consideriamo un punto P del piano e iniziamo a definire la sua **sequenza di indici** $i(\mathcal{F}, P)$ ponendo $x_0 = 0$ se P appartiene al triangolo più grande, $x_0 = 1$ se appartiene a quello più piccolo. Applichiamo l'inflazione, dividiamo nuovamente i tasselli in triangoli e definiamo x_1. Ripetendo questo processo infinite volte otteniamo $i(\mathcal{F}, P)$. Notiamo che il triangolo piccolo e il triangolo grande della generazione precedente formano il nuovo triangolo grande, mentre il triangolo grande diventa il nuovo triangolo piccolo; in particolare questo significa che in tali sequenze non possono esserci due termini consecutivi uguali a uno.

Lemma 2.4.1. *Qualsiasi sequenza di 0 e 1, in cui non compare mai la cifra 1 due volte consecutive, è la sequenza di indici $i(\mathcal{F}, P)$ per un qualche punto P in una qualche tassellazione di Penrose $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dall'osservare che la sequenza di indici dà esplicitamente una costruzione della tassellazione in triangoli, nel senso che seguendo le istruzioni otteniamo una sequenza di tasselli uno dentro l'altro che copre un piano, o un semipiano o un settore di angolo $\frac{\pi}{5}$. In ogni caso è facile risalire alla tassellazione in dardi e aquiloni dalla sequenza di tasselli triangolari e negli ultimi due casi basta riflettere il semipiano o il settore lungo i bordi. □

In particolare si ha:

Corollario 2.4.1. *Sia $\mathcal{F}$ una tassellazione di Penrose. Se $\varphi \in \Gamma(\mathcal{F})$, $i(\mathcal{F}, P) = i(\mathcal{F}, \varphi P)$. Viceversa, se $i(\mathcal{F}, P) = i(\mathcal{F}', P')$, allora $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ e P' appartiene allo stesso triangolo di P o all'immagine di tale triangolo tramite una simmetria di $\mathcal{F}$.*

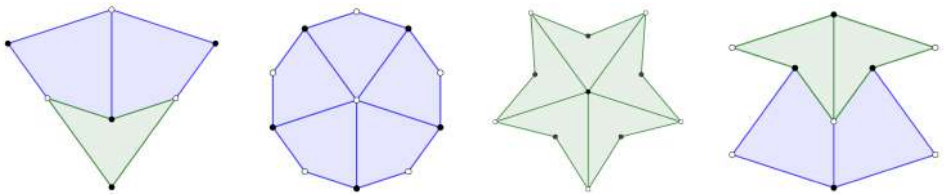
Infine per come è definita la sequenza di indici si ha:

Lemma 2.4.2. *Le sequenze di indici $i(\mathcal{F}, P)$ e $i(\mathcal{F}, P')$ di due punti qualsiasi P e P' sono definitivamente uguali, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale per cui dal N-esimo termine in poi le due sequenze coincidono. Viceversa, se due sequenze di indici sono definitivamente uguali, queste corrispondono a punti di una stessa tassellazione.*

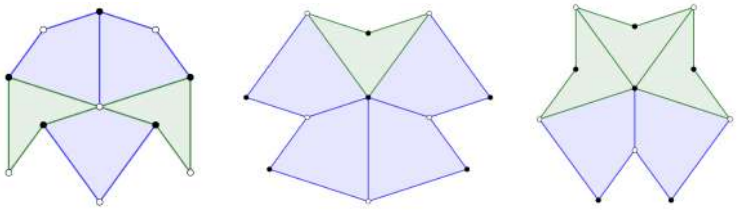
Abbiamo quindi mostrato che le tassellazioni di Penrose sono in corrispondenza biunivoca con le classi di sequenze di indici, dove la relazione di equivalenza è essere definitivamente uguali; ovviamente tali classi sono non numerabili. Abbiamo quindi dimostrato il teorema. □

Indaghiamo ora alcune questioni locali riguardo alle tassellazioni di Penrose.

Proposizione 2.4.2. *Esistono 7 modi per circondare completamente un vertice con aquiloni e dardi.*



Asso **Sole** **Stella** **Diavolo**



Jack **Regina** **Re**

Dimostrazione. Con riferimento alla terminologia introdotta, applichiamo una ricerca esaustiva analizzando i sei tipi di vertici presenti negli aquiloni e nei dardi. I ragionamenti sono da intendersi sempre in ordine ciclico attorno al vertice iniziale.

1. Consideriamo il vertice bianco di un aquilone con angolo di $\frac{4\pi}{5}$.
   Se accostiamo un aquilone, resta libero un angolo di $\frac{2\pi}{5}$ tra due lati corti e siamo quindi costretti a inserire due dardi, a formare il **Diavolo** (*Deuce*).
   Se invece accostiamo un dardo, abbiamo due alternative: ne accostiamo un

altro oppure un aquilone. Nel primo caso, poiché abbiamo già sottolineato che non si possono accostare due dardi lungo i lati corti, siamo costretti ad usare un aquilone ritrovando di nuovo il Diavolo. Nel secondo caso, abbiamo di nuovo la possibilità di inserire o un dardo o un aquilone: inserendo un dardo, siamo costretti a accostare un aquilone in un angolo di $\frac{2\pi}{5}$ tra due lati corti e questo è impossibile; altrimenti, inserendo un aquilone, rimane un angolo di $\frac{\pi}{5}$ di vertice bianco tra un lato lungo e uno corto, in modo che possiamo inserire soltanto un dardo e formare il **Jack**.

2. Consideriamo il vertice bianco di angolo $\frac{2\pi}{5}$ di un aquilone. Inserendo un aquilone, siamo di fronte a un bivio: se inseriamo un dardo, siamo costretti ad accostare un aquilone e poi un dardo, ritrovando il Jack; inserendo invece un aquilone abbiamo altre due vie: inserendo un dardo saremmo costretti a usare un aquilone e questo porta i tasselli a sovrapporsi; altrimenti, inseriamo un altro aquilone e resta un angolo di $\frac{2\pi}{5}$ di vertice bianco tra due lati lunghi, in cui possiamo soltanto inserire un aquilone, formando il **Sole** (*Sun*).
   Se invece accostiamo un dardo, questo implica inserire anche un aquilone. Ora siamo di nuovo di fronte a un bivio: se inseriamo un dardo, accostare un altro dardo porta ad avere uno spazio troppo piccolo, mentre inserire un aquilone riporta alla figura del Jack. Se invece inseriamo un aquilone, notiamo subito che i tasselli si sovrappongono.

3. Consideriamo un vertice nero dell'aquilone. In questo caso abbiamo anche la distinzione tra il lato lungo e il lato corto dell'aquilone.

   - Se accostiamo un aquilone lungo il lato lungo abbiamo ancora la possibilità di scegliere: possiamo inserire un dardo e formare l'**Asso**; oppure inseriamo un aquilone e abbiamo un altro bivio: inserire un altro aquilone porta ad avere un buco di $\frac{2\pi}{5}$ di vertice nero su due lati corti che non può essere riempito, mentre inserire un dardo porta ad avere un angolo di $\frac{2\pi}{5}$ di vertice nero tra due lati diversi e dobbiamo quindi inserire un aquilone, formando la **Regina** (*Queen*).

- Se accostiamo un'aquilone sul lato corto, possiamo inserire un altro aquilone, ma questo rappresenta la stessa situazione che porta alla Regina, oppure inserire un dardo. In tal caso, se ora inseriamo un altro dardo resta un buco di $\frac{2\pi}{5}$ di vertice nero tra due lati lunghi che forza l'inserimento di un dardo, formando il **Re** (*King*); se invece accostiamo un aquilone resta lo spazio solo per inserire un aquilone riportandoci alla Regina.
- Se accostiamo un dardo lungo il lato lungo, abbiamo il classico bivio: se accostiamo un aquilone non c'è modo di inserire un dardo, quindi accostiamo un altro aquilone e siamo costretti a inserirne un altro, ritrovando la Regina. Se invece accostiamo un dardo, possiamo accostare un aquilone, ma lasciamo un vuoto di $\frac{2\pi}{5}$ di vertice nero tra due lati corti che, come abbiamo, visto non può essere riempito; altrimenti possiamo aggiungere un dardo che forza l'inserimento di un aquilone e riforma il Re.
- Se accostiamo un dardo lungo il lato corto, questo forza immediatamente il formarsi dell'Asso.

4. Consideriamo il vertice nero di angolo $\frac{2\pi}{5}$ di un dardo. Se inseriamo un aquilone ci troviamo nella situazione già trattata nel caso del vertice nero dell'aquilone accostando per primo un dardo, che porta al Re o alla Regina.
   Se invece accostiamo un dardo, accostare un aquilone riporta nella situazione precedente, quindi inseriamo un terzo dardo. A questo punto inserire un aquilone obbliga l'inserimento di un secondo aquilone e si forma il Re; se invece inseriamo il quarto dardo resta lo spazio solo per un quinto dardo, a formare la **Stella** (*Star*).

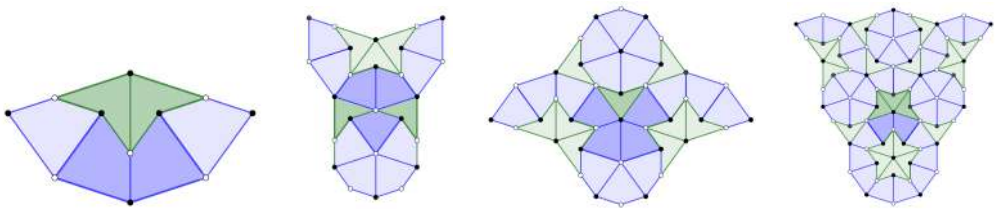
5. Consideriamo il vertice nero di angolo $\frac{6\pi}{5}$ di una dardo. Siamo immediatamente costretti a inserire un aquilone e resta uno spazio di apertura $\frac{2\pi}{5}$ di vertice nero tra due lati diversi, quindi siamo costretti a inserire un aquilone e ritroviamo l'Asso.

6. Infine consideriamo uno dei due vertici bianchi di un dardo.
   Se partiamo dal lato corto, siamo costretti a inserire un aquilone. Se inseriamo

un altro aquilone ci ritroviamo nella situazione del Diavolo. Se invece inseriamo un dardo possiamo scegliere: se accostiamo un aquilone ritorniamo al Jack, se invece accostiamo un dardo, saremmo costretti a mettere un aquilone e si vede immediatamente che questo porta i tasselli a sovrapporsi.
Se invece accostiamo un aquilone al lato lungo ci troviamo nella situazione già trattata per gli aquiloni nel vertice bianco di $\frac{2\pi}{5}$, che porta al Sole o al Jack. Infine, se accostiamo un dardo al lato lungo siamo costretti a inserire un aquilone e ci ritroviamo nuovamente nella situazione del Diavolo.

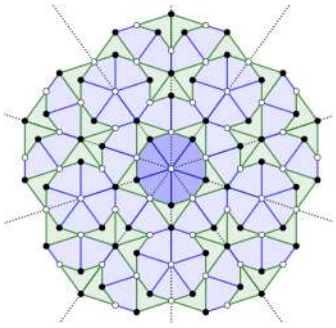
□

Analizziamo ora alcune caratteristiche di queste figure, in particolare se tali configurazioni forzano il posizionamento di altri tasselli. L'**Asso** non forza nulla attorno a sé, ma, come vedremo più avanti, è una configurazione fondamentale per le questioni locali legate alle tassellazioni di Penrose.
Il **Diavolo**, il **Jack**, la **Regina** e il **Re** forzano alcuni tasselli a loro adiacenti come mostrato sotto.

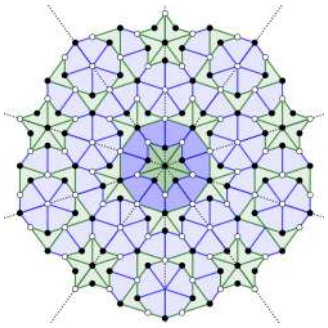


Diavolo **Jack** **Regina** **Re**

Il **Sole** e la **Stella** sono due tasselli intimamente legati, come si può intuire dal fatto che siano composti rispettivamente da cinque aquiloni e cinque dardi. Il **Sole** non forza nessun tassello attorno a sé, mentre la **Stella** forza i 11 aquiloni, mostrati più scuri nella figura sottostante. Se allarghiamo la tassellazione a partire dal **Sole** o dalla **Stella** mantenendo la simmetria pentagonale otteniamo le uniche due tassellazioni di Penrose con gruppo di simmetria D_5, mostrate sotto con gli assi di simmetria tratteggiati; è possibile mostrare che tali tassellazioni sono univocamente determinate una volta dato il seme centrale e dichiarato il gruppo di simmetria, cioè in nessun momento della costruzione ci sarà ambiguità sull'inserimento di un tassello. In particolare applicando l'inflazione a una otteniamo l'altra e viceversa.



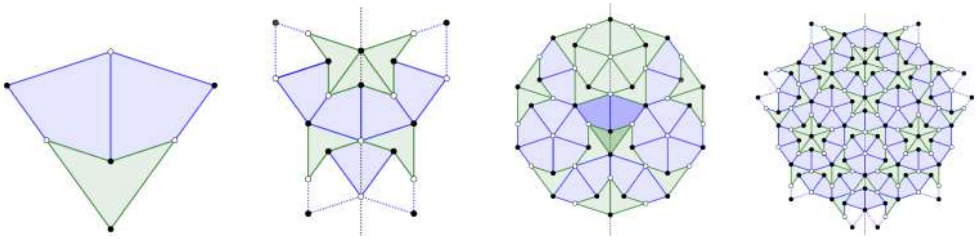
Sole



Stella

Infine, Penrose si accorse che alcune figure, come **Jack**, **Donna** e **Re** forzano tasselli anche non immediatamente adiacenti ad essi. Tali regioni si chiamano *imperi*, possono essere anche molto lontani dalla figura iniziale e ancora non si conoscono completamente.

Come ultimo argomento analizziamo il *cartwheel tiling*. Consideriamo un **Asso** e denotiamolo con $\mathcal{C}_0$; definiamo $\mathcal{C}_1$ l'inflazione di $\mathcal{C}_0$, composta con una similitudine per riportare i tasselli alle dimensioni originali. Ripetiamo la stessa operazione per ogni $n \in \mathbb{N}$. Nella figura mostriamo i primi 4 passaggi di questa operazione. Notiamo che il gruppo di simmetria di ogni $\mathcal{C}_n$ è composto esclusivamente da una riflessione, ma è opportuno aggiungere alcuni tasselli nei $\mathcal{C}_{2n+1}$, tratteggiati in figura, di modo che i $\mathcal{C}_{2n}$ abbiamo il bordo composto da un poligono con gruppo di simmetria D_5. I C_{2n} pari sono definiti *cartwheel*, in particolare C_{2n} è il *cartwheel* di ordine n.



$\mathcal{C}_0$ $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

Si nota facilmente che $\mathcal{C}_{2n}$ contiene il suo predecessore $\mathcal{C}_{2(n-1)}$ e in particolare sono concentrici. Questo significa che per il Teorema di Estensione esiste una tassellazione che contiene una copia di ogni $\mathcal{C}_{2n}$, $n \geq 0$, tutti centrati in un punto del piano, poiché di volta in volta estendiamo la composizione precedente. Tale tassellazione è detta ***cartwheel tiling***; introdurre tale tassellazione ci serve per mostrare i risultati più sorprendenti riguardanti le tassellazioni di Penrose.

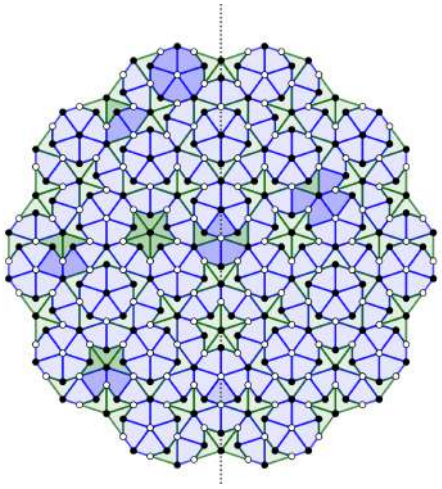
Proposizione 2.4.3. *In ogni tassellazione di Penrose $\mathcal{T}$, qualsiasi tassello T appartiene a $\mathcal{C}_{2n}$, per ogni n.*

Dimostrazione. Nella Proposizione 2.4.1 abbiamo già mostrato che qualsiasi punto, e quindi il tassello a cui appartiene, giacciono all'interno di un **Asso**, cioè $\mathcal{C}_0$.
Sia $n > 0$ e P un punto che appartiene al tassello T, consideriamo $\mathcal{T}^{-2n}$ la tassellazione che si ottiene da $\mathcal{T}$ applicando l'inverso dell'inflazione $2n$ volte, composta con una similitudine che riporta i tasselli alle dimensioni originali. Necessariamente P appartiene a un asso di $\mathcal{T}^{-2n}$; se applichiamo $2n$ volte l'inflazione a $\mathcal{T}^{-2n}$ ritorniamo a $\mathcal{T}$ e l'**Asso** che contiene P è diventato $\mathcal{C}_{2n}$. Quindi P e T appartengono a $\mathcal{C}_{2n}$, per ogni n. □

Corollario 2.4.2. *Ogni tassellazione di Penrose contiene infinite copie di ogni $\mathcal{C}_{2n}$.*

Corollario 2.4.3. *Ognuna delle sette figure che si ottengono circondando un vertice appare necessariamente, e infinite volte, in ogni tassellazione di Penrose.*

Dimostrazione. Notiamo che $\mathcal{C}_4$ contiene tutte e sette le figure[8], come si vede nella figura sottostante dove sono state evidenziate con un riempimento più scuro, e per il Corollario 2.4.2 possiamo concludere. □



$\mathcal{C}_4$

Per rendere più chiara la prossima proposizione diamo una definizione.

[8] In realtà già $\mathcal{C}_2$ ne contiene sei, manca solo la Stella.

Definizione 2.4.2. *Un insieme di tasselli la cui unione è topologicamente un disco chiuso si dice* ***pezza*** *(****patch*** *in inglese).*

Proposizione 2.4.4. *Qualsiasi pezza di una tassellazione di Penrose è congruente a infinite pezze in ogni tassellazione di Penrose.*

Dimostrazione. Consideriamo una pezza $\mathcal{A}$. Come prima, consideriamo $\mathcal{T}^n$ la tassellazione ottenuta da $\mathcal{T}$ ottenuta applicando n volte l'inflazione. Scegliendo n sufficientemente grande possiamo supporre che la minima distanza tra due vertici di $\mathcal{T}^n$ superi il diametro di $\mathcal{A}$, definito come la massima distanza tra due punti di $\mathcal{A}$. Chiaramente questo significa che $\mathcal{A}$ contiene al più un vertice di $\mathcal{T}^n$ e, estendendo opportunamente $\mathcal{A}$, possiamo supporre che contenga *esattamente* un vertice V di $\mathcal{T}^n$. Sia $\mathcal{F}(V)$ la figura composta da tasselli di $\mathcal{T}^n$ che circonda V; notiamo che l'unione dei tasselli di $\mathcal{F}(V)$ contiene $\mathcal{A}$.
Consideriamo una qualsiasi altra tassellazione di Penrose $\mathcal{T}_1$ e consideriamo $\mathcal{T}_1^n$. Sia V_1 un vertice di $\mathcal{T}_1^n$ tale che $\mathcal{F}(V_1) = \mathcal{F}(V)$. Applicando l'inverso dell'inflazione a $\mathcal{F}(V)$ e $\mathcal{F}(V_1)$ n volte otteniamo la stessa pezza, di conseguenza $\mathcal{T}_1$ contiene una pezza congruente ad $\mathcal{A}$. Inoltre, per il Corollario 2.4.3, possiamo scegliere V_1 in infiniti modi ed in infinite tassellazioni; in altre parole, abbiamo dimostrato la tesi. □

Gli ultimi risultati mostrano che, nonostante due tassellazioni di Penrose differiscano l'una dall'altra in infiniti modi, non è possibile stabilire in quale tassellazione ci troviamo osservando soltanto una porzione finita della stessa. In particolare abbiamo un ultimo risultato strabiliante, che mostriamo in forma narrativa per poterlo sfruttare anche in una trattazione didattica dell'argomento.
Supponiamo di vivere in un piano tassellato da Penrose e chiamiamo *città* una pezza di diametro[9] d in cui viviamo. All'improvviso veniamo teletrasportati in un punto qualsiasi di un qualsiasi piano tassellato da Penrose (anche lo stesso da cui proveniamo) e ci chiediamo quanto dobbiamo camminare in una direzione per ritornare in un posto simile a casa nostra. Il matematico inglese John Horton Conway (1937–2020) diede una risposta che ha dell'incredibile: non serve allontanarsi più di

[9]Con **diametro** intendiamo la massima distanza tra due punti della pezza.

$2d$ per trovarne una copia esatta di casa nostra a partire da un qualsiasi punto di una qualsiasi tassellazione di Penrose.

Se pensiamo a una situazione simile il risultato è ancora più sorprendente. Consideriamo π e scegliamo una sequenza di n numeri: sicuramente la ritroveremo tale e quale in un altro punto, ma la distanza sarà molto più grande di $2n$ e soprattutto crescerà esponenzialmente con il crescere di n.

Capitolo 3

Tassellazioni della sfera e di superfici

In questo terzo capitolo, cercheremo di estendere la nozione di tassellazione a superfici diverse dal piano. Ci concentreremo sopratutto sull'analogo delle tassellazioni regolari, che definiremo a breve, e mostreremo che in ogni superficie esiste un numero al più finito di famiglie di tassellazioni regolari.

3.1 Richiami sulle superfici

In questa prima sezione richiameremo alcune definizioni e alcuni tra i principali risultati sulle superfici, che ci serviranno durante il resto della trattazione; non essendo il fulcro della tesi, eviteremo di dilungarci sulle dimostrazioni.

Definizione 3.1.1. *Una* ***superficie*** $\mathcal{M}$ *è uno spazio topologico di Hausdorff*[1] *tale che ogni punto ha un intorno omeomorfo o a un disco aperto* $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ *o a* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1,\ y \geq 0\}$. *Diciamo* ***bordo*** *di* $\mathcal{M}$ *l'insieme* $\partial\mathcal{M}$ *dei punti che possiedono intorni omeomorfi al secondo tipo.*

In questa tesi ci limiteremo a considerare superfici compatte e connesse, spesso senza ripetere questa ipotesi.

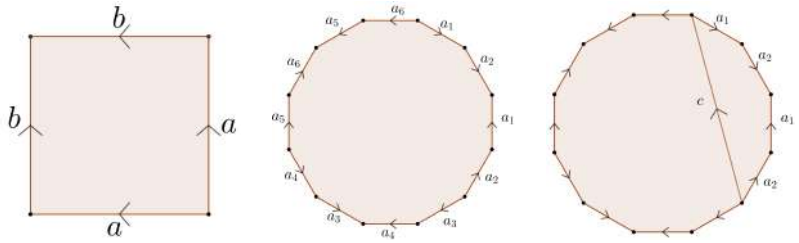
[1] Uno spazio topologico di dice di Hausdorff se comunque scelti due punti distinti x, x' esistono un intorno U di x e un intorno U' di x' tali che $U \cap U' = \varnothing$. Questa condizione è automatica se $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.1.2. *Il* ***genere*** *di una superficie $\mathcal{M}$ è il massimo numero di tagli lungo curve semplici chiuse digiunte che possiamo applicare ad $\mathcal{M}$ senza disconnetterla.*

Definiamo ora delle famiglie di superfici che utilizzeremo nel resto del capitolo. Sia V_g la superficie che si ottiene da una sfera[2] rimuovendo $2g$ dischi e, rispettando l'orientamento, incollando g manici sul bordo delle circonferenze individuate, dopo averle suddivise a coppie. Tali superfici sono senza bordo, compatte, connesse, orientabili, di genere g e omeomorfe a $g-$tori, cioè ciambelle con g buchi.

sfera V_0 **toro** V_1 V_2 V_3

Ricordiamo che un toro può essere visto come un quadrato i cui lati sono identificati senza torsioni e possiamo estendere questa procedura per costruire le superfici V_g: se $g = 0$, V_g è la sfera e si ottiene da un quadrato identificando i lati come in figura (a); se $g > 0$, consideriamo un $4g$-agono e identifichiamo i lati come in figura (b): considerando un quartetto di lati (a_i, a_j, a_i, a_j) tagliato da un lato aggiunto c, otteniamo un toro a cui poi dovremmo incollare il resto della superficie lungo la circonferenza corrispondente a c, come in figura (c). Procedendo per induzione ci accorgiamo che stiamo costruendo esattamente le stesse superfici di prima e ogni tale superficie si può costruire in questo modo. Grazie a questo metodo ci sarà molto più semplice parlare di tassellazioni.



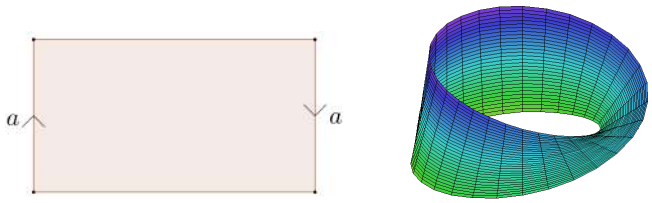
(a) (b) (c)

A partire da una superficie V_g, è possibile definire la famiglia di superfici $V_{g,k}$ che si costruisce rimuovendo k dischi disgiunti dalla superficie V_g. Queste sono superfici

[2]In questa tesi, quando scriviamo sfera intendiamo la superficie sferica.

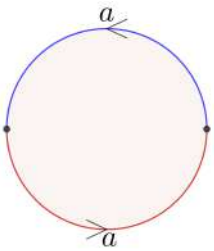
compatte, connesse, orientabili, di genere g e il cui bordo è omeomorfo a k circonferenze disgiunte.
Se volessimo rappresentare tali superfici attraverso dei poligoni con i lati identificati, dovremmo considerare un $(4g+k)$-agono in cui $4g$ lati sono etichettati come prima, mentre k lati non sono etichettati, cioè non sono identificati a nessun altro lato e formano il bordo della superficie.

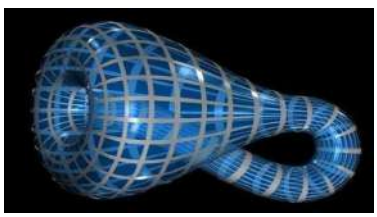
Ricordiamo che un nastro di Möbius è la superficie che si ottiene da un rettangolo identificando una coppia di lati opposti invertendo l'ordine. Il nastro di Möbius è una superficie compatta, connessa il cui bordo è omeomorfo a una circonferenza. Inoltre ha genere 1, in quanto tagliandolo lungo la curva "centrale" otteniamo nuovamente un nastro di Möbius "lungo" il doppio.



Definizione 3.1.3. *Una superficie $\mathcal{M}$ è* ***non orientabile*** *se contiene nastri di Möbius. Viceversa, se $\mathcal{M}$ non contiene nastri di Möbius è* ***orientabile****.*

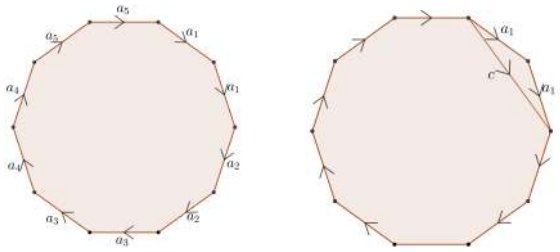
Introduciamo la famiglia di superfici U_g, che si ottiene da una sfera a cui sono stati rimossi g dischi disgiunti e sul bordo di ognuno di essi incolliamo un nastro di Möbius. Tali superfici sono senza bordo, compatte, connesse, non orientabili (in quanto contengono g nastri di Möbius) e di genere g. Gli esempi più noti di questo tipo di superfici sono il piano proiettivo per $g = 1$, che si può rappresentare anche come una sfera modulo l'identificazione dei punti antipodali, e la bottiglia di Klein per $g = 2$.





Piano proiettivo **Bottiglia di Klein**

Come prima, è possibile descrivere queste superfici attraverso poligoni con i lati identificati. In questo caso basta considerare $2g$-agoni in cui coppie di lati consecutivi vengono identificati come in figura. Per convincersene basta applicare lo stesso ragionamento di prima a coppie di lati (a_i, a_i) tagliati da un lato c che diventerà il cerchio su cui si incollano le superfici.



Inoltre è possibile, anche in questo caso, partire da una superficie U_g e, togliendo k dischi, ottenere $U_{g,k}$, una superficie non orientabile, compatta, connessa, di genere g il cui bordo è omeomorfo a k circonferenze disgiunte. La rappresentazione di tali superfici si ottiene da quella del rispettivo U_g aggiungendo opportunamente k lati che non devono essere identificati.

Definizione 3.1.4. *Una **tassellazione** di una superficie $\mathcal{M}$ è una collezione $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i\in I}$, con I numerabile, tale che:*

1. *ogni T_i è un sottoinsieme chiuso di M che può essere o un punto, o omeomorfo a un segmento chiuso, o omeomorfo a un disco chiuso; chiameremo rispettivamente tali elementi **vertici**, **spigoli** e **facce**;*

2. *$\bigcup_{i\in I} T_i = \mathcal{M}$;*

3. *è chiusa per l'intersezione, cioè $T_i \cap T_j$ è ancora un elemento di $\mathcal{T}$.*

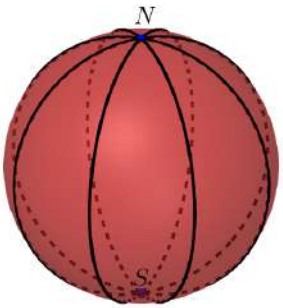
Definizione 3.1.5. *Una **cellularizzazione** di una superficie $\mathcal{M}$ è una collezione $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i\in I}$, con I numerabile, tale che:*

1. *ogni T_i è un sottoinsieme chiuso di M che o è un punto, oppure il suo interno è omeomorfo a un segmento aperto o a un disco aperto. Useremo la stessa notazione in vertici, spigoli e facce delle tassellazioni;*

2. *$\bigcup_{i\in I} T_i = \mathcal{M}$;*

3. dati $T_i, T_j \in \mathcal{T}$, $T_i \cap T_j$ è unione di elementi di $\mathcal{T}$.

Ogni tassellazione è una cellularizzazione, ma non è vero il viceversa; ad esempio suddividere la sfera con *n meridiani* è una cellularizzazione, ma non una tassellazione perché due facce non adiacenti si intersecano nei due poli.



Definizione 3.1.6. *La **caratteristica di Eulero** di una tassellazione o di una cellularizzazione $\mathcal{T}$ è $\chi(\mathcal{T}) = V - S + F$, dove V è il numero di vertici, S di spigoli e F di facce di $\mathcal{T}$.*

L'insieme dei vertici è discreto ed essendo le superfici trattate compatte, questo implica che vertici, spigoli e facce sono finiti; quindi la definizione, almeno dal punto di vista aritmetico, è ben posta.

Definizione 3.1.7. *Siano $\mathcal{T}$ una tassellazione di una superficie $\mathcal{M}$ e $T_i, T_j \in \mathcal{T}$; definiamo la **relazione di incidenza** come $T_i < T_j$ se T_i è contenuto in T_j.*
*Se $\mathcal{T}'$ è un'altra tassellazione di $\mathcal{M}$, definiamo **isomorfismo combinatorio** un'applicazione biiettiva $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ tale che $P_i < P_j \Leftrightarrow \Phi(P_i) < \Phi(P_j)$.*
*Due tassellazioni sono **equivalenti** se esiste un isomorfismo combinatorio tra di esse.*

Classificheremo le tassellazioni di una superficie a meno della relazione di equivalenza appena definita. Enunciamo ora alcuni risultati fondamentali sulle tassellazioni e sulle superfici.

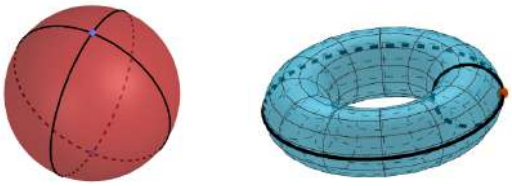
Teorema 3.1.1. *La caratteristica di Eulero non dipende dalla particolare tassellazione o cellularizzazione, ma solo dalla superficie.*

Teorema 3.1.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di genere g. Allora:*

$$\chi(\mathcal{M}) = \begin{cases} 2-2g & se\ \mathcal{M} = V_g \\ 2-2g-k & se\ \mathcal{M} = V_{g,k} \\ 2-g & se\ \mathcal{M} = U_g \\ 2-g-k & se\ \mathcal{M} = U_{g,k} \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\mathcal{M} = V_g$. Per il Teorema 3.1.1, possiamo considerare una cellularizzazione, che generalmente ha meno vertici, spigoli e facce di una tassellazione e rende il conto più semplice. Se $\mathcal{M} = V_0$, cioè $\mathcal{M}$ è una sfera, basta considerare la cellularizzazione che si ottiene da due meridiani distinti, come in figura (a): $V = 2$, polo Nord e polo Sud, $S = 4$ e $F = 4$, allora $\chi(M) = 2-4+4 = 2$ che verifica la formula in quanto la sfera ha genere 0.

Se $g > 0$, consideriamo il $4g$-agono che rappresenta V_g, questa è una cellularizzazione con un vertice, perché tutti i vertici sono identificati in un solo punto dal quoziente, $2g$ spigoli, perché questi sono identificati a coppie, e una faccia. Quindi $\chi(V_g) = 1-2g+1 = 2-2g$. Come esempio possiamo pensare al toro in figura (b), in cui i lati identificati sono i due cerchi generatori che fanno da spigoli e la loro intersezione è l'unico vertice.



(a) (b)

Allo stesso modo, se consideriamo le superfici U_g, la rappresentazione in $2g$-agoni è una cellularizzazione con un vertice, g spigoli e una faccia; allora $\chi(U_g) = 2-g$.

Per quanto riguarda le superfici del tipo $V_{g,k}$ e $U_{g,k}$, anche se si potrebbe utilizzare un approccio simile a quello appena presentato, preferiamo adottare un altra strategia che ci permette anche di introdurre una proprietà interessante.

Supponiamo che una superficie $\mathcal{M}$ si ottenga incollando due superfici $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ lungo una curva semplice chiusa $\mathcal{C}$ che appartiene al bordo di entrambe. Allora possiamo calcolare $\chi(\mathcal{M})$ a partire da una tassellazione su $\mathcal{M}_1$ e una su $\mathcal{M}_2$ che

coincidono su $\mathcal{C}$. Siano rispettivamente (V_1, S_1, F_1), (V_2, S_2, F_2) e (V, S, F) il numero di vertici, spigoli e facce delle tassellazioni su $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e della tassellazione che si ottiene dopo l'identificazione dei bordi. Allora

$$F = F_1 + F_2 \qquad S = S_1 + S_2 - S_{\mathcal{C}} \qquad V = V_1 + V_2 - V_{\mathcal{C}}$$

dove $S_{\mathcal{C}}$ e $V_{\mathcal{C}}$ è il numero di spigoli e vertici sulla curva al bordo $\mathcal{C}$. In particolare, lungo una curva semplice chiusa il numero di vertici e spigoli è lo stesso, basti pensare ai poligoni. Allora:

$$\chi(M) = V - S + F = V_1 + V_2 - V_{\mathcal{C}} - (S_1 + S_2 - S_{\mathcal{C}}) + F_1 + F_2 = \chi(M_1) + \chi(M_2)$$

Per induzione, si dimostra che la formula vale incollando più superfici lungo circonferenze disgiunte.
Possiamo vedere le superfici V_g (o U_g) come l'unione di $V_{g,k}$ (o $U_{g,k}$) con k dischi D_2. Quindi $\chi(V_g) = \chi_(V_{g,k}) + k\chi(D_2)$ (o $\chi(U_g) = \chi_(U_{g,k}) + k\chi(D_2)$). Per calcolare la caratteristica di un disco chiuso dividiamolo a metà con un segmento, ottenendo una cellularizzazione con 2 vertici, 3 spigoli e 2 facce, allora $\chi(D_2) = 1$. Infine:

$$\chi(V_{g,k}) = 2 - 2g - k \qquad \chi(U_{g,k}) = 2 - g - k$$

□

Teorema 3.1.3 (Teorema di classificazione delle superfici)**.** *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di genere g. Se $\mathcal{M}$ è compatta, connessa e senza bordo, allora $\mathcal{M}$ è omeomorfa a V_g, se è orientabile, o a U_g, se non è orientabile.*
Se $\mathcal{M}$ è compatta, connessa e il suo bordo è composto da k componenti connesse, allora $\mathcal{M}$ è omeomorfa a $V_{g,k}$, se è orientabile, o a $U_{g,k}$, se non è orientabile.

In altre parole, la caratteristica di orientabilità, il numero di componenti del bordo e il genere (o equivalentemente la caratteristica di Eulero) rappresentano un insieme di invarianti topologico completo per le superfici compatte e connesse, che sono le uniche su cui ci concentreremo; cioè queste tre caratteristiche descrivono completamente una superficie a meno di omeomorfismi. Questo risultato è abbastanza straordinario, basti pensare che per le 3-varietà, l'analogo tridimensionale delle superfici, non si conosce una lista completa di invarianti.

3.2 Tassellazioni regolari di superfici

Definizione 3.2.1. *Una tassellazione (o una cellularizzazione) $\mathcal{T}$ di una superficie $\mathcal{M}$ si dice* ***regolare*** *se ogni faccia ha lo stesso numero di spigoli e ogni vertice ha la stessa valenza.*

Notiamo che la definizione è, almeno a livello combinatorio, la stessa data per le tassellazioni regolari del piano, in cui però intervengono anche questioni metriche. Inoltre è possibile associare ad ogni tassellazione regolare una coppia di interi (p, q), entrambi maggiori di 3, dove p è il numero di spigoli in ogni faccia e q è la valenza di ogni vertice.

Teorema 3.2.1. *Le tassellazioni regolari su una superficie $\mathcal{M}$ di caratteristica non negativa sono:*

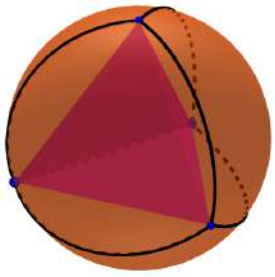
- *cinque sulla sfera:*
  (3,3) con V=4 S=6 F=4
  (3,4) con V=6 S=12 F=8
  (4,3) con V=8 S=12 F=6
  (3,5) con V=12 S=30 F=20
  (5,3) con V=20 S=30 F=12
- *due sul piano proiettivo:*
  (3,5) con V=6 S=15 F=10
  (5,3) con V=10 S=15 F=6
- *infinite, ma soltanto di tre tipi, sul toro e sulla bottiglia di Klein:*
  (3,6) con V=n S=3n F=2n
  (4,4) con V=n S=2n F=n
  (6,3) con V=2n S=3n F=n

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che tra numero di vertici, facce e spigoli, valgono le seguenti relazioni: $pF = 2S = qV$. Infatti, ogni spigolo appartiene esattamente a due facce, quindi $p \cdot F$ conta esattamente due volte ogni spigolo; d'altra parte, ogni faccia ha p vertici e ogni vertice appartiene a q facce, allora $p \cdot F$ conta tutti i vertici q volte. Utilizziamo queste relazioni nella formula di Eulero:

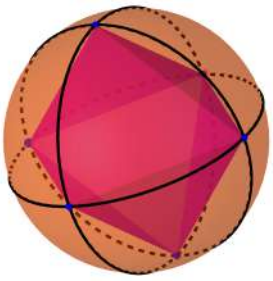
$$\frac{2S}{q} - S + \frac{2S}{p} = \chi(\mathcal{M}) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\chi(\mathcal{M})}{2S} + \frac{1}{2} \ (\star)$$

Nel caso in cui $\chi(\mathcal{M}) > 0$, cioè se $\mathcal{M}$ è la sfera o il piano proiettivo, otteniamo la disuguaglianza $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Ricordando che $p, q \geq 3$, necessariamente uno dei due deve essere uguale a 3, perché $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, e l'altro può valere al massimo 5, perché $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Allora abbiamo 5 coppie: (3,3), (3,4), (3,5), (4,3) e (5,3).

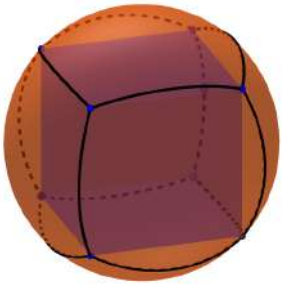
Consideriamo il caso in cui $\mathcal{M}$ sia una sfera. Ovviamente un qualsiasi poliedro semplicemente connesso[3] è omeomorfo a una sfera e, in particolare, l'insieme dei suoi vertici, spigoli e facce costituisce una tassellazione della sfera. Quindi un poliedro regolare, definito come un poliedro in cui ogni faccia ha lo stesso numero di spigoli e ogni vertice ha la stessa valenza, è una tassellazione regolare della sfera. È noto che i poliedri regolari sono soltanto 5 non solo quando si fanno richieste di carattere metrico (le facce e le figure al vertice sono poligoni regolari tra loro congruenti), ma anche quando si fanno soltanto richieste di tipo combinatorio, come nel nostro caso. Inoltre i poliedri regolari sono caratterizzanti esattamente dalle 5 coppie di interi che abbiamo appena trovato. In altre parole, esistono 5 tassellazioni regolari della sfera, in corrispondenza biunivoca con i 5 solidi platonici. In particolare, per ottenere le tassellazioni è sufficiente considerare il poliedro corrispondente e costruirne la circonferenza circoscritta; i vertici del poliedro sono i vertici della tessellazione, mentre gli spigoli sono archi di circonferenza che sono l'immagine degli spigoli del poliedro tramite la proiezione sulla superficie delle sfera dal suo centro. Da $(\star)$, sapendo che $\chi(M) = 2$, otteniamo $S = \frac{2pq}{2p+2q-pq}$ che, assieme alle relazioni $pF = 2S = qV$, ci permette di calcolare il numero di vertici, spigoli e facce, come indicato nell'enunciato del Teorema.



(3,3) tetraedro

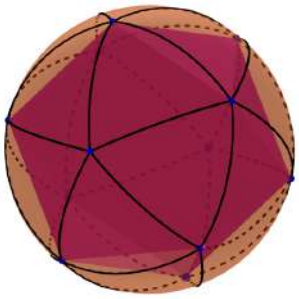


(3,4) ottaedro

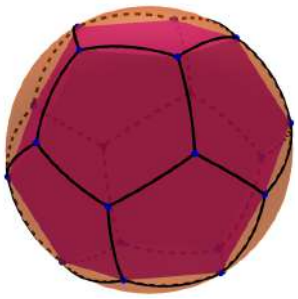


(4,3) cubo

[3]Uno spazio topologico si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale.

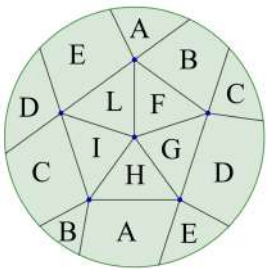


(3,5) icosaedro

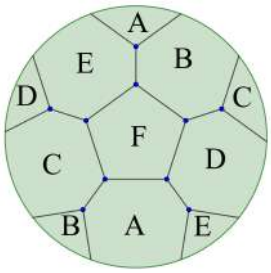


(5,3) dodecaedro

Supponiamo ora che $\mathcal{M}$ sia il piano proiettivo e ricordiamo che è possibile interpretare il piano proiettivo come una sfera in cui identifichiamo i punti antipodali. Consideriamo il quoziente di un icosaedro e di un dodecaedro tramite l'applicazione antipodale, come mostrato in figura, dove ogni punto sul bordo va identificato con il punto ad esso diametralmente opposto e quindi le regioni con la stessa lettera vanno a formare un'unica faccia. In questo modo otteniamo le tassellazioni (3,5) e (5,3) sul piano proiettivo. Come prima, da $(\star)$ otteniamo la relazione $S = \frac{pq}{2p+2q-pq}$ e possiamo calcolare il numero di vertici, spigoli e facce.

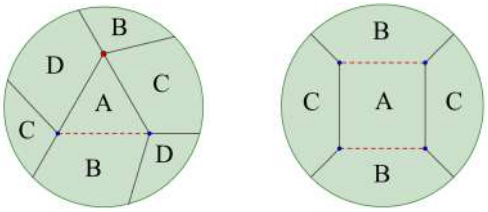


(3,5)



(5,3)

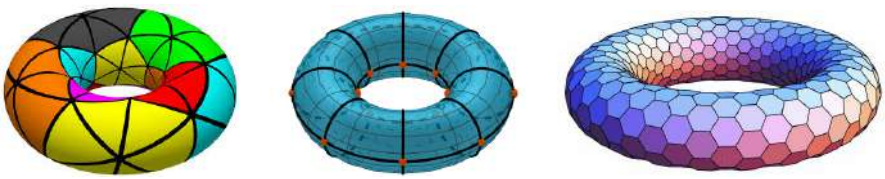
La stessa strategia fallisce per le altre possibili tassellazioni: il tetraedro non viene mappato in sé stesso dall'applicazione antipodale, quindi non è possibile ottenere una tassellazione del piano proiettivo in questo modo; d'altra parte, con l'ottaedro e il cubo si possono ottenere delle cellularizzazioni del piano proiettivo, ma non tassellazioni: infatti, come si vede in (a), che rappresenta il quoziente dell'ottaedro, l'intersezione tra la facce A e B, ad esempio, è l'unione disgiunta di un vertice e uno spigolo, tratteggiati in rosso; similmente in (b), che rappresenta il caso del cubo, le facce A e B, ad esempio, si intersecano in due spigoli distinti, sempre tratteggiati.



(a) **(3,4)** (b) **(4,3)**

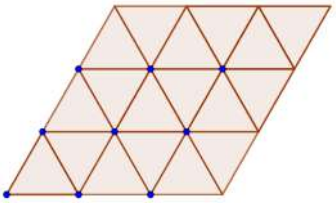
Questo ovviamente non basta per mostrare che tali tassellazioni non esistono. Consideriamo il caso (3,3): $S = \frac{pq}{2p+2q-pq} = 3$, allora $F = \frac{2S}{p} = 2$ ma questo è assurdo in quanto le facce devono essere omeomorfe a dischi chiusi, ma se dal piano proiettivo rimuoviamo un disco otteniamo un nastro di Möbius. Nel caso (4,3), $S = 6$ e $F = 3$: consideriamo un tassello quadrato, essendo $F = 3$, le facce adiacenti a questo non sono tutte distinte, ma questo significa che esistono due facce la cui intersezione non è un solo vertice o un solo spigolo. Similmente nel caso (3,4), $S = 6$, $V = 3$ e $F = 4$, allora in ogni vertice concorrono tutte e quattro le facce, in quanto la valenza è 4, e necessariamente ogni faccia confina lungo uno spigolo con la faccia centrale; ma allora tutte le facce si intersecano in un vertice e in uno spigolo disgiunti.

Se invece consideriamo le superfici a caratteristica nulla, cioè il toro e la bottiglia di Klein, da $(\star)$ otteniamo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Abbiamo già incontrato questa equazione nel Teorema 2.1.1 sulla classificazione delle tassellazioni regolari e sappiamo che le uniche soluzioni sono (3,6), (4,4) e (6,3). Notiamo immediatamente che da $(\star)$ non otteniamo nessuna informazione sul numero di spigoli di queste tassellazioni; infatti esistono infinite tassellazioni regolari del toro e della bottiglia di Klein, ma ognuna di esse appartiene esattamente a uno dei tre tipi trovati. Dalla relazione $pF = 2S = qV$ otteniamo che le tassellazioni (3,6) hanno n vertici, $3n$ spigoli e $2n$ facce, le tassellazioni (4,4) hanno n vetrici, $2n$ spigoli e n facce e infine le tassellazioni (6,4) hanno $2n$ vertici, $3n$ spigoli e n facce. Infine, è importante sottolineare che il teorema non dice che per ogni n esiste una tassellazione, ma solo che ne esistono infinite; infatti per alcuni valori di n si ottengono soltanto delle cellularizzazioni.

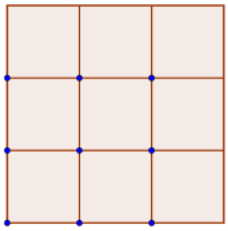


Esempi di tassellazioni **(3,6)**, **(4,4)** e **(6,3)** sul toro in 3D

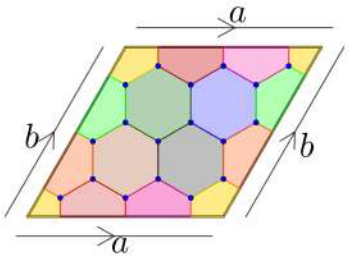
Ricordando che sia il toro che la bottiglia di Klein si ottengono identificando opportunamente i lati di un quadrilatero, mostriamo alcuni esempi di tassellazioni, di cui i primi due sono adatti sia al toro che alla bottiglia di Klein; da questi è semplice trovare infinite altre tassellazioni dello stesso tipo.



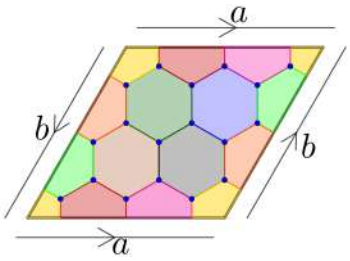
(3,6), n=9



(4,4), n=9

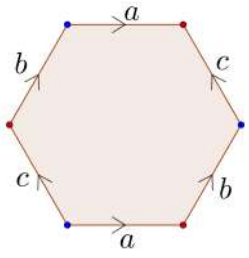


Toro (6,3), n=9

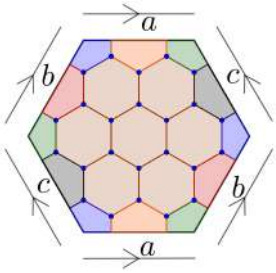


Bottiglia di Klein (6,3), n=9

Notiamo che un toro si può anche descrivere come un esagono in cui i lati opposti sono identificati come in figura (a): infatti tale esagono rappresenta una superficie orientabile, in quanto non ci sono lati che dopo l'identificazione generano nastri di Möbius, di caratteristica $\chi = 2 - 3 + 1 = 0$, e senza bordo, in quanto non ci sono lati non identificati, quindi per il Teorema 3.1.3 è un toro. Grazie a questa osservazione, possiamo ottenere una tassellazione del tipo (6,3), come mostrato in (b), dove le aree al bordo con lo stesso colore sono da intendersi come un unico esagono; possiamo estendere la tassellazione e trovare altre infinite tassellazioni del tipo (6,3).

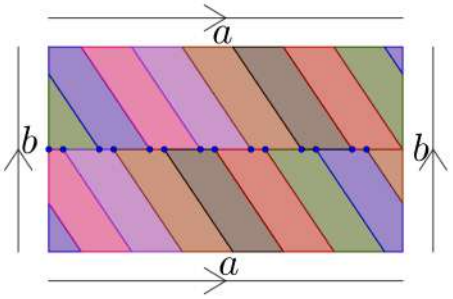


(a)



(b) **(6,3)**, n=12

Infine, proponiamo una particolare tassellazione (6,3) del toro, visto come un rettangolo coi lati identificati, in cui ogni faccia è adiacente a tutte le altre.



(6,3) n=7

□

Passiamo ora a considerare superfici di caratteristica negativa. Il nostro intento è quello di mostrare che esistono al più un numero finito di tassellazioni regolari e, in particolare, esiste almeno una tassellazione regolare in ogni superficie orientabile. Consideriamo la solita equazione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\chi(\mathcal{M})}{2S} + \frac{1}{2}$, che in questo caso ci porta alla disequazione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. Ci accorgiamo immediatamente che tale disuguaglianza ammette infinite coppie (p, q) come soluzione; questo non è molto utile, visto che non abbiamo neppure chiesto che S sia un numero intero finora. Con il seguente teorema cerchiamo di chiarire la situazione.

Teorema 3.2.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di caratteristica negativa; allora esistono al più un numero finito di cellularizzazioni regolari. A maggior ragione, esiste al più un numero finito di tassellazioni regolari.*

Dimostrazione. Sia (p, q) una coppia di naturali tale che esista in $\mathcal{M}$ una cellularizzazione regolare del tipo (p, q). Dalla disuguaglianza $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, si ottiene immediatamente che $p, q \geq 3$, infatti se, ad esempio, $p < 3$ allora $\frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ e quindi $q < 0$, ma questo è assurdo. Lo scopo della dimostrazione è quello di determinare una disequazione del tipo $p + q \leq k$, dove k dipende esclusivamente da $\mathcal{M}$. Considerando la solita uguaglianza $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\chi(\mathcal{M})}{2S} + \frac{1}{2}$, otteniamo

$$S = -\frac{pq\chi(\mathcal{M})}{pq - 2p - 2q} \qquad V = -\frac{2p\chi(\mathcal{M})}{pq - 2p - 2q} \qquad F = -\frac{2q\chi(\mathcal{M})}{pq - 2p - 2q}$$

Supponendo di fissare p e la superficie $\mathcal{M}$, di conseguenza anche $\chi(\mathcal{M})$, notiamo che l'espressione che determina il numero di vertici è una funzione della variabile q

del tipo $V(q) = \frac{A}{Bq+C}$, con $A = -2p\chi(\mathcal{M}) > 0$, $B = p-2 > 0$ e $C = -2p$; in particolare $V(q)$ è monotona decrescente. Poiché $V \geq 1$, si ha

$$q \leq \frac{2p(1-\chi(M))}{p-2} \tag{3.1}$$

Analogamente, fissando q e $\chi(\mathcal{M})$, la funzione che descrive il numero di facce dipende solo da p ed è monotona decrescente; poiché si ha $F \geq 1$, otteniamo

$$p \leq \frac{2q(1-\chi(M))}{q-2} \tag{3.2}$$

Da (3.1) e (3.2) si ottengono le disuguaglianze

$$1-\chi(\mathcal{M}) \geq \frac{q(p-2)}{2p} \qquad 1-\chi(\mathcal{M}) \geq \frac{p(q-2)}{2q}$$

da cui si ricava

$$8-4\chi(\mathcal{M}) = 4+4(1-\chi(\mathcal{M})) \geq 4+\frac{4q(p-2)}{2p} = \frac{8p+4pq-8q}{2p} = 2q+\frac{4(p-q)}{p}$$

$$8-4\chi(\mathcal{M}) \geq 4+\frac{4p(q-2)}{2q} = \frac{8q+4pq-8p}{2q} = 2p+\frac{4(q-p)}{q}$$

Allora

$$8-4\chi(\mathcal{M}) \geq (p+q)+(q-p)+\frac{4(p-q)}{p} = (p+q)+(q-p)(1-\frac{4}{p}) \tag{3.3}$$

$$8-4\chi(\mathcal{M}) \geq (p+q)+(p-q)+\frac{4(q-p)}{q} = (p+q)+(p-q)(1-\frac{4}{q}) \tag{3.4}$$

Se $p = q$ o uno tra p e q è uguale a 4, si ha

$$8-4\chi(\mathcal{M}) \geq p+q \tag{3.5}$$

Se invece $p \neq q$ e $p, q > 3$, supponiamo $p < q$ e dall'equazione (3.3) otteniamo

$$8-4\chi(\mathcal{M}) \geq (p+q)+(q-p)(1-\frac{4}{p}) \geq p+q \tag{3.6}$$

in quanto $q-p > 0$ e, se $p > 3$, $1-\frac{4}{p} > 1-\frac{4}{4} = 0$ Se invece consideriamo $p > q$, dall'equazione (3.4) otteniamo la stessa disuguaglianza. In altre parole, se $p, q > 3$ vale la disuguaglianza $p+q < 8-4\chi(\mathcal{M})$ che assicura ci siano al più un numero finito di cellularizzazioni regolari.

Resta da esaminare il caso $p = 3$ e il caso $q = 3$. Notiamo che da $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ non può

essere $p = q = 3$. Se $p = 3$, da (3.1), otteniamo $q \leq 6(1 - \chi(\mathcal{M}))$ e se $q = 3$ otteniamo, simmetricamente da (3.2), $p \leq 6(1 - \chi(\mathcal{M}))$. Perciò in entrambi i casi si ha

$$p + q \leq 3 + 6(1 - \chi(\mathcal{M})) = 9 - 6\chi(\mathcal{M}) \tag{3.7}$$

e quindi anche in questo caso esiste un numero finito di cellularizzazioni regolari. □

Come abbiamo già sottolineato nel corso della tesi, il fatto che p e q soddisfino tali disuguaglianze è una condizione necessaria ma non sufficiente affinché ci sia una tassellazione regolare del tipo (p, q). D'altra parte, come ora mostreremo, queste disuguaglianze non sono migliorabili e quindi la ricerca di condizioni più fini sull'esistenza di tassellazioni regolari deve necessariamente passare per altre vie.
Ogni superficie orientabile senza bordo di genere g ammette una cellularizzazione regolare del tipo $(4g, 4g)$ con $V = F = 1$ e $S = 2g$: basta considerare il $4g$-agono con i lati identificati che la genera, come in figura (a); similmente, ogni superficie non orientabile senza bordo di genere g ammette una cellularizzazione regolare $(2g, 2g)$ con $V = F = 1$ e $S = g$ considerando il $2g$-agono con i lati identificati che la genera, come in figura (b). In questi casi si ha

$$p + q = 8g = 4(2 - \chi(\mathcal{M})) = 8 - 4\chi(\mathcal{M}) \qquad \text{se } \mathcal{M} \text{ è orientabile}$$

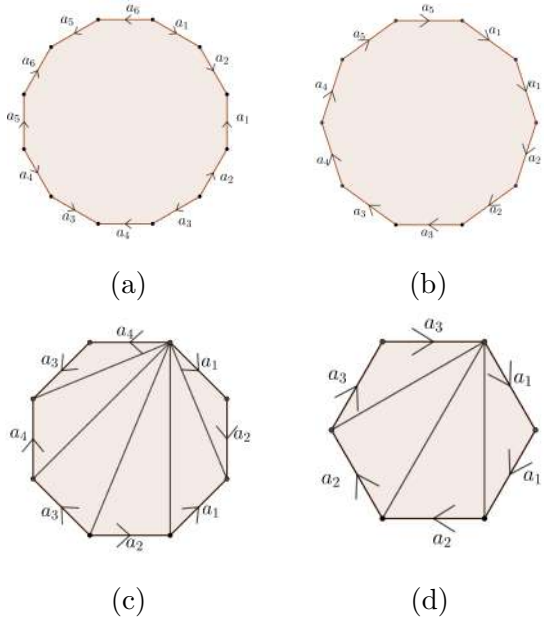
$$p + q = 4g = 4(2 - \chi(\mathcal{M})) = 8 - 4\chi(\mathcal{M}) \qquad \text{se } \mathcal{M} \text{ è non orientabile}$$

Se invece consideriamo la cellularizzazione che si ottiene da un $4g$-agono considerando un vertice e collegandolo con tutti gli altri, come in (c), otteniamo sulla superficie orientabile di genere g una cellularizzazione regolare del tipo $(3, 4g + 2(4g - 3)) = (3, 12g-6)$, in quanto nell'unico vertice concorrono i $2g$ lati e le $(4g-3)$ diagonali del $4g$-agono, tutti contati due volte. Similmente, possiamo considerare la stessa situazione nel $2g$-agono che genera la superficie non orientabile di genere g, mostrata in (d); in tal caso otteniamo una cellularizzazione del tipo $(3, 2g+2(2g-3)) = (3, 6g-6)$. In entrambi i casi si ha

$$p + q = 12g - 3 = 6(2 - \chi(\mathcal{M})) - 3 = 9 - 6\chi(\mathcal{M}) \qquad \text{se } \mathcal{M} \text{ è orientabile}$$

$$p + q = 6g - 3 = 6(2 - \chi(\mathcal{M})) - 3 = 9 - 6\chi(\mathcal{M}) \qquad \text{se } \mathcal{M} \text{ è orientabile}$$

In altre parole, sia in (3.5) che in (3.7) valgono le uguaglianze.



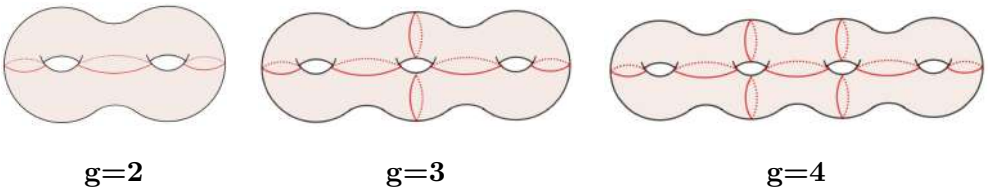
(a) (b)

(c) (d)

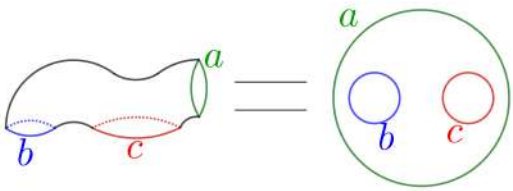
Teorema 3.2.3. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie orientabile di caratteristica negativa; allora esiste sempre almeno la tassellazione regolare di tipo (3,7).*

Dimostrazione. Cominciamo innanzitutto con il giustificare la scelta della coppia (3,7): per qualsiasi superficie di caratteristica negativa vale $p+q = 10 \leq 9 - 6\chi(\mathcal{M})$, cioè la disequazione (3.7) è verificata.

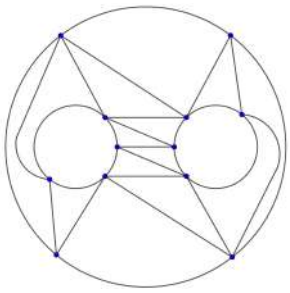
Costruiamo ora la tassellazione: ricordiamo che ogni superficie compatta, connessa, orientabile e di genere g è omeomorfa a un toro con g buchi; notiamo che, come mostrato nella figura sottostante, è possibile spezzare la superficie in $2g-2$ superfici con bordo lungo $3g-3$ curve, ognuna delle quali omeomorfa a un disco con due buchi. Per vederlo basta pensare di appiattire la figura allargando uno dei 3 buchi della figura tridimensionale a formare il bordo del disco maggiore.



g=2 **g=3** **g=4**



Su ogni disco bucato è possibile ottenere la tassellazione rappresentata nella figura sottostante; tale tassellazione ha 14 facce triangolari, 12 vertici, 4 per ogni componente di bordo, e 27 spigoli, 4 su ogni componente di bordo e i restanti 15 all'interno. I vertici, alternativamente rispetto al bordo a cui appartengono, hanno valenza 4 o 5 e da ogni vertice escono due spigoli che appartengono al bordo e due o tre che invece appartengono all'interno del disco. Se ora incolliamo i dischi a formare la superficie di partenza, di modo che un vertice di valenza 5 coincida con un vertice di valenza 4, otteniamo una tassellazione in triangoli in cui ogni vertice ha valenze $4+5-2=7$, in quanto due spigoli sul bordo coincidono dopo l'incollamento. Abbiamo quindi una tassellazione regolare di tipo (3,7), come volevasi dimostrare.



□

Corollario 3.2.1. *Per dualità, in ogni superficie orientabile di caratteristica negativa esiste anche la tassellazione regolare* $(7,3)$.

Capitolo 4

Proposte didattiche

In quest'ultimo capitolo ci concentreremo su alcuni aspetti didattici legati agli argomenti trattati nella tesi. Le tassellazioni non vengono generalmente trattate nelle Scuole Secondarie di II grado, ma argomenti come le trasformazioni del piano sono inseriti nei *curricula* scolastici, come vedremo a breve. Molto spesso però le isometrie rimangono concetti astratti, visti soltanto come definizioni prive di utilizzi pratici oppure affrontate solo analiticamente, senza mai considerare gli aspetti geometrici. Il nostro intento è di proporre dei percorsi che permettano agli studenti di approfondire alcuni dei concetti introdotti in questa tesi attraverso la scoperta e in modo laboratoriale, seguendo l'approccio didattico introdotto da Emma Castelnuovo[1] già negli anni '50 del secolo scorso.

4.1 Le trasformazioni del piano nei *curricula* scolastici

In questa prima Sezione, commentiamo i passaggi delle *"Indicazioni Nazionali"* (2010) e delle *"Linee Guida"* (2010, 2012) riguardanti le trasformazioni del piano e le simmetrie; inoltre cercheremo di elencare in quali altri ambiti e in che modo si sfrutta la conoscenza di tale argomento.

[1] Emma Castelnuovo (1913-2014) è stata una insegnante e didatta della matematica; ha scritto libri di testo per la scuola secondaria e libri di didattica, tra i quali *"Didattica della Matematica"* (1963), rivoluzionando il modo di insegnare la matematica e in particolare la geometria.

"Indicazioni Nazionali" e *"Linee Guida"*

Le *"Indicazioni Nazionali"* per i Licei e le *"Linee Guida"* per gli Istituti Tecnici e Professionali sono documenti redatti dal MIUR (Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca) che si pongono l'obbiettivo di riordinare i programmi scolastici, sostituendo i *"Programmi Ministeriali"*, fornendo gli obiettivi di apprendimento e le competenze che ogni studente deve acquisire alla fine del ciclo di studi. Entrambi i testi si fondano su un principio in apparenza semplice e condivisibile, *"pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità"*, per poi scontrarsi con la vastità degli argomenti contenuti nei libri di testo italiani.
Concentriamo il nostro interesse sulle indicazioni riguardo all'uso delle trasformazioni del piano: sia per i licei che per gli istituti tecnici e professionali queste vengono introdotte nel I biennio, solitamente nella classe seconda. Di seguito citiamo i passi interessati:

- (Dalle *"Indicazioni Nazionali"*, Matematica-Geometria) *"Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti."*

- (Dalle *"Linee Guida"*, Matematica) *"Ai fini del raggiungimento dei risultati di apprendimento [...], nel primo biennio il docente persegue [...]l'obiettivo prioritario di far acquisire allo studente le competenze di base attese a conclusione dell'obbligo di istruzione, di seguito richiamate:*

  - *confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.*

  L'articolazione dell'insegnamento di "Matematica" in conoscenze e abilità è di seguito indicata quale orientamento per la progettazione didattica del docente in relazione alle scelte compiute nell'ambito della programmazione collegiale del Consiglio di classe.[...]
  ***Conoscenze**: Teorema di Talete e sue conseguenze. Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini). Esempi di loro utilizzazione nella dimostrazione di proprietà geometriche.*

> ***Abilità**: Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive."*

Notiamo che gli argomenti proposti sono gli stessi, ma non viene mai specificato se devono essere trattati dal punto di vista della geometria sintetica o analitica. Seguendo la filosofia di questa tesi, sarebbe opportuno introdurre le trasformazioni del piano per via sintetica, per poi analizzare alcune equazioni che caratterizzano le isometrie, ad esempio i casi più semplici e significativi come la riflessione rispetto agli assi cartesiani, la simmetria centrale rispetto all'origine e le omotetie di centro l'origine, in modo da *"evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili, che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi"*, per citare un altro passo delle *Indicazioni Nazionali*. In questo modo affrontiamo la parte più tecnica e numerica solo dopo aver acquisito in profondità l'argomento.
Le *Indicazioni Nazionali* non si dilungano sullo scopo che ha lo studio di questi argomenti, rimarcando l'aspetto più teorico dei Licei. Al contrario, per gli Istituti Tecnici e Professionali, sono chiare le finalità, grazie all'introduzione della colonna dedicata alle *abilità*: le trasformazioni del piano servono a risolvere problemi geometrici e/o grafici, quindi in stretta relazione con la realtà, inoltre sono un ottimo esercizio per sviluppare capacità di dimostrazione. Gli insegnanti potrebbero prendere spunto dalle informazioni presenti nelle *Linee Guida*, anche nel caso in cui insegnino in un Liceo.

In questa tesi e nelle attività didattiche proposte nel seguito facciamo spesso riferimento agli strumenti informatici, sia come aiuto nelle costruzioni geometriche, che come strumento ausiliario per congetturare e dimostrare; le prossime righe sono una citazione dalle *Indicazioni Nazionali* sull'uso delle tecnologie in aula:
"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che

sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale."

L'uso di strumenti informatici è quindi caldamente consigliato nel testo ministeriale, ma la scarsità delle ore a disposizione, sopratutto al di fuori del Liceo Scientifico, rende difficile l'attuazione di questo ottimo proposito. D'altra parte, le attività laboratoriali e l'uso di software rendono più piacevole e veloce l'apprendimento di alcuni argomenti, tanto da rendere fondamentale la loro introduzione nella progettazione scolastica; in particolare, le generazioni attualmente e prossimamente in età scolare sono *nativi digitali*, di conseguenza non dovrebbero esserci difficoltà o particolari perdite di tempo nell'utilizzo di strumenti informatici. Infine, un uso sapiente e costante di queste metodologie didattiche ridurrà notevolmente il tempo impiegato nelle attività nel corso degli anni, sia perché il docente imparerà dai propri errori e ottimizzerà la proprie proposte, sia perché gli studenti si abitueranno a questo tipo di lezioni, imparando a gestire il proprio tempo e i lavori assegnati.

Le trasformazioni del piano nei programmi di Matematica

In questo paragrafo cercheremo di elencare, nella maniera più esaustiva possibile, in quali argomenti dei programmi di Matematica si fa uso delle trasformazioni del piano. Faremo riferimento al Liceo Scientifico, sia indirizzo Ordinario che Scienze Applicate, in quanto sono gli indirizzi in cui il monte ore è maggiore e, inoltre, viene dedicato molto tempo allo studio della Geometria.

Il primo approccio che gli studenti hanno con le trasformazioni del piano è al primo anno: infatti lo studio delle congruenze, in particolare dei *criteri di congruenza dei triangoli*, si basa sul concetto di isometria. In questo caso non intervengono direttamente i vari tipi di isometrie, ma gli studenti dovrebbero comprendere che due figure piane si dicono congruenti se sono sovrapponibili, cioè se esiste un isometria che fa sovrapporre un oggetto all'altro. Purtroppo, molto spesso, questa informazione passa in secondo piano, surclassata dallo studio dei criteri sopracitati; in questo modo rischiamo di perdere la capacità di intuire relazioni geometriche osservando delle configurazioni a favore dell'applicazione cieca dei teoremi. Con questo non

vogliamo sostenere che lo studio teorico sia inutile o da abolire, ma bensì dovremmo educare gli studenti a fondere la teoria con l'osservazione, seminando l'idea che la Matematica, e in particolare la Geometria Euclidea, nascono dall'osservazione della realtà circostante. Quest'ultimo concetto è di nuovo in linea con le *Indicazioni Nazionali*: nel paragrafo dedicato alle *"Linee Generali e Competenze"* della sezione Matematica, comune a tutti i Licei, si dice che *"saranno obiettivo dello studio gli elementi della geometria euclidea del piano [...] entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni)"*.

Il secondo argomento in cui si incontrano le trasformazioni del piano sono i numeri complessi, durante il Secondo Biennio. Le *Indicazioni Nazionali* richiedono che siano studiate *"la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica"*. In questo caso, in un qualche momento della trattazione, dopo aver introdotto il piano di Gauss, è opportuno sottolineare come le operazioni tra numeri complessi siano legate alle trasformazioni del piano: la somma è una somma tra vettori, il prodotto per un numero reale è un'omotetia, il prodotto con un numero complesso di modulo 1 è una rotazione e il coniugio è una riflessione. Questo argomento è un ottimo spunto per sottolineare sia l'importanza di rappresentare uno stesso concetto in modi diversi, ognuno utile per in determinate situazioni, che lo stretto legame tra argomenti che possono apparire lontani tra loro, come l'Algebra e la Geometria.

Infine le trasformazioni del piano intervengono nella rappresentazione delle funzioni, che permea il Secondo Biennio e il Quinto Anno. Conoscendo il grafico di una funzione $f(x)$, gli studenti devono essere in grado di disegnare i grafici di $f(x)+k$ (traslazione verticale), $f(x-h)$ (traslazione orizzontale), $-f(x)$ (riflessione rispetto all'asse x), $f(-x)$ (riflessione rispetto all'asse y), $Af(x)$ (dilatazione verticale) e $f(\omega x)$ (dilatazione orizzontale); in particolare, in questo caso si uniscono elementi analitici, utili a comprendere perché una determinata modifica alla funzione originale determina una certa trasformazione del grafico, a elementi geometrici, che permettono la rappresentazione di funzioni composte da più trasformazioni; infine, questo argomento viene spesso affiancato alle funzioni trigonometriche, vista anche

l'applicazione allo studio della Fisica del quarto e/o quinto anno, in particolare dell'Elettromagnetismo.
Infine, durante il Quinto Anno, agli studenti viene richiesto di saper realizzare uno studio di funzione completo: tra i vari punti da svolgere figurano le simmetrie del grafico di una funzione, cioè viene richiesto di determinare se la funzione è pari o dispari; oltre al mero calcolo, agli studenti viene chiesto di saper determinare se una funzione ha delle simmetrie guardando solamente il grafico e per fare ciò è necessaria una buona conoscenza delle riflessioni assiali e centrali.
Negli ultimi due argomenti proposti, gli studenti non devono imparare a memoria le varie situazioni presentate; è molto più importante che comprendano il ragionamento che porta a queste conclusioni e che sappiano ripeterlo da soli e in situazioni diverse. Di nuovo, l'intento del docente è educare a un'osservazione attenta e ragionata delle simmetrie che permeano la Matematica.

4.2 Sulle isometrie

Tutti i percorsi didattici, in questa e nelle prossime Sezioni, sono pensati per studenti al secondo anno del Liceo Scientifico, sia Ordinario che Scienze Applicate. Gli alunni, nel corso del biennio, dovrebbero aver già familiarizzato con gli enti geometrici e con i vettori, quindi ci sentiamo liberi di utilizzare una terminologia piuttosto tecnica e precisa. Tali percorsi non vanno visti come un sostituto della trattazione teorica in classe, ma come uno strumento parallelo per rafforzare le conoscenze e soprattutto le competenze.
In questa Sezione proponiamo diversi percorsi di approfondimento riguardanti le isometrie del piano. Come già specificato, l'idea è quella di affiancare questi progetti ad alcune ore in aula, nelle quali vengono presentate e discusse le isometrie del piano; alla fine di tali spiegazioni è opportuno verificare le difficoltà e/o gli interessi degli alunni per scegliere quali e quante delle seguenti proposte utilizzare.

Simmetrie e figure unite

Questa prima attività ho lo scopo di studiare e comprendere quali figure sono lasciate immutate dopo l'applicazione di una isometria, per arrivare ad elaborare i concetti

base della simmetria nel piano, come l'asse di simmetria e il centro di simmetria.

- **Prerequisiti:** conoscenza basilare sulle isometrie, cioè i quattro tipi di isometria e il loro funzionamento base, conoscere la definizione di elemento unito.

- **Materiali:** in base alla classe e alle disponibilità, le attività possono svolgersi sia su carta, magari in compresenza con i colleghi di Disegno Tecnico per ripercorrere la costruzione delle varie isometrie, oppure con l'uso di GeoGebra; nel caso si svolgano con carta e penna è opportuno ridurre il numero di domande, altrimenti il tempo impiegato nel disegnare potrebbe essere eccessivo.

Nella prima ora di lezione richiamiamo le varie isometrie e facciamo in modo che gli studenti familiarizzino con esse. Un buon esercizio è far costruire immagini di segmenti e poligoni tramite isometrie date. Sia che l'attività sia svolta su carta e penna che in digitale, poniamo molta attenzione alle costruzioni necessarie per realizzare le isometrie. Un altro esercizio interessante consiste nel dare una figura, dichiarare un isometria e chiedere quale delle alternative sia l'immagine della figura tramite l'isometria data.
Nella due o tre ore successive, in base alle necessità, forniamo agli studenti delle schede sulle figure unite, che dovranno completare e giustificare dopo aver sperimentato attraverso il disegno o il software. In questa fase è possibile dividere la classe in gruppi. Di seguito proponiamo qualche esempio[2]:

- **TRASLAZIONI**

  Definizione 4.2.1. *La **traslazione** di vettore $\vec{v}$ è l'isometria del piano che ad ogni punto P associa il punto P' tale che $\vec{PP'}$ sia equivalente a $\vec{v}$.*

  1. Ci sono traslazioni che lasciano invariato un punto dato? E una retta data? Se sì, quali?
  2. Disegna due rette parallele r e s, ci sono traslazioni che sovrappongono r a s? Se sì, quali? E se le rette non sono parallele?

[2]Le domande che iniziano con una o più stelle sono più complesse, è opportuno aituare gli studenti e fornire suggerimenti

3. ($\star$) Ci sono altre figure che sono unite per una data traslazione?
   *(**Suggerimento:** esistono anche figure illimitate.)*
4. Dai almeno due esempi di traslazioni che si usano nella vita di tutti i giorni.

- **ROTAZIONI**

Definizione 4.2.2. *La **rotazione** di centro O e angolo orientato α è l'isometria del piano che ad ogni punto P associa il punto P' tale che $OP \cong OP'$ e l'angolo orientato $P\hat{O}P'$ è equivalente ad α.*

1. Esistono punti uniti per una rotazione? Se sì, quali?
2. Esistono rotazioni che fissano una retta data? Se sì, quali?
3. Se due rette sono incidenti ci sono rotazioni che sovrappongono l'una all'altra? Se si, quali? E se le rette sono parallele?
4. Esiste un qualche triangolo che è fissato da una qualche rotazione? Se sì, rappresenta il triangolo e descrivi la rotazione.
5. Esistono quadrilateri che sono fissati da qualche rotazione? Se sì, rappresentali e descrivi le rotazioni.
6. ($\star$) I poligoni regolari sono fissati da dalle rotazioni? Se sì, quante e quali?
7. Dai almeno due esempi di rotazioni che si usano nella vita di tutti i giorni.

Se una figura viene fissata da una rotazione di 180° si dice che ha una *simmetria centrale* e il centro della rotazione è chiamato *centro di simmetria.*
($\star\star$) Vero o falso: ogni poligono regolare ha un centro di simmetria.
*(**Suggerimento:** prova a ragionare sul numero di lati e su come si comporta una simmetria centrale sui punti.)*

- **Riflessioni**

Definizione 4.2.3. *La **riflessione** di asse la retta r è l'isometria del piano che:*

- *ad ogni punto Q di r fa corrispondere se stesso;*
- *ad ogni punto P che non giace su r associa il punto P', dalla parte opposta di P rispetto ad r, tale che $PP' \perp r$ e $d(P,r) = d(P',r)$.*

1. Ci sono punti fissati da una riflessione? Quali?
2. Ci sono due tipi di rette che sono fisse per una riflessione. Quali sono?
3. Una figura ha un asse di simmetria se la riflessione lungo tale asse lascia la figura invariata.
   (a) Ci sono triangoli che hanno un asse di simmetria? Quali?
   (b) Ci sono triangoli che hanno più di un asse di simmetria? Quali?
   (c) ($\star$) Quali **parallelogrammi** hanno assi di simmetria? Quali ne hanno più di uno? Come sono disposti? Sulla base di queste domande prova a classificare i parallelogrammi tramite le simmetrie.
   *(**Suggerimento:** rombi, rettangoli e quadrati sono particolari tipi di parallelogrammi.)*
4. ($\star$) I poligoni regolari hanno assi di simmetria? Quanti? Come sono disposti?
   *(**Suggerimento:** per quanto riguarda la disposizione, fai attenzione al numero di lati)*
5. Dai almeno due esempi di riflessioni che si usano nella vita di tutti i giorni.

- **GLISSORIFLESSIONI**

Definizione 4.2.4. *La **glissoriflessione** di asse r e vettore $\vec{v}$, paralleli tra loro, è l'isometria del piano che si ottiene componendo la traslazione di vettore $\vec{v}$ con la riflessione di asse r.*

1. Esistono punti uniti per la glissoriflessione? Se sì, quali?
2. Esistono rette unite per la glissoriflessione? Se sì, quali?
   *(**Suggerimento:** considera varie rette: la retta di riflessione, una parallela, una perpendicolare e una incidente ad essa, cosa succede?)*

3. ($\star$) Esistono altre figure unite per una glissoriflessione?
   *(**Suggerimento:** è coinvolta una traslazione, quindi prova a ragionare come già fatto prima.)*

Mentre gli studenti affrontano i quesiti, il docente deve assicurarsi che la classe lavori nel modo corretto e intervenendo quando è necessario per aiutare gli studenti in difficoltà. Alla fine di questa attività, utilizziamo altre due ore per discutere e correggere le risposte degli studenti con attività di dibattito in classe, valorizzando le situazioni in cui emergono più soluzioni o soluzioni "divergenti". Concludiamo l'attività proponendo delle schede riassuntive che gli studenti dovranno compilare per casa con ciò che hanno scoperto.

Riconoscere le isometrie

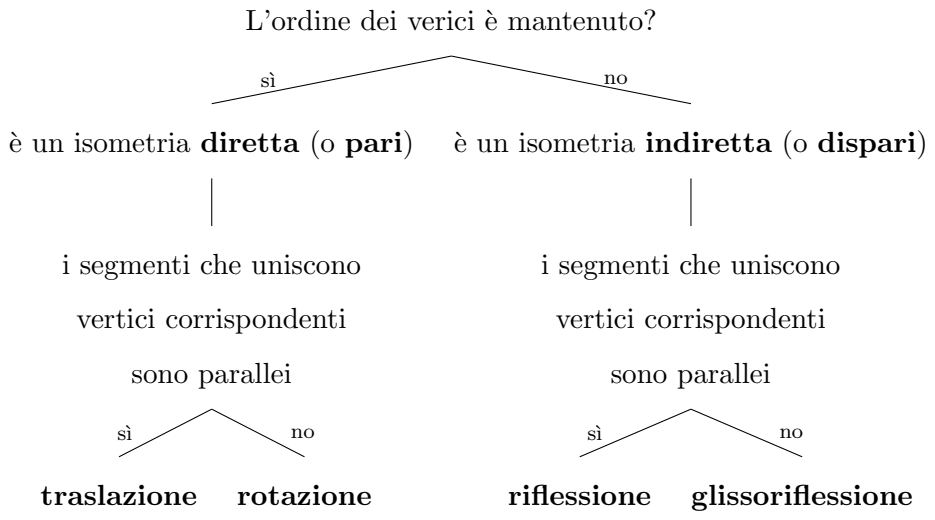
Molto spesso gli studenti si trovano in difficoltà nel riconoscere quale isometria è stata applicata; questa attività, della durata di un paio d'ore, si pone l'obbiettivo di superare questo problema.

- **Prerequisiti:** oltre a quelli della precedente attività, conoscere la differenza tra isometrie dirette e inverse, cioè se la trasformazione mantiene o inverte l'ordinamento dei vertici.

- **Materiali:** come prima, è possibile svolgere l'attività sia con carta e penna che con l'utilizzo di software; la seconda alternativa, che è quella che considereremo, rende il lavoro più veloce e permette di concentrare l'attenzione sui concetti; inoltre sarebbe opportuno impostare il software in modo che non mostri i nomi dei vertici a schermo così che siano gli studenti a doverlo fare.

Nella prima ora di sperimentazione al computer chiediamo agli studenti di costruire quattro file GeoGebra: su ognuno devono disegnare un triangolo o un quadrilatero, possibilmente irregolari per facilitare la distinzione dei vertici, e applicare a questo un'isometria, una diversa per ogni file.
Dopo aver nominato il triangolo ABC (o il quadrilatero $ABCD$), chiediamo loro di dare un nome ai vertici della figura immagine e se l'isometria conserva o inverte l'ordine dei vertici.

Questo è un ottimo momento per ricordare che ci sono due isometrie, la traslazione e la rotazione, che mantengono l'orientamento e due, la riflessione e la glissoriflessione, che lo invertono; le prime sono dette isometrie **pari** o **dirette**, le seconde **dispari** o **indirette**. Ovviamente dovrebbe essere chiaro agli studenti che questo, nonostante aiuti a distinguere, non permette di classificare le isometrie.
Tracciamo i segmenti passanti per vertici corrispondenti, i.e. AA', BB' e CC'. I segmenti sono paralleli o sono incidenti? Osserviamo assieme agli studenti che nel caso di una traslazione o di una riflessione tali segmenti sono paralleli, mentre questo non è vero per rotazioni e glissoriflessioni. A questo punto, aiutiamo gli studenti a capire che questo è sufficiente per determinare l'isometria sfruttando un diagramma come quello proposto sotto, in cui le parole in grassetto sono da completare.
Infine possiamo testare il diagramma e il livello di comprensione dei nostri studenti proponendo alcune immagini in cui dovranno riconoscere l'isometria coinvolta. Si potrebbe strutturare un'attività di valutazione su questo argomento.



Isometrie come metodo di dimostrazione

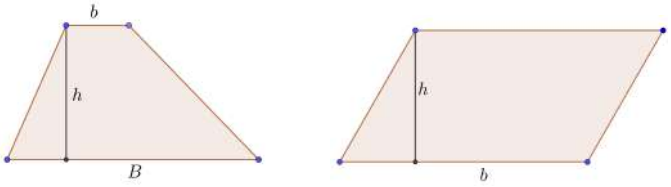
Supponiamo di essere di fronte a una classe vivace e interessata, che non ha riscontrato particolari problemi nella comprensione dell'argomento; possiamo introdurre alcune sfide più impegnative e problemi interessanti. Infatti le isometrie possono essere un utile strumento per risolvere problemi di natura geometrica. Di seguito proponiamo due tipi di problemi, il primo legato all'area dei quadrilateri, il secondo

al famoso problema di Erone.

Un modo per presentare l'argomento potrebbe essere quello di svolgere assieme un quesito, successivamente dividere la classe in gruppi, il più omogenei possibile, e far loro risolvere altri problemi che sfruttano la stessa idea. Alternativamente, possiamo lasciare agli studenti il tempo di ragionare sul problema, per poi guidarli verso la soluzione nel caso in cui non riescano nell'impresa.

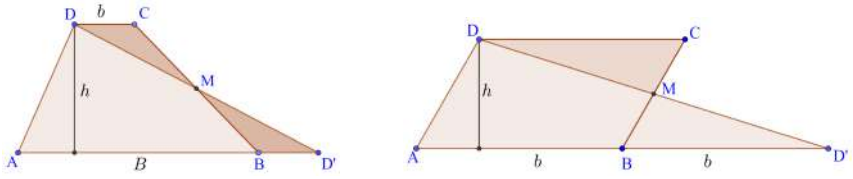
Esercizi sull'area dei quadrilateri

Esercizio 1: *Dimostra le formule per area dei parallelogrammi e dei trapezi, sfruttando soltanto le informazioni in figura, la formula dell'area dei triangoli e la simmetria centrale.*



Suggerimento: *ricorda che le isometrie mantengono lunghezze e aree.*

Svolgimento: Per quanto riguarda il trapezio, basta considerare il punto medio M di uno dei lati obliqui e il triangolo MCD, applichiamo a tale triangolo la simmetria centrale attraverso M. Ootteniamo il triangolo $AD'D$ di base $B+b$ e altezza h, che ha la stessa area del trapezio iniziale. Quindi $\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2}$, come volevasi dimostrare. Similmente, applichiamo la stessa tecnica a un qualsiasi lato del parallelogramma per formare un triangolo di base $2b$ e altezza h; quindi $\mathcal{A} = \frac{2bh}{2} = bh$.

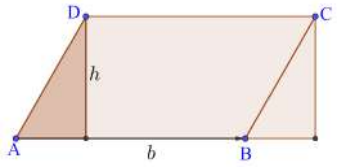


Esercizio 2: *Dimostra la formula dell'area del parallelogramma sfruttando quella per l'area dei rettangoli.*

Suggerimento: *come prima, scomponi la figura e pensa a una isometria in grado di formare un rettangolo a partire da un parallelogramma.*

Svolgimento: In questo caso basta notare che se tracciamo un altezza, indivi-

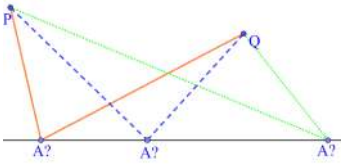
duiamo un triangolo rettangolo; traslandolo lungo la base si forma un rettangolo e, poiché le isometrie preservano le aree, possiamo concludere.



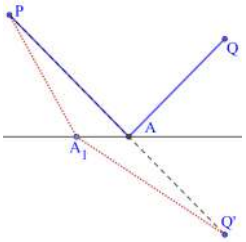
Esercizi sul problema di Erone

In questo caso potrebbe essere interessante permettere agli studenti di interagire con il problema grazie a GeoGebra, di modo che possano sperimentare in maniera dinamica ed elaborare congetture che saranno poi discusse con l'insegnante.

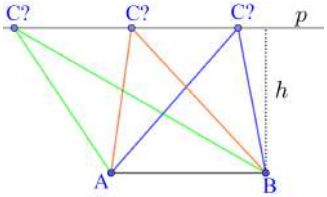
Problema di Erone: *P e Q sono due località dalla stessa parte di un fiume f, un uomo a cavallo si trova in P e deve raggiungere Q, ma nel tragitto deve far abbeverare il proprio cavallo. Qual è il minimo tragitto che può percorrere?*



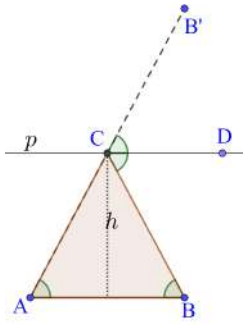
Svolgimento: Preso un qualsiasi punto A sul fiume, possiamo spezzare il percorso nei due tratti PA e AQ. Sia Q' il riflesso di Q lungo f; poiché $AQ = AQ'$, si tratta di minimizzare la spezzata PAQ, che è minima quando i punti sono allineati. Quindi basta portare il cavallo nel punto di intersezione tra r e PQ'.



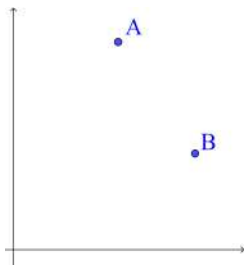
Problema del triangolo minimo: *assegnati la base AB e l'altezza h, quali sono i triangoli di perimetro minimo?*



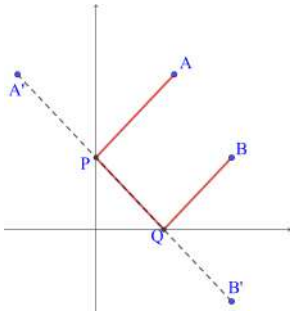
Svolgimento: Il terzo vertice del triangolo appartiene a una delle due rette parallele ad AB a distanza h; consideriamo solo una delle due, visto che il ragionamento è identico per entrambe, e denotiamola con p. Possiamo ragionare come nel problema di Erone: fissiamo un punto C su p, il perimetro del triangolo ABC è minimo quando $AC + BC$ è minima. Considerando B', il riflesso di B lungo p, $AC + BC = AC + B'C$ e questa distanza è minima quando A, B' e C sono allineati.
In particolare ABC è isoscele in quanto, per un qualsiasi punto D su p, $C\hat{A}B = B'\hat{C}D = D\hat{C}B = C\hat{B}A$, dove la prima e l'ultima uguaglianza derivano dal Teorema sulle rette parallele e la centrale discende dalle proprietà della riflessione. Quindi fissati base e altezza, il triangolo di perimetro minimo è quello isoscele.



Problema: *Consideriamo i punti A e B in un piano cartesiano, come in figura. Dove si devono disporre i punti P e Q, rispettivamente sull'asse x e sull'asse y, affinché il percorso $APQB$ sia minimo?*

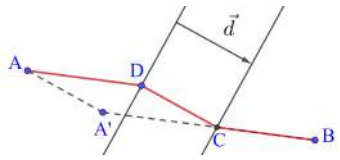


Svolgimento: come nel *problema di Erone* è sufficiente riflettere A lungo l'asse x e B lungo l'asse y e considerare le intersezioni tra $A'B'$ e gli assi cartesiani. Infatti la lunghezza del cammino $APQB$ coincide con quella di $A'PQB'$ e questa è minima se i punti sono allinati.

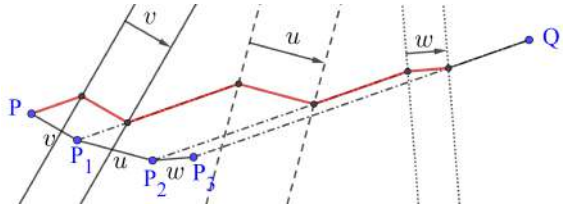


(⋆) **Problema del ponte:** *Le sponde di un fiume sono rette parallele che distano d l'una dall'altra. Due città A e B sorgono ai lati opposti del fiume. Dove dobbiamo costruire un ponte perpendicolare alle sponde affinché la strada sia minima?*
*(**Suggerimento:** come è definita la distanza tra due rette parallele? Possiamo indicarla come un vettore?)*

Svolgimento: Sia $\vec{d}$ il vettore che rappresenta il ponte e muoviamoci subito da A a $\tau_{\vec{d}}(A) = A'$. Supponendo per un attimo che non ci sia il fiume, sappiamo che dobbiamo necessariamente percorrere il ponte descritto da $\vec{d}$ e quindi dobbiamo minimizzare la distanza tra A' e B, cioè vogliamo percorre una lunghezza pari al segmento $A'B$. Allora congiungiamo A' con B e sia C l'intersezione tra $A'B$ e la sponda del fiume verso B; consideriamo infine il parallelogramma $AA'CD$. $AA' + A'B = AD + DC + CB$ e quindi il ponte deve essere costruito a partire dal punto D.



Possiamo generalizzare il problema a più ponti. La soluzione è mostrata in figura e consiste nel muoversi prima con tutti i vettori che rappresentano i ponti, per poi determinare il punto di inizio dell'ultimo ponte e procedere a ritroso, come se l'ultimo fiume non esistesse e il punto di arrivo fosse il punto appena trovato.



4.3 Sulle tassellazioni

Ci poniamo l'obbiettivo di dimostrare empiricamente che esistono soltanto tre tassellazioni composte da poligoni regolari tutti uguali e che ogni ogni triangolo e ogni quadrilatero può tassellare il piano. Una possibile continuazione, da valutare in base all'interesse della classe e al tempo a disposizione, potrebbe essere un laboratorio sulle tassellazioni uniformi, proposta alla fine della Sezione.

Fase 1: Tassellazioni regolari

Materiali: poligoni regolari ritagliati su del cartoncino (triangoli equilateri, quadrati, esagoni regolari e almeno 2 o 3 tipi di altri poligoni regolari)
Questa prima fase è divisa in due parti, ognuna di un'ora circa. Iniziamo l'attività fornendo agli studenti, divisi in gruppi, i vari poligoni regolari e chiedendo loro di formare una tassellazione, cioè accostare i tasselli senza che si accavallino e senza lasciare buchi. In breve tempo, gli studenti dovrebbero accorgersi che è molto semplice comporre una tassellazione con i triangoli equilateri, i quadrati e gli esagoni regolari, mentre questo non è possibile con altri tipi di poligoni regolari, o almeno non è scontato. Questo potrebbe essere un buon momento per discutere cosa sia un'ipotesi o una congettura e per chiarire che il non essere riusciti a tassellare il piano con un pentagono regolare, ad esempio, non è una dimostrazione del fatto che sia impossibile. Durante la seconda parte, utilizziamo il laboratorio informatico e il software GeoGebra. Abbiamo due attività in questo caso: in primo luogo, sperimentare ancora qualche altro poligono per convincersi che le tassellazioni regolari sono soltanto tre; dopodiché, facciamo sperimentare agli studenti le varie isometrie che si possono utilizzare per costruire le tassellazioni regolari, ad esempio si possono costruire utilizzando soltanto traslazioni, ma anche utilizzando riflessioni assiali e/o centrali. Al termine dell'esperienza si potrebbe dare una dimostrazione, semplice ma convincente e rigorosa, che esistono soltanto le tre tassellazioni trovate.

Fase 2: Tassellazioni con triangoli e quadrilateri

Nella seconda fase, nuovamente di un paio d'ore, utilizziamo ancora GeoGebra. Le attività nella prima e nella seconda ora sono identiche, quindi non ci ripeteremo.

Chiediamo a ogni studente di disegnare un qualsiasi triangolo nella prima ora e un qualsiasi quadrilatero nella seconda, assicurandoci che le figure proposte dagli studenti siano abbastanza varie e che ci siano anche triangoli ottusangoli, quadrilateri concavi e non ci siano parallelogrammi. A questo punto poniamo loro una domanda apparentemente semplice:

"*Il triangolo (risp. quadrilatero) che avete disegnato può tassellare il piano?*"

Lasciamo del tempo agli studenti affinché provino a risolvere il problema autonomamente. Ricordiamoci che, finché non si conosce la soluzione, il quesito non è affatto semplice; almeno nella prima lezione è opportuno fornire dei suggerimenti chiave, come ad esempio lo sfruttare i punti medi oppure dire che bisogna utilizzare le simmetrie centrali. Una volta che tutta la classe ha risolto il problema, chi autonomamente chi aiutato dal docente e dai compagni, concludiamo l'attività concentrandoci su quali isometrie abbiamo sfruttato per completare le tassellazioni. Un altro aspetto interessante potrebbe essere la periodicità della tassellazione e l'individuazione di una regione fondamentale che tassella il piano per traslazione; questo ci fornisce anche un collegamento con le tassellazioni aperiodiche di Penrose, che potrebbero suscitare curiosità e interesse negli allievi e su cui si potrebbe dedicare una o due ore di lezione per sperimentarne i risultati più semplici o semplicemente per fare appassionare gli studenti alla Matematica.

Fase 3: Tassellazioni uniformi

Questa fase, della durata di due ore, è molto simile alla prima e dovrebbe portare gli studenti a verificare che esistono particolari tassellazioni composte da più poligoni regolari che si dispongono sempre nello stesso modo attorno ai vertici. Utilizziamo nuovamente dei poligoni regolari ottenuti ritagliando del cartoncino e dividiamo la classe in gruppi; l'idea è che ognuno di questi gruppi scopra almeno una tassellazione uniforme. Per far si che i gruppi scoprano tassellazioni diverse, distribuiamo loro diversi kit di tasselli, magari con qualche intruso; ad esempio al gruppo **A** potremmo dare triangoli equilateri, quadrati e ottagoni regolari di modo che possano arrivare alle tassellazioni (4,8,8), (3,3,3,4,4) e (3,3,4,3,4), al gruppo **B** triangoli equilateri, esagoni e dodecagoni regolari per scoprire (3,12,12), (3,6,3,6) e (3,3,3,3,6). Quando

tutti i gruppi hanno scoperto una tassellazione, ridistribuiamo i tasselli ai gruppi in modo diverso e ripetiamo l'esperienza. L'obiettivo non è tanto la scoperta di tutte le tassellazioni uniformi o l'accorgersi che sono un numero finito, ma sperimentarne la regolarità e lavorare manualmente su una struttura periodica. Infine è interessante far ragionare gli studenti su quali isometrie fissano le tassellazioni; questo potrebbe fornire un collegamento con i mosaici, di cui parleremo nella prossima Sezione.

Fase 4: Conclusione

A questo punto i nostri alunni dovrebbero conoscere alcune semplici informazioni sulle tassellazioni. A conclusione del progetto possiamo operare un processo contrario a quanto appena fatto: selezioniamo alcuni esempi di tassellazioni dal mondo reale, come ad esempio gli alveari delle api o decorazioni architettoniche, o dal mondo dell'arte, ad esempio le opere di Escher, e le discutiamo con la classe, individuando il tipo di tassellazioni e le simmetrie presenti. In questo modo riportiamo un argomento che, agli occhi degli studenti, sembra astratto e privo di applicazioni alla vita di tutti i giorni, ribadendo che la matematica non è fine a se stessa ma serve a osservare, rappresentare e comprendere ciò che ci circonda.

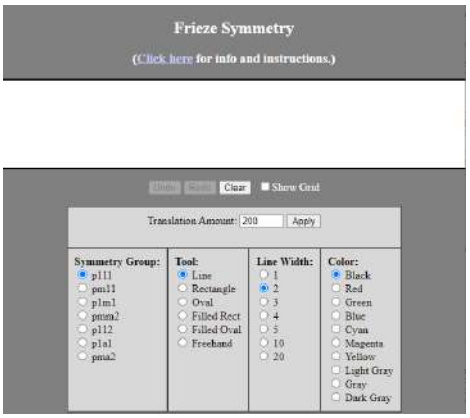
4.4 Su fregi e mosaici

Dimostrare l'esistenza e l'unicità dei 7 gruppi dei fregi e dei 17 gruppi dei mosaici non è sicuramente semplice e intuitivo, per questo risulta molto ostico affrontare questo argomento dal punto di vista teorico nella Scuola Secondaria di II grado. D'altra parte, questi argomenti sono molto maneggevoli, permettono moltissimi collegamenti con altre materie come Storia dell'Arte o Scienze e, soprattutto, sono piacevoli e divertenti, per questo è un ottimo punto di partenza per creare un buon rapporto tra gli alunni e la Matematica. In questa Sezione proponiamo un percorso che trae spunto dalla *vignette* del progetto Klein "*Symmetry step by step*" e dall'articolo [BBFT22].

Consideriamo innanzitutto i *fregi*. La durata della sperimentazione è di circa 6 ore ed è interamente svolta con l'uso di software come GeoGebra e il software online *Frieze Symmetry*, per permettere agli studenti di essere il più creativi possibili.

Fase 1

Nella prima ora, dopo una breve introduzione ai comandi del software *Frieze Symmetry*, lasciamo gli studenti liberi di sperimentare, creare e comprendere il funzionamento dei fregi e le simmetrie coinvolte; in questo modo creiamo un ambiente libero e di scoperta che favorisce l'elaborazione congetture proprie, da discutere con il docente successivamente. Nel caso in cui la classe sia poco propensa ad attività così libere, potremmo stilare una lista di istruzioni e/o domande per guidarli nella scoperta.



Schermata del software *Frieze Symmetry*

Fase 2

La seconda e la terza ora, che possono anche svolgersi in classe, sono dedicate alla formalizzazione di quanto visto nella prima ora. Si discuterà delle isometrie coinvolte nei 7 gruppi dei fregi, con particolare attenzione al significato delle lettere coinvolte nelle sigle (**m** per le riflessioni, **a** per le glissoriflessioni, i numeri finali per l'ordine massimo di rotazione), il significato della loro posizione, cioè in quali direzioni sono diretti gli assi di (glisso)riflessione e il tassello fondamentale che genera il fregio. In questa lezione si potrebbe discutere nuovamente il concetto di figura unita (o fissa), riprendendo la classificazione delle isometrie precedentemente svolta. Alla fine di queste due ore, tramite un diagramma di flusso da completare con i nomi dei fregi, simile a quello proposto alla fine della Sezione 1.3, formalizziamo l'esistenza e l'unicità dei sette tipi di fregi. Sarebbe opportuno affiancare a ogni nomenclatura nel diagramma di flusso un'immagine esemplificativa per fissare nella mente degli

studenti il più possibile la struttura del fregio, come mostrato di seguito, dove abbiamo utilizzato i fregi presenti all'*Alhambra* di Granada[3]. Alternativamente possiamo anche utilizzare delle immagini stilizzate, sicuramente più semplici ma meno "impattanti".

p111

p1a1

p112

pm11

p1m1

pma2

pmm2

Fase 3

Questa fase non è strettamente necessaria, ma serve a fornire una notazione più semplice e intuitiva; inoltre fornisce un'idea dinamica dei fregi. Volendo si può svolgere all'aria aperta e se ce ne fosse la possibilità sulla sabbia, ad esempio sull'atterraggio di una pista di salto in lungo.

A questo punto del progetto gli studenti dovrebbero aver ben compreso quali isometrie sono presenti nei gruppi dei fregi; per questo non dovrebbe essere difficile far loro notare che le immagini della lettera "b" sotto tali isometrie sono tutte lettere dell'alfabeto, i.e. "d" per le riflessioni di asse perpendicolare al vettore traslazione, "p" per quelle di asse parallelo al vettore di traslazione e per le glissoriflessioni, "q" per le rotazioni di π. La prima attività è quindi quella di completare una tabella rinominando i vari gruppi dei fregi utilizzando le lettere che compongono l'orbita di una "b" tramite l'azione del gruppo, come mostrato di seguito:

p111	b b b b
p1a1	b p b p
p112	b q b q
pm11	b d b d

p1m1	b b b b p p p p
pma2	b q p d
pmm2	b d b d p q p q

Vogliamo ora replicare i sette fregi attraverso le orme lasciate sulla sabbia. Inizialmente lasciamo che la classe lavori senza il nostro aiuto, magari fornendo alcune

[3]Le imamgini sono tratte da [Bod07].

schede per ricordare loro quali sono le isometrie coinvolte in ogni gruppo e ricordando che usare entrambi i piedi vuol dire introdurre una riflessione. Dopodiché, per non rischiare che il lavoro vada troppo per le lunghe, aiutiamoli finché non troviamo tutte e 7 le possibili "camminate". Per ognuna di esse scattiamo delle foto, di modo che, una volta tornati in classe o come compito per casa, sia possibile creare un elaborato in cui a ogni "camminata" è associato il gruppo di simmetria e un nome comune che lo identifichi. Di seguito proponiamo un esempio:

p111

salto a un piede

p1a1

passeggiata

p112

salto a un piede rotante

pm11

camminata laterale

p1m1

salto a piè pari

pma2

camminata laterale rotante

pmm2 salto a piè pari rotante

Potremmo collegare questa attività con i colleghi di Educazione Fisica, per un lavoro sulla coordinazione motoria.

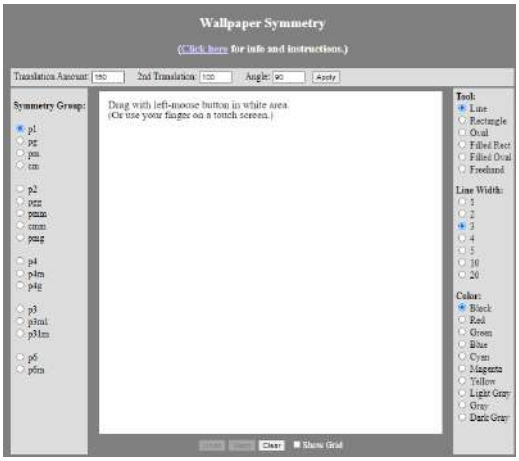
Fase 4

Nelle ultime due ore, testiamo se i nostri alunni hanno appreso i concetti alla base dei fregi. Innanzitutto potremmo proporre alcuni fregi presi dal mondo dell'arte, creando di nuovo un possibile collegamento con altre materie, e chiediamo loro di trovare il tassello fondamentale e il gruppo di simmetria. Dopodiché chiediamo loro di replicare un fregio da noi assegnato su GeoGebra, aiutandosi con le schede già fornite e il software *Frieze Symmetry*; in questo modo dovranno trovare il tassello base, il gruppo di simmetria e costruire le isometrie necessarie. Sulla base di quest'ultima attività e dell'andamento generale del progetto è possibile, se lo si ritiene opportuno, dare una valutazione agli studenti.

Un'altra attività interessante si trova in [Ser97], che propone un laboratorio in cui

si ricreano i sette gruppi dei fregi tramite bambole di carta ritagliate in vari modi.

Per quanto riguarda i *Mosaici* possiamo ripercorrere un esperienza simile, che riassumiamo brevemente. Nella prima fase utilizziamo il software online *Wallpaper Symmetry*, l'analogo per i mosaici di *Frieze Symmetry*. Come prima, lasciamo libertà di sperimentare e comprendere ciò che accade a schermo, guidando se necessario con consigli e istruzioni.

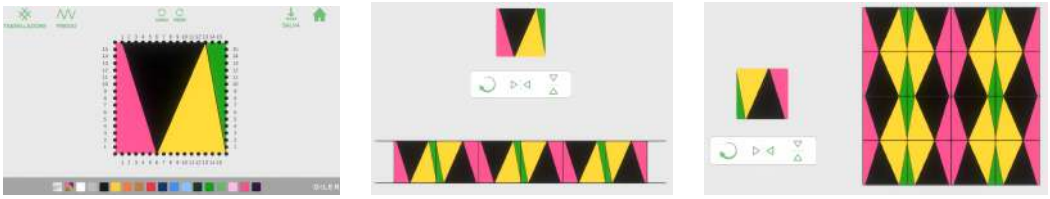


Schermata del software *Wallpaper Symmetry*

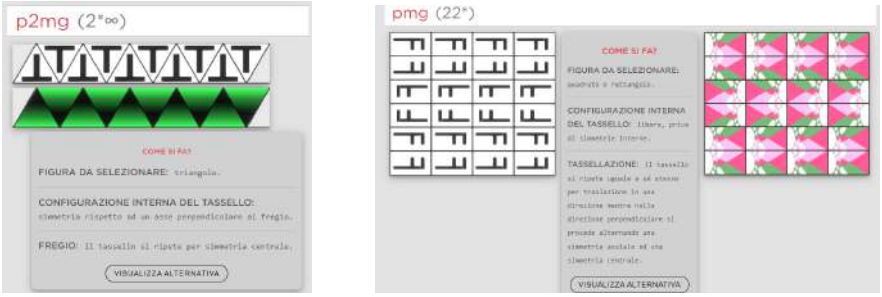
Nella seconda fase discutiamo le teorie dei nostri studenti, formalizzando l'esistenza dei 17 gruppi dei mosaici, con particolare attenzione al significato delle sigle e alle isometrie coinvolte; per fare ciò possiamo avvalerci nuovamente di un diagramma di flusso, oppure di una tabella simile a quella proposta alla fine della Sezione 1.4, sempre affiancata da delle immagini, che possono essere prese sia dal mondo reale che dal mondo dell'arte. Di nuovo, possiamo prendere spunto dall'*Alhambra* in cui compaiono tutti e 17 i gruppi di simmetria dei mosaici oppure dalle pavimentazioni delle strade di Lisbona.

Esempi di mosaici per le strade di Lisbona, tratte da "*Symmetry step by step*"

Nell'ultima fase, che sarà anche quella di valutazione, partendo da esempi reali, chiediamo agli studenti di riconoscere alcuni tipi di tassellazione, aiutandosi con il diagramma di flusso o la tabella completata assieme nella fase precedente. Dopodiché chiediamo loro di riprodurre una data tassellazione con l'uso di GeoGebra.
Per non concludere l'esperienza con la valutazione, che potrebbe rovinare il ricordo positivo negli studenti, proponiamo agli studenti di creare un fregio e un mosaico, magari assegnando il gruppo di simmetria da usare, attraverso il software Tales Games, che permette la creazione di un tassello di partenza da disporre poi a formare una tassellazione; il software fornisce inoltre un catalogo dei fregi e un catalogo delle tassellazioni con semplici istruzioni su come creare un mosaico con date simmetrie. I loro lavori potrebbero essere raccolti e appesi alle parete della classe.



Schermata ed esempi in *Tales Games*



Esempi nel catalogo di *Tales Games*

Dopo aver svolto le attività proposte, si potrebbe creare una cartella Drive condivisa così che gli studenti possano caricare foto di ciò che li circonda riguardanti tassellazioni, fregi, mosaici o oggetti con particolari simmetrie, in modo che l'attività non sia solo fine a se stessa e gli studenti si accorgano della Matematica, e in particolare della simmetria, che permea la realtà.

Bibliografia e sitografia

[BBFT22] Ilaria Bencivenni, Luigi Bernardi, Federica Ferretti, and Luigi Tomasi. Fregi e tassellazioni del piano per guardare la realtà che ci circonda con occhio matematico. *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza Torino*, page 465, 07 2022.

[Bel01] Paolo Bellingeri. Terribili simmetrie. Dio è un geometra? di Ian Stewart e Martin Golubitsky. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 4(2):341–343, 2001.

[Bod07] B. Lynn Bodner. Frieze patterns of the Alhambra. In Reza Sarhangi and Barrallo Javier, editors, *Bridges Donostia: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pages 203–208. Tarquin Publications, Londra, 2007.

[Bol63] Béla Bollobàs. Filling the plane with congruent convex hexagon without overlapping. *Annales Univesitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*, 6:117–123, 1963.

[CR00] Richard Courant and Herbert Robbins. *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi.* Bollati Boringhieri, 2000.

[Ded96] Maria Dedò. *Trasformazioni geometriche: con un'introduzione al modello di Poincaré.* Zanichelli, 1996.

[Ded99] Maria Dedò. *Forme: simmetria e topologia.* Zanichelli, 1999.

[Dev94] Keith J Devlin. *Dove va la matematica.* Bollati Boringhieri, 1994.

[dlH89] P. de la Harpe. Quelques problèmes non résolus en géométrie plane. *L'Enseignement Mathématique*, 35:227–243, 1989.

[dS15] Ana Cannas da Silva. Symmetry step by step. `http://blog.kleinproject.org/?p=1381`, 2015. Klein Project Blog.

[Gar67] Martin Gardner. *Enigmi e giochi matematici*. Sansoni, 1967.

[Gar69] Martin Gardner. *Enigmi e giochi matematici*. Sansoni, 1969.

[Gar75] Martin Gardner. MATHEMATICAL GAMES, On tassellating the plane with convex polygon tiles. *Scientific American*, 233(1):112–119, 1975.

[Gar77] Martin Gardner. MATHEMATICAL GAMES, Extraordinary non-periodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American*, 236(1):110–121, 1977.

[GS77] Branko Grünbaum and Geoffrey C Shephard. Tilings by regular polygons. *Mathematics Magazine*, 50(5):227–247, 1977.

[GS87] Branko Grünbaum and Geoffrey Colin Shephard. *Tilings and patterns*. Courier Dover Publications, 1987.

[KAB98] Felix Klein, Evandro Agazzi, and Antonio Bernardo. *Il programma di Erlangen*. Editrice La Scuola, 1998.

[Ker69] R. B. Kershner. On paving the plane. *APL Technical Digest*, July–August(8):4–10, 1969.

[Kla16] Bernhard Klaassen. Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons. *Elemente der Mathematik*, 71(4):137–144, 2016.

[Kle08] Felix C. Klein. *A comparative review of recent researches in geometry*, 2008.

[Krö69] Otto Krötenheerdt. Die homogenen mosaike n-ter ordnung in der euklidischen ebene. i. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Natur. Reihe*, 18:273–290, 1969.

[Mar82] George Edward Martin. *Transformation geometry: an introduction to symmetry*. Springer, 1982.

[MMMVD18] Casey Mann, Jennifer McLoud-Mann, and David Von Derau. Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata*, 194(1):141–167, 2018.

[Niv78] Ivan Niven. Convex polygons that cannot tile the plane. *The American Mathematical Monthly*, 85(10):785–792, 1978.

[OIL22] OILER®. Tales Games. `https://oiler.education/tales`, 2022. [Online; accessed 31-08-2022].

[oMaHC04a] Department of Mathematics, Computer Science at Hobart, and William Smith Colleges. Frieze Symmetry. `https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/frieze.html`, 2004. [Online; accessed 31-08-2022].

[oMaHC04b] Department of Mathematics, Computer Science at Hobart, and William Smith Colleges. Wallpaper Symmetry. `https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html`, 2004. [Online; accessed 31-08-2022].

[Pen79] Roger Penrose. Pentaplexity a class of non-periodic tilings of the plane. *The Mathematical Intelligencer*, 2(1):32–37, 1979.

[Pie] Riccardo Piergallini. Geometria e tassellazioni. *Università di Camerino, https://oldmat.unicam.it/piergallini/home/seminari/tassellazioni/tassellazioni.pdf*.

[Rao17] Michael Rao. Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *arXiv preprint arXiv:1708.00274*, 2017.

[Rei18] Karl Reinhardt. Uber die zerlegung der ebene in polygone. *Dissertation, Universitat Frankfurt*, 1918.

[RS81] Bruce I. Rose and Robert D. Stafford. An elementary course in mathematical symmetry. *The American Mathematical Monthly*, 88(1):59–64, 1981.

[Sch78a] Doris Schattschneider. The plane symmetry groups: Their recognition and notation. *The American Mathematical Monthly*, 85(6):439–450, 1978.

[Sch78b] Doris Schattschneider. Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51(1):29–44, 1978.

[Sci12] B. Scimemi. *Geometria Sintetica*. Coop. Libraria Editrice Università di Padova, 2012.

[SD98] Adriana Sartore Dan. *I disegni periodici in geometria: applicazioni didattiche del metodo di Escher*. Erickson, 1998.

[SE92] Doris Schattschneider and Maurits Cornelis Escher. *Visioni della simmetria: i disegni periodici di M.C. Escher*. Zanichelli, 1992.

[Ser97] Brigitte Servatius. The geometry of folding paper dolls. *The Mathematical Gazette*, 81(490):29–36, 1997.

[SG92] Ian Stewart and Martin Golubitsky. *Fearful Symmetry*. Blackwell, 1992.

[Ste87] Hugo Steinhaus. *Cento problemi di matematica elementare*. P. Boringhieri, 1987.

[Wan65] Hao Wang. Games, logic and computers. *Scientific American*, 213(5):98–107, 1965.

[Wey75] Hermann Weyl. *La simmetria*. Feltrinelli Milano, 1975.

[Wik22] Wikipedia contributors. Pentagonal tiling, Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. [Online; accessed 30-August-2022].

[Zon20] Chuanming Zong. Can you pave the plane with identical tiles? *Notices of the American Mathematical Society*, 67(5), 2020.